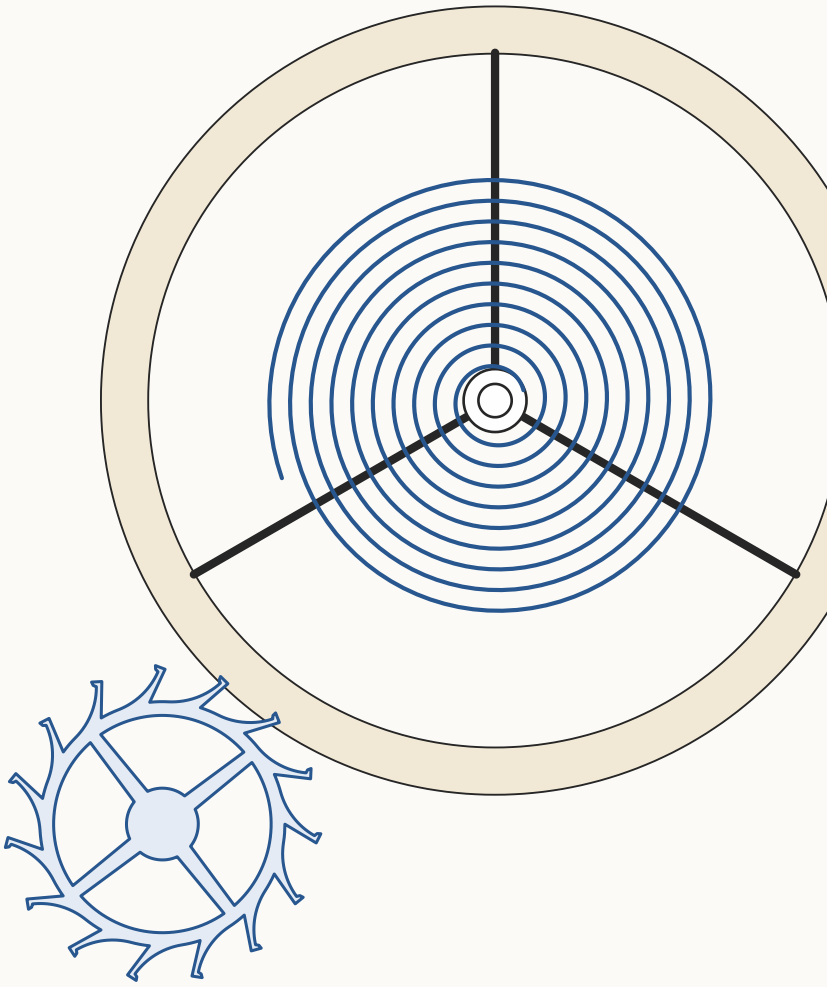
AUSBILDUNG · MEISTERPRÜFUNG · WERKSTATT

# Formelsammlung Uhrmacherei

Formeln, Skizzen und durchgerechnete Beispiele für Klein- und Großuhren



**Robin Israel**
Uhrmachermeister · R.I.O. Uhrenwerkstätte Oppenheim
Vorsitzender der Hessischen Uhrmacherschule

Ausgabe Fachkunde 2026

# So liest man diese Formelsammlung

Jede Formel steht in einer eigenen Karte: oben Name, Nummer und Stufe, darunter die Formel, wo es hilft auch umgestellt, daneben die Tabelle aller Größen mit Einheit. Es folgen in einem Satz die Bedingungen, unter denen die Formel gilt, und ein durchgerechnetes Beispiel mit Zahlen und Einheiten. Formelumstellen setzen wir voraus; umgestellte Formen stehen nur dort, wo man sie in der Werkstatt ständig braucht.

## Stufen

GESELLE — Grundwissen für Ausbildung und Gesellenprüfung.

MEISTER — Stoff der Meisterprüfung.

VERTIEFUNG — Hintergrund und Konstruktion; nicht in der Prüfung auszurechnen, aber nützlich, um zu verstehen, was in der Uhr passiert.

## Schreibweise

Brüche stehen immer übereinander, nie mit Schrägstrich. Zwischen Faktoren steht ein Malpunkt, Dezimalzahlen haben ein Komma, große Zahlen schmale Lücken: $86\,400$.

Die meisten Formeln sind **Größengleichungen**: Man setzt Zahl und Einheit ein und rechnet die Einheiten mit. Jede passende Einheit ist erlaubt, solange man sauber umrechnet. Wenige Werkstattformeln sind **Zahlenwertgleichungen**; sie tragen den Vermerk „Zahlenwertgleichung“ und gelten nur mit genau den Einheiten aus ihrer Größentabelle.

Formeln mit „≈“ sind Näherungen. Wie weit sie reichen, steht unter „Gilt“.

## Gang, Schwingung und Schlag

Der Gang $G$ ist die Abweichung einer Uhr je Tag in Sekunden ($\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$). Plus heißt: Die Uhr geht vor. Minus heißt: Sie geht nach.

Eine **Schwingung** ist hin und zurück, ihre Dauer ist die Schwingungsdauer $T$, die Frequenz $f$ zählt volle Schwingungen je Sekunde (Hz). Ein **Schlag** ist eine Halbschwingung. Die Schlagzahl $n_\mathrm{h}$ zählt Halbschwingungen, bei Kleinuhren je Stunde (A/h): $28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ sind $4\ \mathrm{Hz}$.

$T$ ist in dieser Sammlung eine Zeit (nur bei den Passungen in Kapitel XL 9 die Toleranz). Temperaturen heißen $\vartheta$, Temperaturänderungen $\Delta\vartheta$.

## Winkel

In Winkelfunktionen ($\sin$, $\cos$, $\tan$) darf ein Winkel in Grad stehen; der Taschenrechner muss dann auf Grad stehen. Steht ein Winkel dagegen als Faktor oder als Potenz in einer Formel, wird er im Bogenmaß eingesetzt: Grad mal $\frac{\pi}{180}$. Die Größentabelle sagt jeweils, welche Form gemeint ist.

## Gleiches Zeichen, andere Bedeutung

Die wichtigsten Zeichen bedeuten überall dasselbe. Wo ein Kapitel ein Zeichen anders braucht, etwa $A$ für eine Fläche statt für die Amplitude, steht das in der Kapiteleinleitung und in der Größentabelle der Formel. Die Größentabelle gilt immer.

## Fachkunde und XL

Diese Ausgabe enthält die Formeln der Uhr: Antrieb, Räderwerk, Gangregler, Hemmung, Gangkontrolle, Quarzuhr, Zeit und Kalender. Die allgemeinen Grundlagen aus Mathematik, Mechanik, Elektrotechnik, Fertigung, Werkstoffen und Statistik stehen in der XL-Ausgabe. Ein Verweis mit dem Zusatz „XL“ führt dorthin und nennt die Nummer der XL-Ausgabe.

© 2026 Robin Israel. Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: Weitergabe und Bearbeitung sind kostenlos erlaubt, mit Nennung des Autors, nicht kommerziell und unter denselben Bedingungen. creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0

# Inhalt


1 Antrieb 5
1.1 Zugfeder im Federhaus: Geometrie 5
1.2 Drehmoment und Energie der Zugfeder 11
1.3 Gangdauer 16
1.4 Gewichtsantrieb 19
1.5 Schnecke und Kette 21
1.6 Leistung des Antriebs 22
1.7 Aufzug und Zeigerstellung 24

2 Räderwerk und Verzahnung 29
2.1 Übersetzung 29
2.2 Gehwerk berechnen 33
2.3 Zeigerwerk 36
2.4 Verzahnungsgeometrie 38
2.5 Schlagwerk 49
2.6 Kalender und Mondphase 51
2.7 Wirkungsgrad des Räderwerks 54

3 Gangregler: Unruh und Spirale 56
3.1 Schwingung der Unruh 56
3.2 Spiralfeder 59
3.3 Unruh 65
3.4 Reglage aus Soll- und Istwerten 69
3.5 Temperatur 71
3.6 Energie und Güte 74
3.7 Isochronismus 76

4 Pendel 78
4.1 Mathematisches Pendel 78
4.2 Regulieren über die Pendellänge 81
4.3 Physikalisches Pendel 85
4.4 Ausschlag und Kreisfehler 87
4.5 Temperatur und Aufstellort 88

5 Hemmungen 92
5.1 Grundgrößen aller Hemmungen 92
5.2 Schweizer Ankerhemmung: Geometrie 95
5.3 Kraft und Energie 103
5.4 Die Hemmung an der Zeitwaage 105
5.5 Hemmungen der Großuhr 106
5.6 Weitere Hemmungen 108

6 Gangkontrolle und Messen 110
6.1 Stand und Gang 110
6.2 Zeitwaage 113
6.3 Lagen und Kennzahlen 118
6.4 Chronometerprüfung 122
6.5 Wasserdichtheit und Druck 124
6.6 Magnetismus und Stoß 126
6.7 Ablesefehler und Streuung 127

7 Quarzuhr und Batterie 129
7.1 Batterie 129
7.2 Quarz und Frequenzteiler 132
7.3 Schrittmotor 135
7.4 Messen an der Quarzuhr 137

8 Zeit und Kalender 139
8.1 Tag und Jahr 139
8.2 Kalender 141
8.3 Zeitgleichung 143
8.4 Ortszeit und Zonenzeit 145
8.5 Mondphase 146
8.6 Skalen am Chronographen 147

Formelzeichen 152

Stichwortverzeichnis 160

# 1 Antrieb

Der Antrieb liefert die Energie, die Räderwerk, Hemmung und Gangregler verbrauchen. In der Kleinuhr und in vielen Großuhren speichert sie eine Zugfeder im Federhaus, in der Pendeluhr oft ein Gewicht. Die Feder ist kompakt, ihr Drehmoment lässt beim Ablauf aber nach. Das Gewicht braucht Fallhöhe und zieht dafür immer gleich stark.

Gerechnet wird mit den Einheiten der Werkstatt: Maße in mm, Kräfte in N, Drehmomente in $\mathrm{N} \cdot \mathrm{mm}$. Wie das Drehmoment durch das Räderwerk zur Hemmung gelangt, steht in Kapitel 2. Abweichend von der sonstigen Belegung steht $P$ in diesem Kapitel für die Leistung und $m$ für die Masse des Gewichts; $N$ zählt Windungen, Umgänge und Umdrehungen.

## 1.1 Zugfeder im Federhaus: Geometrie

Die Zugfeder liegt als Paket im Federhaus: abgelaufen an der Wand, aufgezogen um den Federkern. Für die Rechnung denken wir uns die Windungen dicht an dicht. Dann bedeckt die Feder in beiden Lagen dieselbe Fläche, nämlich Länge mal Klingenstärke. Daraus folgen alle Formeln dieses Abschnitts.

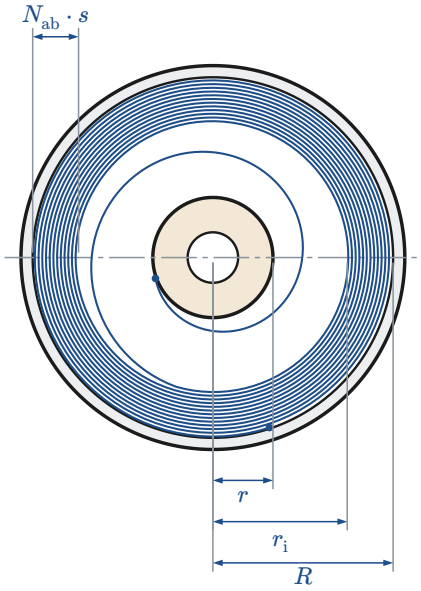



**Abb. 1.1** Abgelaufen: Das Paket liegt an der Wand und reicht innen bis $r_{\mathrm{i}}$

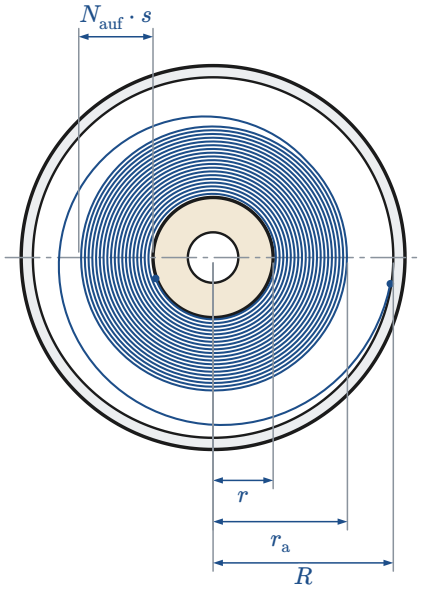



**Abb. 1.2** Aufgezogen: Das Paket liegt am Kern und reicht außen bis $r_{\mathrm{a}}$

## Radius des Federkerns (Richtwert)

(1.1) NÄHERUNG GESELLE

$$r \approx \frac{R}{3}$$

| | | |
|---|---|---|
| $r$ | Radius (des Federkerns) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | $\mathrm{mm}$ |

Der Federkern nimmt etwa ein Drittel des Innenradius ein. Ein dünnerer Kern brächte mehr Umgänge, biegt die innerste Windung aber zu scharf.

**Gilt:** Richtwert für Klein- und Großuhren.

**Gut zu wissen:** Zweite Bedingung: Der Kernradius soll je nach Federwerkstoff mindestens etwa das 10- bis 16-Fache der Klingenstärke betragen (Richtwert). Ein dünnerer Kern biegt die Feder zu scharf; sie ermüdet am Kern und bricht dort.

BEISPIEL Ein Federhaus hat innen 11,4 mm Durchmesser, also 5,7 mm Radius. Wie groß soll der Radius des Federkerns sein?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{R}{3} \\ &= \frac{5{,}7\,\mathrm{mm}}{3} \\ &= 1{,}9\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kern bekommt rund 1,9 mm Radius, also 3,8 mm Durchmesser. Mit einer Klinge von 0,12 mm ist das knapp das 16-Fache der Klingenstärke.

## Windungen der aufgezogenen Feder

(1.2) MEISTER

$$N_{\text{auf}} = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{l \cdot s}{\pi}} - r}{s}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\text{auf}}$ | Windungen der aufgezogenen Feder (am Kern) | 1 |
| $r$ | Radius (des Federkerns) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |

Die Wurzel ist der Außenradius $r_{\text{a}}$ des aufgezogenen Pakets. Er folgt aus der Flächengleichheit $l \cdot s = \pi \cdot (r_{\text{a}}^2 - r^2)$. Die Paketbreite $r_{\text{a}} - r$ geteilt durch die Klingenstärke ergibt die Windungen.

**Gilt:** Windungen liegen dicht aneinander; Federenden, Haken und Zaum nicht mitgerechnet.

BEISPIEL Eine Zugfeder von 420 mm Länge und 0,12 mm Klingenstärke liegt aufgezogen um einen Kern mit 1,9 mm Radius. Wie viele Windungen hat das Paket?

Gegeben: $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}; \quad l = 420\,\mathrm{mm}; \quad s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\text{auf}} &= \frac{\sqrt{r^2 + \frac{l \cdot s}{\pi}} - r}{s} \\ &= \frac{\sqrt{(1{,}9\,\mathrm{mm})^2 + \frac{420\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}{\pi}} - 1{,}9\,\mathrm{mm}}{0{,}12\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 21{,}1 \end{aligned}$$

Rund 21 Windungen. Das Paket reicht bis zum Radius 4,43 mm.

## Windungen der abgelaufenen Feder

(1.3) MEISTER

$$N_{\text{ab}} = \frac{R - \sqrt{R^2 - \dfrac{l \cdot s}{\pi}}}{s}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\text{ab}}$ | Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand) | 1 |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | mm |
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | mm |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | mm |

Hier ist die Wurzel der Innenradius $r_{\text{i}}$ des Pakets an der Wand, wieder aus der Flächengleichheit: $l \cdot s = \pi \cdot (R^2 - r_{\text{i}}^2)$.

**Gilt:** Windungen liegen dicht an der Wand. Die Feder muss ins Federhaus passen: $l \cdot s$ kleiner als $\pi \cdot (R^2 - r^2)$.

BEISPIEL Dieselbe Feder (420 mm lang, 0,12 mm stark) liegt abgelaufen an der Wand eines Federhauses mit 5,7 mm Innenradius.

Gegeben: $R = 5{,}7\,\text{mm}$; $l = 420\,\text{mm}$; $s = 0{,}12\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\text{ab}} &= \frac{R - \sqrt{R^2 - \dfrac{l \cdot s}{\pi}}}{s} \\ &= \frac{5{,}7\,\text{mm} - \sqrt{(5{,}7\,\text{mm})^2 - \dfrac{420\,\text{mm} \cdot 0{,}12\,\text{mm}}{\pi}}}{0{,}12\,\text{mm}} \\ &\approx 13{,}7 \end{aligned}$$

Knapp 14 Windungen. Innen endet das Paket beim Radius 4,06 mm.

## Umgänge des Federhauses

(1.4) GESELLE

$$N = N_{\text{auf}} - N_{\text{ab}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Umgänge (des Federhauses) | 1 |
| $N_{\text{auf}}$ | Windungen der aufgezogenen Feder (am Kern) | 1 |
| $N_{\text{ab}}$ | Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand) | 1 |

Beim Ablaufen wandern die Windungen vom Kern an die Wand. Das Federhaus dreht sich dabei um so viele Umgänge, wie die Feder aufgezogen mehr Windungen hat als abgelaufen.

**Gilt:** Windungen in beiden Lagen im Federhaus gezählt. Der Wert ist die obere Grenze: Die Federenden arbeiten nicht mit, in der Praxis fehlt bis zu einem Umgang.

BEISPIEL Die Feder aus den beiden Beispielen davor hat aufgezogen 21,1 und abgelaufen 13,7 Windungen.

Gegeben: $N_{\text{auf}} = 21{,}1$; $N_{\text{ab}} = 13{,}7$

$$\begin{aligned} N &= N_{\text{auf}} - N_{\text{ab}} \\ &= 21{,}1 - 13{,}7 \\ &= 7{,}4 \end{aligned}$$

Das Federhaus macht rechnerisch 7,4 Umgänge.

## Günstigste Federlänge

(1.5) MEISTER

$$l = \frac{\pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)}{2 \cdot s}$$

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | $\mathrm{mm}$ |
| $r$ | Radius (des Federkerns) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |

Die meisten Umgänge liefert die Feder, die genau die Hälfte der freien Fläche zwischen Kern und Wand bedeckt. Eine kürzere Feder hat zu wenige Windungen, eine längere lässt ihnen keinen Platz zum Abwickeln.

**Gilt:** Windungen dicht liegend; Zuschlag für die Befestigung der Enden nicht enthalten.

**Gut zu wissen:** Das Maximum ist flach (Abb. 1.3). Im Beispiel kostet eine um 20 % kürzere oder längere Feder nur rund 3 % der Umgänge. Auf den Millimeter kommt es bei der Länge also nicht an, auf die Klingenstärke dagegen sehr (Abschnitt 1.2).

BEISPIEL Welche Länge ist für eine Klinge von 0,12 mm im Federhaus mit 5,7 mm Innenradius und 1,9 mm Kernradius am günstigsten?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$l = \frac{\pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)}{2 \cdot s}$$

$$= \frac{\pi \cdot \left((5{,}7\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}9\,\mathrm{mm})^2\right)}{2 \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}$$

$$\approx 378\,\mathrm{mm}$$

Rund 378 mm. Die Feder mit 420 mm aus den Beispielen davor ist also etwas zu lang, verliert dadurch aber kaum Umgänge.

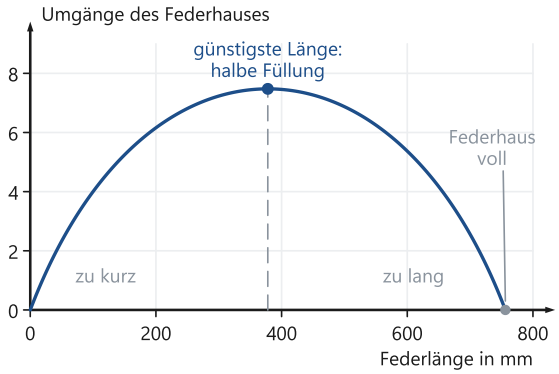



**Abb. 1.3** Umgänge abhängig von der Federlänge, gerechnet für $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$, $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$, $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

## Füllgrad des Federhauses

(1.6) MEISTER

$$k_\mathrm{F} = \frac{l \cdot s}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Der Füllgrad zeigt, ob eine vorhandene oder bestellte Feder zum Federhaus passt. Am günstigsten ist 0,5.

**Gilt:** Windungen dicht liegend.

| | | |
|---|---|---|
| $k_\mathrm{F}$ | Füllgrad: Anteil der freien Fläche, den die Feder bedeckt | 1 |
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | $\mathrm{mm}$ |
| $r$ | Radius (des Federkerns) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Wie stark füllt die Feder mit 420 mm Länge und 0,12 mm Klingenstärke das Federhaus (Innenradius 5,7 mm, Kernradius 1,9 mm)?

Gegeben: $l = 420\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} k_\mathrm{F} &= \frac{l \cdot s}{\pi \cdot (R^2 - r^2)} \\ &= \frac{420\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot \left((5{,}7\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}9\,\mathrm{mm})^2\right)} \\ &\approx 0{,}56 \end{aligned}$$

Die Feder bedeckt 56 % der freien Fläche, etwas mehr als die günstige Hälfte.

## Trennkreis bei günstigster Länge

(1.7) MEISTER

$$\rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Bei günstigster Länge reicht das aufgezogene Paket genau so weit nach außen, wie das abgelaufene nach innen reicht. Dieser Trennkreis teilt die freie Fläche in zwei gleich große Hälften.

**Gilt:** Feder mit günstigster Länge, Füllgrad 0,5.

| | | |
|---|---|---|
| $\rho$ | Radius (des Trennkreises) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | $\mathrm{mm}$ |
| $r$ | Radius (des Federkerns) | $\mathrm{mm}$ |

**Gut zu wissen:** Prüfen am offenen Federhaus: Reicht die abgelaufene Feder weiter nach innen als bis zum Trennkreis, ist sie zu lang. Bleibt sie weiter außen, ist sie zu kurz.

BEISPIEL Wo liegt der Trennkreis im Federhaus mit 5,7 mm Innenradius und 1,9 mm Kernradius?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(5{,}7\,\mathrm{mm})^2 + (1{,}9\,\mathrm{mm})^2}{2}} \\ &\approx 4{,}25\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Beim Radius 4,25 mm. Das abgelaufene Paket ist dann 1,45 mm breit, das aufgezogene 2,35 mm.

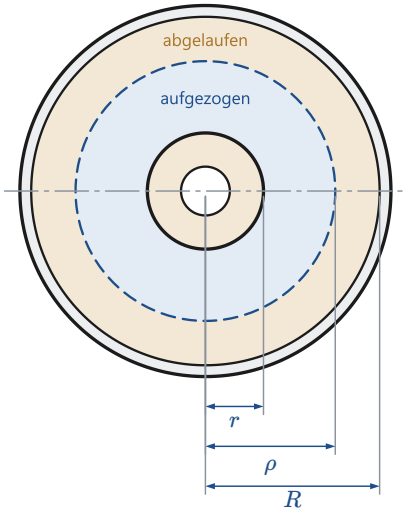



**Abb. 1.4** Der Trennkreis $\rho$ halbiert die freie Fläche: innen liegt die aufgezogene, außen die abgelaufene Feder

## Größte Zahl der Umgänge

(1.8) MEISTER

$$N_{\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{s}$$

UMGESTELLT $$s = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{N_{\max}}$$

So viele Umgänge sind mit der günstigsten Federlänge möglich. Umgestellt liefert die Formel die Klingenstärke für eine verlangte Zahl von Umgängen.

**Gilt:** Feder mit günstigster Länge (Füllgrad 0,5), Windungen dicht liegend. Theoretische Obergrenze wie bei Formel (1.4).

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\max}$ | größtmögliche Umgänge des Federhauses | 1 |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | mm |
| $r$ | Radius (des Federkerns) | mm |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | mm |

BEISPIEL Wie viele Umgänge schafft das Federhaus (Innenradius 5,7 mm, Kernradius 1,9 mm) mit einer Klinge von 0,12 mm höchstens?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\text{mm}$; $r = 1{,}9\,\text{mm}$; $s = 0{,}12\,\text{mm}$

$$N_{\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{s} = \frac{\sqrt{2 \cdot \left((5{,}7\,\text{mm})^2 + (1{,}9\,\text{mm})^2\right)} - 5{,}7\,\text{mm} - 1{,}9\,\text{mm}}{0{,}12\,\text{mm}} \approx 7{,}5$$

Rund 7,5 Umgänge. Mit einer Klinge von 0,10 mm wären es 9, mit 0,14 mm nur 6,4.

## Richtwerte für den Kernradius $r = \frac{1}{3} R$ und günstigste Federlänge

| Größe | Wert |
|---|---|
| Radius des Trennkreises | $\rho = 0{,}745 \cdot R$ |
| Breite des abgelaufenen Pakets | $0{,}255 \cdot R$, rund ein Viertel des Innenradius |
| Breite des aufgezogenen Pakets | $0{,}412 \cdot R$ |
| günstigste Federlänge | $l = 1{,}40 \cdot \frac{R^2}{s}$ |
| größte Zahl der Umgänge | $N_{\max} = 0{,}157 \cdot \frac{R}{s}$ |

Aus den Formeln (1.5), (1.7) und (1.8) gerechnet. Die Werte gelten nur, wenn der Kern ein Drittel des Innenradius misst.

### Federlänge aus den Windungen der abgelaufenen Feder

(1.9) GESELLE

$$l = \pi \cdot (R + r_\mathrm{i}) \cdot N_\mathrm{ab}$$

Die Länge ist der mittlere Umfang des Pakets mal die Zahl der Windungen. So lässt sich die Federlänge bestimmen, ohne die Feder herauszunehmen. Die Klingenstärke folgt aus der Paketbreite: $s = (R - r_\mathrm{i}) : N_\mathrm{ab}$.

**Gilt:** Windungen liegen dicht an der Wand. Das Stück vom Paket zum Kern ist nicht mitgerechnet; die wirkliche Feder ist um etwa eine innere Windung länger.

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Innenradius (des Federhauses) | $\mathrm{mm}$ |
| $r_\mathrm{i}$ | Innenradius des abgelaufenen Federpakets | $\mathrm{mm}$ |
| $N_\mathrm{ab}$ | Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand) | 1 |

BEISPIEL In einem Federhaus mit 5,7 mm Innenradius liegt die abgelaufene Feder mit 13,75 Windungen an der Wand. Der innere Rand des Pakets hat 4,05 mm Radius.

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 4{,}05\,\mathrm{mm}$; $N_\mathrm{ab} = 13{,}75$

$$\begin{aligned} l &= \pi \cdot (R + r_\mathrm{i}) \cdot N_\mathrm{ab} \\ &= \pi \cdot (5{,}7\,\mathrm{mm} + 4{,}05\,\mathrm{mm}) \cdot 13{,}75 \\ &\approx 421\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Im Paket liegen rund 421 mm Feder. Die Klingenstärke beträgt 1,65 mm geteilt durch 13,75, also 0,12 mm.

**Merksatz:** Die Feder soll die halbe freie Fläche des Federhauses füllen. Mehr Umgänge gibt es dann nur noch mit einer dünneren Klinge.

## 1.2 Drehmoment und Energie der Zugfeder

Die aufgezogene Feder will sich zurückbiegen und dreht dabei das Federhaus. Ihr Drehmoment hängt vor allem von der Klingenstärke ab, die gespeicherte Energie vom Volumen der Feder und vom Werkstoff.

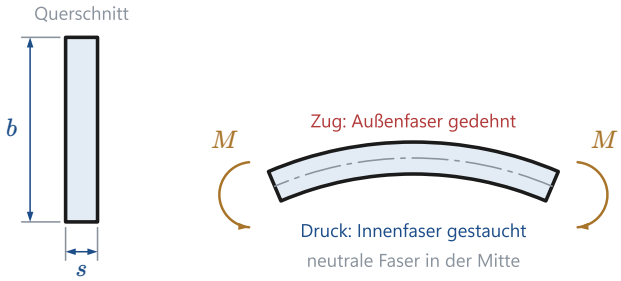



**Abb. 1.5** Klingenquerschnitt mit Höhe $b$ und Stärke $s$ (Stärke übertrieben); beim Biegen wird die Außenseite gedehnt, die Innenseite gestaucht

## Drehmoment der Zugfeder

(1.10) MEISTER

$$M = \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot \varphi}{12 \cdot l}$$

Das Drehmoment wächst mit dem Verdrehwinkel, mit der Klingenhöhe und mit der dritten Potenz der Klingenstärke. Eine längere Feder ist weicher. Eine Umdrehung entspricht $\varphi = 2\pi$.

**Gilt:** elastischer Bereich, Rechteckquerschnitt, Windungen berühren sich nicht und reiben nicht aneinander. Der Winkel zählt von der entspannten Form der Feder außerhalb des Federhauses an.

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | Drehmoment (der Feder) | $\mathrm{N \cdot mm}$ |
| $E$ | Elastizitätsmodul (des Federwerkstoffs) | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |
| $b$ | Klingenhöhe (Breite der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $\varphi$ | Verdrehwinkel (gegenüber der entspannten Form, im Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |

**Aber Vorsicht:** Im Federhaus liegen Windungen aneinander, am Kern und an der Wand. Sie arbeiten nicht mit und reiben. Die wirkliche Kennlinie ist deshalb keine Gerade (Abb. 1.6). Die Formel zeigt, wovon das Drehmoment abhängt; das Drehmoment einer bestimmten Feder wird gemessen.

BEISPIEL Eine Zugfeder ($E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, Höhe 1,3 mm, Stärke 0,12 mm, Länge 420 mm) ist gegenüber ihrer entspannten Form um 12 Umdrehungen gespannt, das sind 75,4 rad.

Gegeben: $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $\varphi = 75{,}4\,\mathrm{rad}$; $l = 420\,\mathrm{mm}$

$$M = \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot \varphi}{12 \cdot l}$$

$$= \frac{200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}12\,\mathrm{mm})^3 \cdot 75{,}4\,\mathrm{rad}}{12 \cdot 420\,\mathrm{mm}}$$

$$\approx 6{,}72\,\mathrm{N \cdot mm}$$

Rund 6,7 $\mathrm{N \cdot mm}$, eine übliche Größenordnung für das Federhaus einer Herrenarmbanduhr.

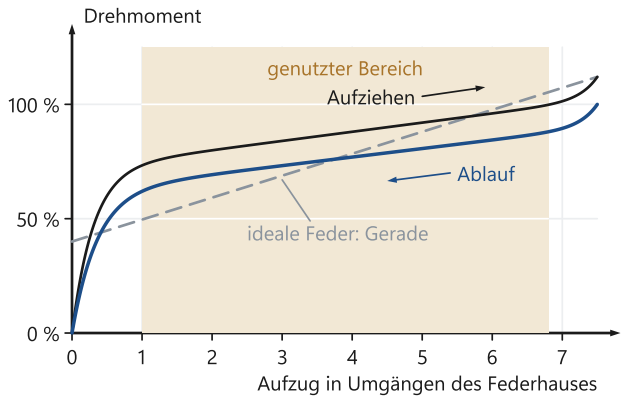



**Abb. 1.6** Drehmoment im Federhaus beim Aufziehen und beim Ablauf (Prinzipskizze, keine Messkurve); 100 % ist das Drehmoment, mit dem der Ablauf bei Vollaufzug beginnt

Abb. 1.6 zeigt den Verlauf im Federhaus. Ganz oben und ganz unten ändert sich das Drehmoment stark, dazwischen fällt es nur langsam. Genutzt wird der flache Teil. Beim Aufziehen liegt die Kurve höher als beim Ablauf; der Unterschied ist die Reibung zwischen den Windungen. Federn mit S-Form (Abb. 1.8) sind in entspanntem Zustand gegen ihre spätere Wickelrichtung gebogen. Sie werden über die ganze Länge gleichmäßiger beansprucht und geben ein gleichmäßigeres Drehmoment ab als Federn mit einfacher Spiralform.

## Größtes Drehmoment aus der zulässigen Biegespannung

(1.11) MEISTER

$$M_{\max} = \frac{\sigma_{\text{zul}} \cdot b \cdot s^2}{6}$$

| | | |
|---|---|---|
| $M_{\max}$ | größtes elastisch übertragbares Drehmoment | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $\sigma_{\text{zul}}$ | zulässige Biegespannung (Elastizitätsgrenze des Federwerkstoffs) | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |
| $b$ | Klingenhöhe (Breite der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |

Mehr Drehmoment hält die Klinge nicht elastisch aus: Die Randfaser erreicht die zulässige Spannung. Der Bruch $\frac{b \cdot s^2}{6}$ ist das Widerstandsmoment des Rechtecks (Kapitel XL 2).

**Gilt:** Rechteckquerschnitt, reine Biegung. Über der Elastizitätsgrenze verformt sich die Feder bleibend, sie setzt sich.

BEISPIEL Welches Drehmoment überträgt eine Klinge von 1,3 mm Höhe und 0,12 mm Stärke bei einer zulässigen Biegespannung von $2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$?

Gegeben: $\sigma_{\text{zul}} = 2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{\sigma_{\text{zul}} \cdot b \cdot s^2}{6} \\ &= \frac{2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}12\,\mathrm{mm})^2}{6} \\ &= 7{,}8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Höchstens 7,8 $\mathrm{N \cdot mm}$. Das Beispiel davor liegt mit 6,72 $\mathrm{N \cdot mm}$ darunter.

### Federwerkstoffe für Zugfedern (Richtwerte)

| Werkstoff | $E$ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ | $\sigma_{\text{zul}}$ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |
|---|---|---|
| Federstahl (Kohlenstoffstahl, gehärtet und angelassen) | 206 000 … 210 000 | 1 500 … 2 000 |
| Kobalt-Nickel-Chrom-Legierung (zum Beispiel Nivaflex) | 200 000 … 225 000 | 2 200 … 2 800 |

Grobe Richtwerte zum Überschlagen. Die zulässige Spannung hängt stark von Legierung, Walzgrad und Wärmebehandlung ab. Maßgeblich sind die Angaben des Federherstellers. Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit weiterer Werkstoffe stehen in Abschnitt XL 2.7.

## Einfluss der Klingenstärke

(1.12) GESELLE

$$M_2 = M_1 \cdot \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^3$$

| | | |
|---|---|---|
| $M_2$ | Drehmoment der Ersatzfeder | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $M_1$ | Drehmoment der Originalfeder | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $s_2$ | Klingenstärke der Ersatzfeder | $\mathrm{mm}$ |
| $s_1$ | Klingenstärke der Originalfeder | $\mathrm{mm}$ |

Das Drehmoment ändert sich mit der dritten Potenz der Klingenstärke. Schon ein Hundertstelmillimeter macht sich deutlich bemerkbar.

**Gilt:** gleiche Klingenhöhe, gleiche Länge, gleicher Werkstoff, gleicher Verdrehwinkel.

**Aber Vorsicht:** Eine stärkere Klinge füllt das Federhaus mehr und schafft weniger Umgänge. Darum bei einer anderen Klingenstärke auch Länge und Umgänge nach Abschnitt 1.1 nachrechnen.

BEISPIEL Statt einer Feder mit 0,12 mm Klingenstärke und 6,0 $\mathrm{N \cdot mm}$ wird eine mit 0,125 mm eingesetzt. Wie groß wird das Drehmoment?

Gegeben: $M_1 = 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $s_2 = 0{,}125\,\mathrm{mm}$; $s_1 = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 \cdot \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^3 \\ &= 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot \left(\frac{0{,}125\,\mathrm{mm}}{0{,}12\,\mathrm{mm}}\right)^3 \\ &\approx 6{,}8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Rund 6,8 $\mathrm{N \cdot mm}$. Die nur 0,005 mm stärkere Klinge bringt 13 % mehr Drehmoment.

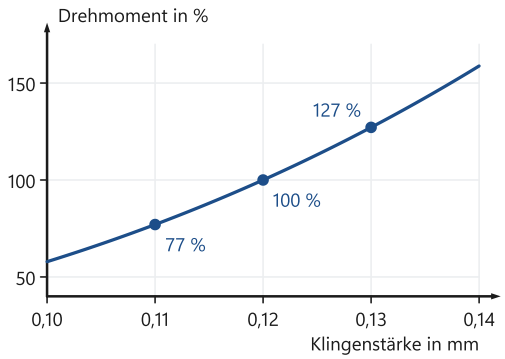



**Abb. 1.7** Das Drehmoment wächst mit der dritten Potenz der Klingenstärke (100 % bei $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$)

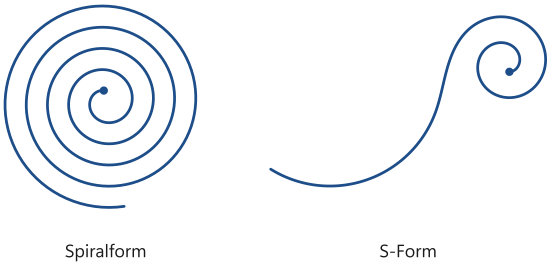



**Abb. 1.8** Entspannte Zugfedern: einfache Spiralform und S-Form mit Gegenkrümmung

## Ersatzfeder mit gleicher Wirkung

(1.13) GESELLE

$$b_1 \cdot s_1^3 = b_2 \cdot s_2^3$$

UMGESTELLT $\quad s_2 = s_1 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b_1}{b_2}}$

Ist die Originalfeder nicht lieferbar, gleicht eine etwas stärkere Klinge eine geringere Höhe aus und umgekehrt. Das Drehmoment bleibt gleich, wenn das Produkt aus Höhe und dritter Potenz der Stärke gleich bleibt.

**Gilt:** gleiche Länge, gleicher Werkstoff. Die Ersatzfeder darf nicht höher sein, als das Federhaus zulässt.

| | | |
|---|---|---|
| $b_1$ | Klingenhöhe der Originalfeder | mm |
| $s_1$ | Klingenstärke der Originalfeder | mm |
| $b_2$ | Klingenhöhe der Ersatzfeder | mm |
| $s_2$ | Klingenstärke der Ersatzfeder | mm |

BEISPIEL Die Originalfeder misst 1,50 mm × 0,12 mm. Lieferbar ist nur eine Feder mit 1,40 mm Höhe. Welche Klingenstärke gibt dasselbe Drehmoment?

Gegeben: $s_1 = 0{,}12\,\mathrm{mm}; \quad b_1 = 1{,}50\,\mathrm{mm}; \quad b_2 = 1{,}40\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} \\ &= 0{,}12\,\mathrm{mm} \cdot \sqrt[3]{\frac{1{,}50\,\mathrm{mm}}{1{,}40\,\mathrm{mm}}} \\ &\approx 0{,}1228\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rechnerisch knapp 0,123 mm. Aus der Liste wählt man die nächste Stärke, hier 0,125 mm, und nimmt etwas mehr Drehmoment in Kauf.

## Gespeicherte Energie der idealen Feder

(1.14) MEISTER

$$W = \frac{M \cdot \varphi}{2}$$

Weil das Drehmoment vom entspannten Zustand an gleichmäßig ansteigt, zählt im Mittel das halbe Enddrehmoment. Es gilt $1\,\mathrm{N \cdot mm} = 1\,\mathrm{mJ}$.

**Gilt:** ideale Feder mit gerader Kennlinie nach Formel (1.10).

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Arbeit (in der Feder gespeicherte Energie, Spannarbeit) | $\mathrm{mJ}$ |
| $M$ | Drehmoment (der Feder) | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $\varphi$ | Verdrehwinkel (gegenüber der entspannten Form, im Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Die Feder aus dem Beispiel zu Formel (1.10) hat bei 75,4 rad ein Drehmoment von 6,72 $\mathrm{N \cdot mm}$.

Gegeben: $M = 6{,}72\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\varphi = 75{,}4\,\mathrm{rad}$

$$W = \frac{M \cdot \varphi}{2} = \frac{6{,}72\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 75{,}4\,\mathrm{rad}}{2} \approx 253\,\mathrm{mJ}$$

In der Feder stecken rund 253 mJ, also 0,25 J. Nutzbar ist davon nur der Teil, den das Federhaus beim Ablauf abgibt (Formel 3.16).

## Größte speicherbare Energie

(1.15) VERTIEFUNG

$$W_{\max} = \frac{\sigma_{\mathrm{zul}}^2 \cdot b \cdot s \cdot l}{6 \cdot E}$$

Das Produkt $b \cdot s \cdot l$ ist das Volumen der Feder. Die speicherbare Energie wächst also mit dem Federvolumen und mit $\sigma_{\mathrm{zul}}^2 : E$. Darum bekommt das Federhaus im Werk so viel Platz wie möglich, und darum lohnen sich Werkstoffe mit hoher Elastizitätsgrenze.

**Gilt:** ideale Feder, über die ganze Länge bis zur zulässigen Spannung gebogen. Obere Grenze; wirkliche Federn erreichen sie nicht.

| | | |
|---|---|---|
| $W_{\max}$ | größte elastisch speicherbare Energie | $\mathrm{mJ}$ |
| $\sigma_{\mathrm{zul}}$ | zulässige Biegespannung | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |
| $b$ | Klingenhöhe (Breite der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (Dicke der Feder) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Länge (der Zugfeder) | $\mathrm{mm}$ |
| $E$ | Elastizitätsmodul (des Federwerkstoffs) | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |

BEISPIEL Feder 1,3 mm × 0,12 mm × 420 mm, $\sigma_{\mathrm{zul}} = 2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, $E = 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$.

Gegeben: $\sigma_{\mathrm{zul}} = 2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $l = 420\,\mathrm{mm}$; $E = 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$

$$W_{\max} = \frac{\sigma_{\mathrm{zul}}^2 \cdot b \cdot s \cdot l}{6 \cdot E} = \frac{\left(2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}\right)^2 \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm} \cdot 420\,\mathrm{mm}}{6 \cdot 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}} \approx 341\,\mathrm{mJ}$$

Höchstens rund 0,34 J. Das ist die Energie, mit der man 35 g einen Meter hoch hebt.

### Abgegebene Arbeit beim Ablauf

(1.16) GESELLE

$$W = 2 \cdot \pi \cdot N \cdot M_{\mathrm{m}}$$

Arbeit ist Drehmoment mal Drehwinkel; je Umgang dreht sich das Federhaus um $2\pi$. Das mittlere Drehmoment liest man aus der gemessenen Ablaufkurve ab.

**Gilt:** Drehmoment über den Ablauf gemittelt.

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Arbeit (vom Federhaus beim Ablauf abgegeben) | $\mathrm{mJ}$ |
| $N$ | Umgänge (des Federhauses) | 1 |
| $M_{\mathrm{m}}$ | mittleres Drehmoment über diese Umgänge | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |

BEISPIEL Ein Federhaus gibt über 6,5 Umgänge im Mittel 6,0 $\mathrm{N \cdot mm}$ ab.

Gegeben: $N = 6{,}5; \quad M_{\mathrm{m}} = 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} W &= 2 \cdot \pi \cdot N \cdot M_{\mathrm{m}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 6{,}5 \cdot 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm} \\ &\approx 245\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

Das Werk erhält rund 245 mJ, knapp ein Viertel Joule für fast zwei Tage Gang.

### Wirkungsgrad der Zugfeder

(1.17) MEISTER

$$\eta_{\mathrm{F}} = \frac{W_{\mathrm{ab}}}{W_{\mathrm{auf}}}$$

Die Reibung zwischen den Windungen und an der Wand frisst einen Teil der Aufzugsarbeit. Saubere Klingen und das richtige Fett im Federhaus halten den Verlust klein.

**Gilt:** beide Arbeiten über dieselben Umgänge gemessen.

| | | |
|---|---|---|
| $\eta_{\mathrm{F}}$ | Wirkungsgrad der Feder im Federhaus | 1 |
| $W_{\mathrm{ab}}$ | beim Ablauf abgegebene Arbeit (Fläche unter der Ablaufkurve) | $\mathrm{mJ}$ |
| $W_{\mathrm{auf}}$ | beim Aufziehen aufgewendete Arbeit (Fläche unter der Aufzugskurve) | $\mathrm{mJ}$ |

BEISPIEL Das Federhaus aus dem Beispiel davor gibt beim Ablauf 245 mJ ab. Beim Aufziehen wurden über dieselben Umgänge 288 mJ aufgewendet.

Gegeben: $W_{\mathrm{ab}} = 245\,\mathrm{mJ}; \quad W_{\mathrm{auf}} = 288\,\mathrm{mJ}$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{F}} &= \frac{W_{\mathrm{ab}}}{W_{\mathrm{auf}}} \\ &= \frac{245\,\mathrm{mJ}}{288\,\mathrm{mJ}} \\ &= 0{,}85 \end{aligned}$$

Die Feder gibt 85 % der Aufzugsarbeit wieder ab; 15 % gehen als Reibung verloren.

**Merksatz:** Doppelte Klingenhöhe, doppeltes Drehmoment. Doppelte Klingenstärke, achtfaches Drehmoment.

## 1.3 Gangdauer

Die Gangdauer ist die Zeit, die das Werk mit einem vollen Aufzug läuft. Sie ergibt sich aus den Umgängen des Federhauses und der Zeit, die ein Umgang dauert. Die Gangreserve ist der Teil der Gangdauer, der noch vor dem Werk liegt. Wie in Kapitel 2 trägt die Zähnezahl eines Triebes einen Strich und den Index seiner Welle.

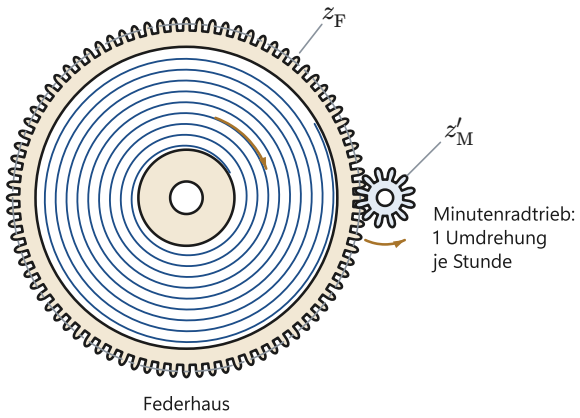



**Abb. 1.9** Das Federhaus mit $z_F$ Zähnen treibt den Minutenradtrieb mit $z'_M$ Zähnen

## Umlaufzeit des Federhauses

(1.18) GESELLE

$$t_F = \frac{z_F}{z'_M} \cdot t_M$$

Das Federhaus greift in den Trieb des Minutenrads, das sich einmal je Stunde dreht. Hat das Federhaus siebenmal so viele Zähne wie der Trieb, dauert ein Umgang sieben Stunden.

**Gilt:** Federhaus greift direkt in den Trieb eines Rades, das einmal je Stunde umläuft. Dreht das angetriebene Rad anders, dessen Umlaufzeit einsetzen.

| | | |
|---|---|---|
| $t_F$ | Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang) | h |
| $z_F$ | Zähnezahl des Federhauses | 1 |
| $z'_M$ | Zähnezahl des Minutenradtriebs | 1 |
| $t_M$ | Umlaufzeit des Minutenrads (1 h) | h |

BEISPIEL Ein Federhaus mit 84 Zähnen treibt einen Minutenradtrieb mit 12 Zähnen.

Gegeben: $z_F = 84$; $z'_M = 12$; $t_M = 1\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_F &= \frac{z_F}{z'_M} \cdot t_M \\ &= \frac{84}{12} \cdot 1\,\mathrm{h} \\ &= 7\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Das Federhaus braucht 7 Stunden für einen Umgang.

## Gangdauer aus den Umgängen des Federhauses

(1.19) GESELLE

$$t_\mathrm{G} = N \cdot t_\mathrm{F}$$

UMGESTELLT $N = \dfrac{t_\mathrm{G}}{t_\mathrm{F}}$

Mit den Umgängen, die das Federhaus wirklich abgibt, erhält man die Gangdauer. Umgestellt liefert die Formel die Umgänge, die eine verlangte Gangdauer braucht.

**Gilt:** gleichmäßig laufendes Werk; Umgänge vom Vollaufzug bis zum Stillstand. Für die nutzbare Gangdauer nur die Umgänge zählen, in denen das Drehmoment für eine ausreichende Amplitude genügt.

| | | |
|---|---|---|
| $t_\mathrm{G}$ | Gangdauer | h |
| $N$ | Umgänge (des Federhauses) | 1 |
| $t_\mathrm{F}$ | Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang) | h |

**Gut zu wissen:** Die Gangreserve ist die Gangdauer, die nach einer bestimmten Laufzeit noch übrig ist: restliche Umgänge mal Umlaufzeit des Federhauses.

BEISPIEL Das Federhaus aus dem Beispiel davor (7 h je Umgang) gibt 6,5 nutzbare Umgänge ab.

Gegeben: $N = 6{,}5; \quad t_\mathrm{F} = 7\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{G} &= N \cdot t_\mathrm{F} \\ &= 6{,}5 \cdot 7\,\mathrm{h} \\ &= 45{,}5\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Die Uhr läuft 45,5 Stunden. Nach 24 Stunden bleiben 21,5 Stunden Gangreserve.

## Umlaufzeit des Federhauses mit Beisatzrad

(1.20) GESELLE

$$t_\mathrm{F} = \frac{z_\mathrm{F} \cdot z_\mathrm{B}}{z'_\mathrm{B} \cdot z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M}$$

Für lange Gangdauern sitzt zwischen Federhaus und Minutenrad ein Beisatzrad. Im Zähler stehen die treibenden Räder, im Nenner die getriebenen Triebe.

**Gilt:** Federhaus treibt den Beisatzradtrieb, das Beisatzrad den Minutenradtrieb; Minutenrad einmal je Stunde.

| | | |
|---|---|---|
| $t_\mathrm{F}$ | Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang) | h |
| $z_\mathrm{F}$ | Zähnezahl des Federhauses | 1 |
| $z_\mathrm{B}$ | Zähnezahl des Beisatzrads | 1 |
| $z'_\mathrm{B}$ | Zähnezahl des Beisatzradtriebs | 1 |
| $z'_\mathrm{M}$ | Zähnezahl des Minutenradtriebs | 1 |
| $t_\mathrm{M}$ | Umlaufzeit des Minutenrads (1 h) | h |

BEISPIEL Achttagewerk: Federhaus 84 Zähne, Beisatzradtrieb 12, Beisatzrad 72, Minutenradtrieb 12.

Gegeben: $z_\mathrm{F} = 84; \quad z_\mathrm{B} = 72; \quad z'_\mathrm{B} = 12; \quad z'_\mathrm{M} = 12; \quad t_\mathrm{M} = 1\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{F} &= \frac{z_\mathrm{F} \cdot z_\mathrm{B}}{z'_\mathrm{B} \cdot z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M} \\ &= \frac{84 \cdot 72}{12 \cdot 12} \cdot 1\,\mathrm{h} \\ &= 42\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Ein Umgang dauert 42 Stunden. Für acht Tage, also 192 Stunden, braucht das Werk nach Formel (1.19) rund 4,6 Umgänge.

Im Automatikwerk ist das äußere Federende nicht eingehängt. Es trägt eine Schleppfeder (Gleitzaum), die sich gegen die Federhauswand spreizt und durchrutscht, sobald die Feder voll aufgezogen ist. Ihr Gleitmoment legt fest, wie viel Drehmoment die Feder höchstens an das Werk abgibt. Rutscht die Schleppfeder zu früh, wird die Feder nie ganz aufgezogen und es fehlt Gangreserve. Hält sie zu fest, wird das Drehmoment zu groß und die Unruh prellt.

## 1.4 Gewichtsantrieb

Ein Gewicht zieht über Seil, Darmsaite oder Kette an der Walze. Sein Drehmoment bleibt über die ganze Gangdauer gleich; das macht den Gewichtsantrieb zum gleichmäßigsten Antrieb. Der Preis ist die Fallhöhe.

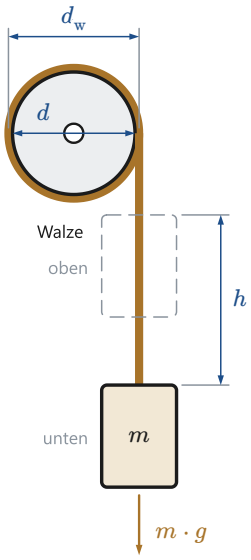



**Abb. 1.10** Gewicht direkt am Seil ($k = 1$): wirksamer Durchmesser $d_w$ bis Seilmitte, Fallhöhe $h$

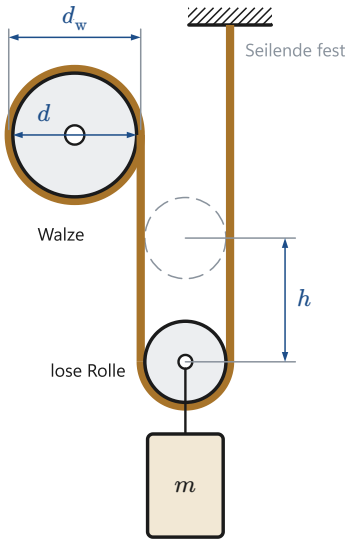



**Abb. 1.11** Gewicht an loser Rolle ($k = 2$): Das Seil läuft doppelt so weit ab, wie das Gewicht sinkt

### Wirksamer Walzendurchmesser

(1.21) GESELLE

$$d_w = d + d_S$$

Die Seilkraft greift in der Seilmitte an. Der Hebelarm ist deshalb der halbe Walzendurchmesser plus die halbe Seildicke.

**Gilt:** glatte Walze, Seil in einer Lage. Bei Walzen mit Rillen den Durchmesser bis zur Seilmitte messen.

| | | |
|---|---|---|
| $d_w$ | wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte) | $\mathrm{mm}$ |
| $d$ | Durchmesser (der Walze) | $\mathrm{mm}$ |
| $d_S$ | Dicke des Seils oder der Saite | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Auf einer Walze von 36 mm Durchmesser liegt ein Seil von 1,5 mm Dicke.

Gegeben: $d = 36\,\mathrm{mm}$; $d_S = 1{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} d_w &= d + d_S \\ &= 36\,\mathrm{mm} + 1{,}5\,\mathrm{mm} \\ &= 37{,}5\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Gerechnet wird mit 37,5 mm.

## Drehmoment an der Walze

(1.22) GESELLE

$$M = \frac{m \cdot g \cdot d_\mathrm{w}}{2 \cdot k}$$

Die Gewichtskraft wirkt am halben wirksamen Durchmesser. Hängt das Gewicht an einer losen Rolle, trägt jeder der beiden Stränge die halbe Last, an der Walze zieht also nur die halbe Gewichtskraft.

**Gilt:** Reibung der Rolle sowie Gewicht von Seil und Rolle vernachlässigt.

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | Drehmoment (an der Walze) | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $m$ | Masse (des Gewichts) | $\mathrm{kg}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung ($9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $d_\mathrm{w}$ | wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte) | $\mathrm{mm}$ |
| $k$ | Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle) | 1 |

BEISPIEL Eine Standuhr hat ein Gewicht von 4 kg an einer losen Rolle; wirksamer Walzendurchmesser 37,5 mm.

Gegeben: $m = 4\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $d_\mathrm{w} = 37{,}5\,\mathrm{mm}$; $k = 2$

$$\begin{aligned} M &= \frac{m \cdot g \cdot d_\mathrm{w}}{2 \cdot k} \\ &= \frac{4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 37{,}5\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 2} \\ &\approx 368\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Rund $368\,\mathrm{N \cdot mm}$, das sind $0{,}368\,\mathrm{N \cdot m}$ und damit etwa das Fünfzigfache einer Armbanduhr. Ohne Rolle wäre das Drehmoment doppelt so groß.

## Fallhöhe des Gewichts

(1.23) GESELLE

$$h = \frac{\pi \cdot d_\mathrm{w} \cdot N_\mathrm{W}}{k}$$

Je Umdrehung gibt die Walze einen Umfang Seil frei. Mit loser Rolle verteilt sich das Seil auf zwei Stränge, das Gewicht sinkt nur halb so weit.

**Gilt:** Seil in einer Lage auf der Walze.

| | | |
|---|---|---|
| $h$ | Höhe (Fallhöhe des Gewichts) | $\mathrm{mm}$ |
| $d_\mathrm{w}$ | wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte) | $\mathrm{mm}$ |
| $N_\mathrm{W}$ | Umdrehungen der Walze | 1 |
| $k$ | Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle) | 1 |

**Gut zu wissen:** Zum Platz im Gehäuse kommen die Höhe des Gewichts und bei loser Rolle die Rolle mit Haken hinzu.

BEISPIEL Die Walze der Standuhr (wirksamer Durchmesser 37,5 mm, lose Rolle) macht in acht Tagen 16 Umdrehungen.

Gegeben: $d_\mathrm{w} = 37{,}5\,\mathrm{mm}$; $N_\mathrm{W} = 16$; $k = 2$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\pi \cdot d_\mathrm{w} \cdot N_\mathrm{W}}{k} \\ &= \frac{\pi \cdot 37{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 16}{2} \\ &\approx 942\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Gewicht sinkt in acht Tagen um rund 94 cm. Ohne Rolle wären es 1,88 m, mehr als ein übliches Gehäuse hergibt.

### Gangdauer aus der Fallhöhe

(1.24) GESELLE

$$t_\mathrm{G} = \frac{k \cdot h}{\pi \cdot d_\mathrm{w}} \cdot t_\mathrm{W}$$

Der Bruch ist die Zahl der Walzenumdrehungen, die in die Fallhöhe passen. Die Umlaufzeit der Walze folgt wie beim Federhaus aus den Zähnezahlen (Formel 3.18).

**Gilt:** Seil in einer Lage. Als Fallhöhe zählt nur der Weg, den das Gewicht wirklich sinken kann, ohne die Höhe von Gewicht und Rolle.

| | | |
|---|---|---|
| $t_\mathrm{G}$ | Gangdauer | $\mathrm{h}$ |
| $k$ | Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle) | 1 |
| $h$ | Höhe (Fallhöhe des Gewichts) | $\mathrm{mm}$ |
| $d_\mathrm{w}$ | wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte) | $\mathrm{mm}$ |
| $t_\mathrm{W}$ | Umlaufzeit der Walze | $\mathrm{h}$ |

BEISPIEL In einem Wandregulator kann das Gewicht 1100 mm sinken. Die Walze (wirksamer Durchmesser 31 mm) dreht sich einmal in 12 Stunden. Wie lange läuft die Uhr mit loser Rolle?

Gegeben: $k = 2$; $h = 1100\,\mathrm{mm}$; $d_\mathrm{w} = 31\,\mathrm{mm}$; $t_\mathrm{W} = 12\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{G} &= \frac{k \cdot h}{\pi \cdot d_\mathrm{w}} \cdot t_\mathrm{W} \\ &= \frac{2 \cdot 1100\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot 31\,\mathrm{mm}} \cdot 12\,\mathrm{h} \\ &\approx 271\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Rund 271 Stunden, das sind gut 11 Tage. Ohne Rolle wären es nur 5,6 Tage; für ein Achttagewerk braucht dieses Gehäuse also die lose Rolle.

### Energie des Gewichts

(1.25) GESELLE

$$W = m \cdot g \cdot h$$

Die Energie hängt nur von Masse und Fallhöhe des Gewichts ab. Eine lose Rolle ändert daran nichts: halbe Kraft an der Walze, dafür doppelte Seillänge.

**Gilt:** Reibung der Rolle vernachlässigt.

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Arbeit (vom Gewicht abgegeben, Lageenergie) | $\mathrm{J}$ |
| $m$ | Masse (des Gewichts) | $\mathrm{kg}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung ($9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $h$ | Höhe (Fallhöhe des Gewichts) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Das Gewicht der Standuhr (4 kg) sinkt in acht Tagen um 0,942 m.

Gegeben: $m = 4\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 0{,}942\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} W &= m \cdot g \cdot h \\ &= 4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}942\,\mathrm{m} \\ &\approx 37{,}0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Die Standuhr setzt in acht Tagen 37 J um. Die Armbanduhr aus Abschnitt 1.2 kommt in knapp zwei Tagen mit 0,245 J aus.

**Merksatz:** Die lose Rolle halbiert Fallhöhe und Drehmoment, die Gangdauer bleibt. Für dasselbe Drehmoment braucht sie das doppelte Gewicht.

## 1.5 Schnecke und Kette

Die Schnecke gleicht das nachlassende Drehmoment der Zugfeder aus. Bei voller Feder zieht die Kette am kleinen Radius der Schnecke, bei fast abgelaufener Feder am großen. So bleibt das Drehmoment am Schneckenrad nahezu gleich.

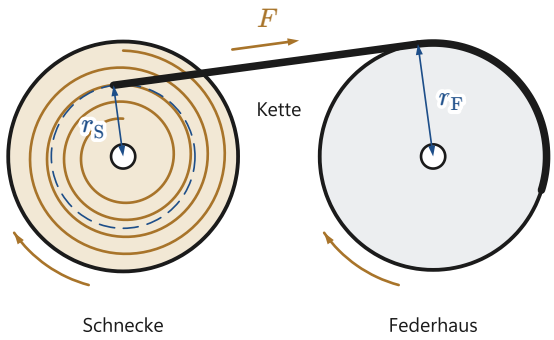



**Abb. 1.12** Schnecke und Federhaus von oben: Die Kette zieht mit der Kraft $F$ am Wirkradius $r_S$

### Drehmoment an der Schnecke

(1.26) VERTIEFUNG

$$M_S = \frac{M_F \cdot r_S}{r_F}$$

UMGESTELLT $r_S = \dfrac{M_S \cdot r_F}{M_F}$

Die Kette überträgt die Kraft $F = M_F : r_F$ vom Federhaus auf die Schnecke; dort wirkt sie am Radius $r_S$. Umgestellt liefert die Formel für jeden Aufzugszustand den Radius, an dem die Schnecke das verlangte Drehmoment abgibt.

**Gilt:** beide Radien bis zur Kettenmitte gemessen; Reibung von Kette und Zapfen vernachlässigt.

| | | |
|---|---|---|
| $M_S$ | Drehmoment an der Schnecke | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $M_F$ | Drehmoment des Federhauses im selben Augenblick | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $r_S$ | Wirkradius der Schnecke an der Stelle, an der die Kette abläuft | $\mathrm{mm}$ |
| $r_F$ | Radius des Federhauses (bis Kettenmitte) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Das Federhaus einer Taschenuhr mit Schnecke hat 9 mm Radius. Die Schnecke soll gleichbleibend $32\ \mathrm{N \cdot mm}$ abgeben. Voll aufgezogen liefert die Feder $48\ \mathrm{N \cdot mm}$. Welchen Radius braucht die Schnecke an dieser Stelle?

Gegeben: $M_S = 32\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $r_F = 9\,\mathrm{mm}$; $M_F = 48\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{M_S \cdot r_F}{M_F} \\ &= \frac{32\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 9\,\mathrm{mm}}{48\,\mathrm{N{\cdot}mm}} \\ &= 6{,}0\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

6 mm am dünnen Ende der Schnecke. Ist die Feder auf $32\ \mathrm{N \cdot mm}$ abgefallen, muss der Radius 9 mm betragen.

## 1.6 Leistung des Antriebs

Leistung ist Energie je Zeit. Eine mechanische Uhr braucht sehr wenig davon: Am Federhaus einer Armbanduhr sind es ein bis wenige Mikrowatt, an der Walze einer Standuhr einige zehn Mikrowatt.

## Mittlere Leistung

(1.27) GESELLE

$$P = \frac{W}{t_\mathrm{G}}$$

Zum Einsetzen die Gangdauer in Sekunden umrechnen: $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$. Dann gilt $1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}$.

**Gilt:** Mittelwert über die ganze Gangdauer.

| | | |
|---|---|---|
| $P$ | Leistung (des Antriebs) | $\mu\mathrm{W}$ |
| $W$ | Arbeit (in der Gangdauer abgegeben) | $\mathrm{mJ}$ |
| $t_\mathrm{G}$ | Gangdauer | $\mathrm{h}$ |

BEISPIEL Das Federhaus aus Abschnitt 1.2 gibt in 45,5 Stunden 245 mJ ab.

Gegeben: $W = 245\,\mathrm{mJ}$; $t_\mathrm{G} = 45{,}5\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{t_\mathrm{G}} \\ &= \frac{245\,\mathrm{mJ}}{45{,}5\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{0{,}245\,\mathrm{J}}{163\,800\,\mathrm{s}} \\ &\approx 1{,}5\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Rund 1,5 Mikrowatt. Eine Leuchtdiode mit 1 W braucht rund 700 000-mal so viel.

## Leistung aus Drehmoment und Umlaufzeit

(1.28) MEISTER

$$P = \frac{2 \cdot \pi \cdot M}{t_\mathrm{U}}$$

Leistung ist Drehmoment mal Winkelgeschwindigkeit. Die Antriebswelle dreht sich in der Umlaufzeit einmal um $2\pi$.

**Gilt:** Drehmoment in dem betrachteten Zeitraum gleichbleibend; Umlaufzeit in Sekunden einsetzen.

| | | |
|---|---|---|
| $P$ | Leistung (des Antriebs) | $\mu\mathrm{W}$ |
| $M$ | Drehmoment (an der Antriebswelle: Federhaus oder Walze) | $\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $t_\mathrm{U}$ | Umlaufzeit der Antriebswelle | $\mathrm{h}$ |

BEISPIEL An der Walze der Standuhr wirken $0{,}368\,\mathrm{N \cdot m}$; sie dreht sich einmal in 12 Stunden.

Gegeben: $M = 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}$; $t_\mathrm{U} = 12\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2 \cdot \pi \cdot M}{t_\mathrm{U}} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}}{12\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}}{43\,200\,\mathrm{s}} \\ &\approx 53{,}5\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Rund 54 Mikrowatt, etwa 36-mal so viel wie bei der Armbanduhr. Dieselbe Rechnung mit $6\,\mathrm{N \cdot mm}$ und 7 Stunden ergibt für die Armbanduhr wieder 1,5 Mikrowatt.

### Leistung am Gangregler

(1.29) MEISTER

$$P_{\mathrm{U}} = \eta \cdot P$$

Auf dem Weg durch Räderwerk und Hemmung geht der größere Teil der Antriebsleistung verloren. Der Gesamtwirkungsgrad ist das Produkt der Einzelwirkungsgrade (Kapitel XL 2 und 2).

**Gilt:** eingeschwungener Gang mit gleichbleibender Amplitude. Der Wirkungsgrad 0,3 im Beispiel ist ein grober Richtwert für Kleinuhren mit Ankerhemmung.

| | | |
|---|---|---|
| $P_{\mathrm{U}}$ | Leistung, die Unruh oder Pendel erreicht | $\mu\mathrm{W}$ |
| $\eta$ | Wirkungsgrad (von Räderwerk und Hemmung zusammen) | 1 |
| $P$ | Leistung (des Antriebs) | $\mu\mathrm{W}$ |

BEISPIEL Vom Federhaus kommen 1,5 Mikrowatt. Räderwerk und Hemmung haben zusammen einen Wirkungsgrad von 0,3.

Gegeben: $\eta = 0{,}3$; $P = 1{,}5\,\mu\mathrm{W}$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{U}} &= \eta \cdot P \\ &= 0{,}3 \cdot 1{,}5\,\mu\mathrm{W} \\ &= 0{,}45\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

An der Unruh kommt rund ein halbes Mikrowatt an. Je nach Kaliber und Schlagzahl liegt die Leistung an der Unruh zwischen einigen Zehnteln und rund einem Mikrowatt.

## 1.7 Aufzug und Zeigerstellung

Beim Handaufzug dreht die Krone über Aufzugtrieb, Kronrad und Sperrrad den Federkern. Im Automatikwerk übernimmt das die Schwungmasse, der Rotor, über ein stark untersetzendes Räderwerk. In der gezogenen Stellung treibt die Krone über den Kupplungstrieb das Zeigerwerk. Im Aufzug treiben kleine Räder große; es wird ins Langsame übersetzt. Gerechnet wird deshalb wie beim Zeigerwerk (Abschnitt 2.3) mit der Untersetzung: Zähnezahlen der getriebenen Räder geteilt durch die der treibenden. Das ist der Kehrwert der Übersetzung aus Abschnitt 2.1.

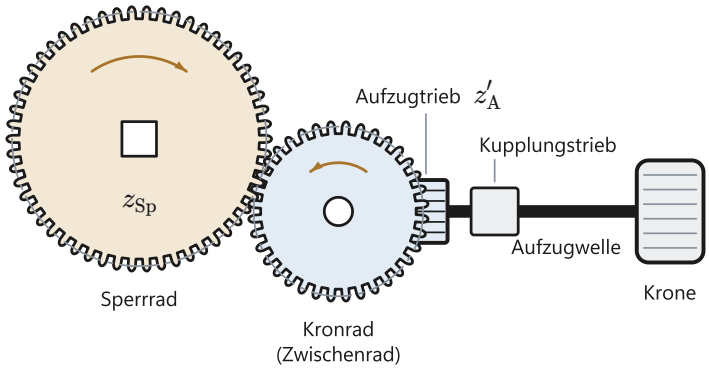



**Abb. 1.13** Kronenaufzug von oben (Schema): Der Aufzugtrieb mit $z'_{\mathrm{A}}$ Zähnen treibt über das Kronrad das Sperrrad mit $z_{\mathrm{Sp}}$ Zähnen auf dem Federkern

## Kronenumdrehungen für den Aufzug

(1.30) GESELLE

$$N_{\mathrm{K}} = \frac{N \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{A}}}$$

UMGESTELLT $$N = \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{Sp}}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{K}}$ | Umdrehungen der Krone | 1 |
| $N$ | Umgänge (um die der Federkern die Feder spannt) | 1 |
| $z_{\mathrm{Sp}}$ | Zähnezahl des Sperrrads | 1 |
| $z'_{\mathrm{A}}$ | Zähnezahl des Aufzugtriebs (auf der Aufzugwelle) | 1 |

Das Kronrad sitzt zwischen Aufzugtrieb und Sperrrad und ist nur Zwischenrad: Seine Zähnezahl fällt aus der Rechnung. Die Untersetzung des Aufzugs ist die Zähnezahl des Sperrrads geteilt durch die des Aufzugtriebs.

**Gilt:** Aufzugtrieb, Kronrad und Sperrrad in einer Kette; das Kronrad greift mit derselben Verzahnung in beide. Trägt die Welle des Kronrads zwei verschiedene Räder, zählt diese Stufe mit wie in Formel (2.3).

**Gut zu wissen:** Jede Umdrehung der Krone bringt so viel Gangdauer, wie die Umlaufzeit des Federhauses geteilt durch die Untersetzung ergibt. Im Beispiel sind das bei 7 Stunden je Umgang knapp 2 Stunden je Umdrehung der Krone.

BEISPIEL Der Aufzugtrieb hat 15 Zähne, das Kronrad 36, das Sperrrad 54. Die Feder lässt sich um 6,5 Umgänge spannen. Wie oft muss die Krone für den Vollaufzug gedreht werden?

Gegeben: $N = 6{,}5$; $z_{\mathrm{Sp}} = 54$; $z'_{\mathrm{A}} = 15$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{K}} &= \frac{N \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{A}}} \\ &= \frac{6{,}5 \cdot 54}{15} \\ &= 23{,}4 \end{aligned}$$

23,4 volle Umdrehungen. Von Hand dreht man meist halbe Umdrehungen, also rund 47 Griffe. Die 36 Zähne des Kronrads spielen für die Rechnung keine Rolle.

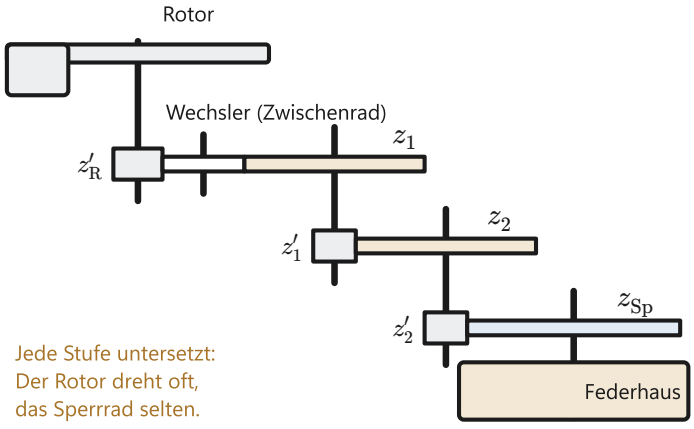



**Abb. 1.14** Automatikaufzug, in der Seitenansicht abgewickelt (Schema): Rotortrieb, Wechsler, zwei Reduktionsstufen und Sperrrad

## Untersetzung des Automatikaufzugs

(1.31) MEISTER

$$i_{\mathrm{R}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{R}} \cdot z'_1 \cdot z'_2}$$

Der Rotor hat wenig Drehmoment, aber viel Weg. Das Reduktionsräderwerk untersetzt deshalb stark: Im Zähler stehen die getriebenen Räder, im Nenner die treibenden Triebe. Räder des Wechslers, die nur die Drehrichtung gleichrichten und mit derselben Verzahnung in beide Nachbarn greifen, sind Zwischenräder und fallen heraus.

**Gilt:** zwei Reduktionsstufen zwischen Rotortrieb und Sperrrad; bei anderer Stufenzahl entsprechend mehr oder weniger Faktoren. Richtwert: Die Untersetzung liegt meist zwischen 100 und 180.

| | | |
|---|---|---|
| $i_{\mathrm{R}}$ | Untersetzung des Automatikaufzugs (Rotorumdrehungen je Umgang des Sperrrads) | 1 |
| $z_1$ | Zähnezahl des ersten Reduktionsrads | 1 |
| $z_2$ | Zähnezahl des zweiten Reduktionsrads | 1 |
| $z_{\mathrm{Sp}}$ | Zähnezahl des Sperrrads | 1 |
| $z'_{\mathrm{R}}$ | Zähnezahl des Rotortriebs | 1 |
| $z'_1$ | Zähnezahl des Triebs am ersten Reduktionsrad | 1 |
| $z'_2$ | Zähnezahl des Triebs am zweiten Reduktionsrad | 1 |

BEISPIEL Der Rotortrieb hat 24 Zähne. Das erste Reduktionsrad hat 66 Zähne und einen Trieb mit 8, das zweite 64 Zähne und einen Trieb mit 10, das Sperrrad 70 Zähne.

Gegeben: $z_1 = 66;\quad z_2 = 64;\quad z_{\mathrm{Sp}} = 70;\quad z'_{\mathrm{R}} = 24;\quad z'_1 = 8;\quad z'_2 = 10$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{R}} &= \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{R}} \cdot z'_1 \cdot z'_2} \\ &= \frac{66 \cdot 64 \cdot 70}{24 \cdot 8 \cdot 10} \\ &= 154 \end{aligned}$$

Der Rotor dreht sich 154-mal, bis das Sperrrad eine Umdrehung gemacht und die Feder um einen Umgang gespannt hat.

## Rotorumdrehungen für eine Gangreserve

(1.32) MEISTER

$$N_{\mathrm{R}} = \frac{i_{\mathrm{R}} \cdot t_{\mathrm{R}}}{t_{\mathrm{F}}}$$

Ein Umgang des Sperrrads kostet $i_{\mathrm{R}}$ Rotorumdrehungen und bringt so viele Stunden Gang, wie das Federhaus für einen Umgang braucht. Mit 24 Stunden ergibt die Formel den Tagesbedarf: So oft muss sich der Rotor am Tag drehen, damit das Werk seinen Aufzugsstand hält.

**Gilt:** Mindestwert ohne Verluste: Der Leerweg des Wechslers beim Richtungswechsel ist nicht gerechnet, die Schleppfeder rutscht nicht. Beim einseitigen Aufzug zählen nur die Umdrehungen in Aufzugsrichtung.

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{R}}$ | Umdrehungen des Rotors (in Aufzugsrichtung) | 1 |
| $i_{\mathrm{R}}$ | Untersetzung des Automatikaufzugs (Rotorumdrehungen je Umgang des Sperrrads) | 1 |
| $t_{\mathrm{R}}$ | Gangreserve (die aufgebaut werden soll) | $\mathrm{h}$ |
| $t_{\mathrm{F}}$ | Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang) | $\mathrm{h}$ |

**Gut zu wissen:** Beim Tragen kommen meist mehr Umdrehungen zusammen als nötig; den Überschuss lässt die Schleppfeder durchrutschen (Abschnitt 1.3). Bleibt eine Automatikuhr trotz Tragens stehen, reicht entweder die Bewegung nicht für den Tagesbedarf, oder der Aufzug verliert Weg, etwa durch verharzte Wechslerräder.

BEISPIEL Das Werk aus dem Beispiel davor hat ein Federhaus, das in 7 Stunden einmal umläuft. Wie viele Rotorumdrehungen braucht es für 24 Stunden Gang?

Gegeben: $i_{\mathrm{R}} = 154$; $t_{\mathrm{R}} = 24\,\mathrm{h}$; $t_{\mathrm{F}} = 7\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{R}} &= \frac{i_{\mathrm{R}} \cdot t_{\mathrm{R}}}{t_{\mathrm{F}}} \\ &= \frac{154 \cdot 24\,\mathrm{h}}{7\,\mathrm{h}} \\ &= 528 \end{aligned}$$

528 Umdrehungen am Tag, also 22 je Stunde Gang. Für 42 Stunden Gangreserve aus dem Stillstand sind es 924 Umdrehungen.

## Zeigerstellung: Weg des Minutenzeigers

(1.33) GESELLE

$$N_{\mathrm{M}} = \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{K}}}{z_{\mathrm{V}}}$$

In der Stellung zum Zeigerstellen greift der Kupplungstrieb in das Zeigerstellrad. Dieses treibt über das Wechselrad das Viertelrohr mit dem Minutenzeiger. Zeigerstellrad und Wechselrad sind dabei Zwischenräder. Eine Umdrehung des Minutenzeigers sind 60 Minuten Zeigerweg.

**Gilt:** Zeigerstellrad, weitere Zwischenräder und Wechselrad greifen jeweils mit derselben Verzahnung in ihre beiden Nachbarn. Der Stundenzeiger folgt über das Zeigerwerk im Verhältnis 12 zu 1 (Abschnitt 2.3).

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{M}}$ | Umdrehungen des Minutenzeigers | 1 |
| $N_{\mathrm{K}}$ | Umdrehungen der Krone | 1 |
| $z'_{\mathrm{K}}$ | Zähnezahl des Kupplungstriebs (Verzahnung für die Zeigerstellung) | 1 |
| $z_{\mathrm{V}}$ | Zähnezahl des Viertelrohrs | 1 |

BEISPIEL Der Kupplungstrieb hat für die Zeigerstellung 9 Zähne, das Viertelrohr 12. Wie weit rückt der Minutenzeiger bei einer Umdrehung der Krone?

Gegeben: $N_{\mathrm{K}} = 1$; $z'_{\mathrm{K}} = 9$; $z_{\mathrm{V}} = 12$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{M}} &= \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{K}}}{z_{\mathrm{V}}} \\ &= \frac{1 \cdot 9}{12} \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Um eine Dreiviertelumdrehung, das sind 45 Minuten Zeigerweg je Umdrehung der Krone.

**Merksatz:** Kronrad, Zeigerstellrad und Wechselrad sind hier nur Zwischenräder. Es zählen das erste treibende und das letzte getriebene Rad.

# 2 Räderwerk und Verzahnung

Das Räderwerk überträgt die Kraft des Antriebs auf die Hemmung und zählt dabei die Schwingungen des Gangreglers: Seine Übersetzungen bestimmen, wie schnell jede Welle dreht und welche Schlagzahl zu einem Werk gehört. Darum beginnt die Berechnung eines unbekannten Werks mit dem Zählen der Zähne.

Die Abschnitte 2.1 bis 2.3 rechnen mit Zähnezahlen, Abschnitt 2.4 mit den Maßen der Verzahnung. Schlagwerk, Kalender und Mondphase folgen denselben Regeln; den Schluss macht die Reibung im Räderwerk. Das Zeichen $k$ steht je nach Formel für den Kopfzuschlag oder für eine Anzahl; maßgeblich ist die Größentabelle der Formel.

## 2.1 Übersetzung

Ein Rad treibt einen Trieb: Das ist der Grundbaustein jedes Räderwerks. Triebe sind kleine Zahnräder mit meist 6 bis 16 Zähnen; sie sitzen fest auf der Welle des nächsten Rades.

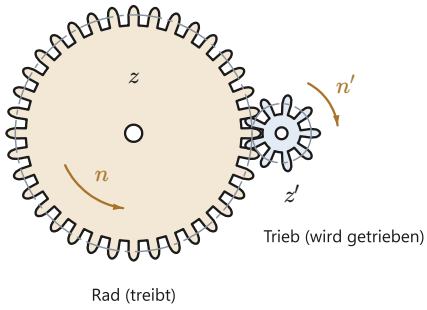



**Abb. 2.1** Rad treibt Trieb: Der Trieb dreht um die Übersetzung schneller und in der Gegenrichtung

### Übersetzung eines Eingriffs

(2.1) GESELLE

$$i = \frac{z}{z'}$$

Die Übersetzung sagt, wie oft sich der Trieb dreht, während das Rad eine Umdrehung macht. In diesem Kapitel ist $z$ die Zähnezahl eines Rades und $z'$ die eines Triebes; ein Index nennt die Welle.

**Gilt:** Rad treibt Trieb, wie im Gehwerk und im Schlagwerk: Es wird ins Schnelle übersetzt. Wo ein Trieb ein Rad treibt (Zeigerwerk, Aufzug), wird ins Langsame übersetzt; dann rechnet man mit der Untersetzung, der Zähnezahl des getriebenen Rades geteilt durch die des treibenden Triebes, Formel (2.11).

| | | |
|---|---|---|
| $i$ | Übersetzung (größer als 1 heißt: ins Schnelle) | 1 |
| $z$ | Zähnezahl (des treibenden Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes (wird getrieben) | 1 |

BEISPIEL Das Minutenrad hat 80 Zähne und treibt den Kleinbodentrieb mit 10 Zähnen.

Gegeben: $z = 80$; $z' = 10$

$$\begin{aligned} i &= \frac{z}{z'} \\ &= \frac{80}{10} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Der Kleinbodentrieb dreht sich achtmal, während das Minutenrad eine Umdrehung macht.

## Drehzahl des Triebes

(2.2) GESELLE

$$n' = \frac{n \cdot z}{z'}$$

Im Eingriff laufen auf beiden Seiten gleich viele Zähne durch: $z \cdot n = z' \cdot n'$. Der Trieb dreht darum um die Übersetzung schneller als das Rad.

| | | |
|---|---|---|
| $n'$ | Drehzahl des getriebenen Triebes | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ |
| $n$ | Drehzahl (des treibenden Rades) | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des treibenden Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes (wird getrieben) | 1 |

BEISPIEL Das Minutenrad (80 Zähne) dreht einmal je Stunde. Wie schnell dreht der Kleinbodentrieb mit 10 Zähnen?

Gegeben: $n = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}; \quad z = 80; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} n' &= \frac{n \cdot z}{z'} \\ &= \frac{1\,\frac{1}{\mathrm{h}} \cdot 80}{10} \\ &= 8\,\frac{1}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Trieb und Kleinbodenrad drehen achtmal je Stunde, eine Umdrehung dauert 7,5 min.

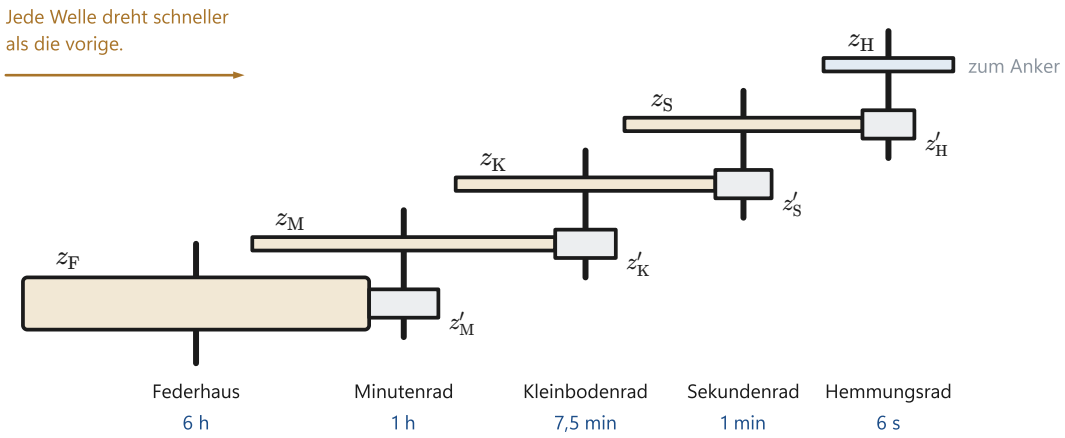



**Abb. 2.2** Räderwerk einer Kleinuhr, in der Seitenansicht abgewickelt. Darunter die Umlaufzeiten für die Zähnezahlen 72 : 12, 80 : 10, 75 : 10 und 80 : 8

## Gesamtübersetzung

(2.3) GESELLE

$$i_{\text{ges}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z'_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3}$$

Liegen mehrere Eingriffe hintereinander, werden die Einzelübersetzungen multipliziert: Produkt der Zähnezahlen aller treibenden Räder durch das Produkt aller getriebenen Triebe. Bei mehr oder weniger Eingriffen wird der Bruch entsprechend länger oder kürzer.

| | | |
|---|---|---|
| $i_{\text{ges}}$ | Gesamtübersetzung (von der ersten zur letzten Welle) | 1 |
| $z_1$ | Zähnezahl des ersten treibenden Rades | 1 |
| $z_2$ | Zähnezahl des zweiten treibenden Rades | 1 |
| $z_3$ | Zähnezahl des dritten treibenden Rades | 1 |
| $z'_1$ | Zähnezahl des ersten getriebenen Triebes | 1 |
| $z'_2$ | Zähnezahl des zweiten getriebenen Triebes | 1 |
| $z'_3$ | Zähnezahl des dritten getriebenen Triebes | 1 |

**Gut zu wissen:** Ein Zwischenrad, das getrieben wird und mit denselben Zähnen weitertreibt, steht einmal im Zähler und einmal im Nenner. Es ändert die Übersetzung nicht, nur die Drehrichtung.

BEISPIEL Ein Taschenuhrwerk hat Minutenrad 80, Kleinbodenrad 75 und Sekundenrad 80 Zähne; Kleinboden- und Sekundentrieb haben je 10, der Hemmungstrieb 8 Zähne.

Gegeben: $z_1 = 80;\quad z_2 = 75;\quad z_3 = 80;\quad z'_1 = 10;\quad z'_2 = 10;\quad z'_3 = 8$

$$\begin{aligned} i_{\text{ges}} &= \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z'_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3} \\ &= \frac{80 \cdot 75 \cdot 80}{10 \cdot 10 \cdot 8} \\ &= 600 \end{aligned}$$

Das Hemmungsrad dreht 600-mal, während das Minutenrad eine Umdrehung macht. Die Einzelübersetzungen sind 8, 7,5 und 10.

## Umlaufzeit

(2.4) GESELLE

$$t'_{\text{U}} = \frac{t_{\text{U}} \cdot z'}{z}$$

Die Umlaufzeit ist der Kehrwert der Drehzahl. Von Welle zu Welle wird sie um die Übersetzung kürzer. In Abb. 2.2 stehen die Umlaufzeiten unter den Wellen.

| | | |
|---|---|---|
| $t'_{\text{U}}$ | Umlaufzeit des Triebes (Zeit für eine Umdrehung) | s |
| $t_{\text{U}}$ | Umlaufzeit des treibenden Rades | s |
| $z$ | Zähnezahl (des treibenden Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes (wird getrieben) | 1 |

BEISPIEL Das Sekundenrad (80 Zähne) dreht in 60 s einmal und treibt den Hemmungstrieb mit 8 Zähnen.

Gegeben: $t_{\text{U}} = 60\,\text{s};\quad z' = 8;\quad z = 80$

$$\begin{aligned} t'_{\text{U}} &= \frac{t_{\text{U}} \cdot z'}{z} \\ &= \frac{60\,\text{s} \cdot 8}{80} \\ &= 6\,\text{s} \end{aligned}$$

Das Hemmungsrad braucht 6 s für eine Umdrehung.

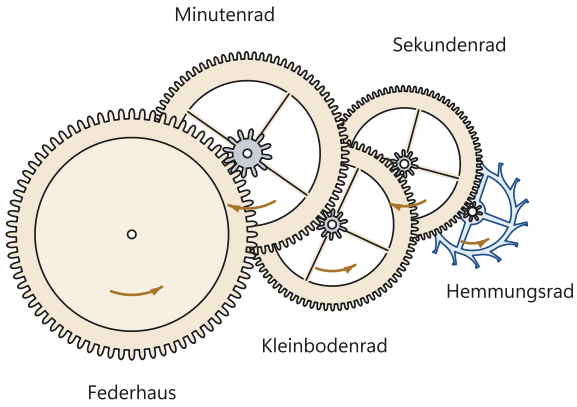



**Abb. 2.3** Dasselbe Räderwerk in der Draufsicht: Jede Welle dreht entgegengesetzt zur vorigen

**Merksatz:** Jeder Eingriff kehrt die Drehrichtung um. Nach einer geraden Zahl von Eingriffen dreht die letzte Welle wie die erste, nach einer ungeraden entgegengesetzt.

## Drehmoment am Trieb

(2.5) GESELLE

$$M' = \frac{M \cdot \eta \cdot z'}{z}$$

Was das Räderwerk an Drehzahl gewinnt, verliert es an Drehmoment. Die Reibung an den Zahnflanken und in den Lagern nimmt zusätzlich einen Teil weg.

**Gilt:** gleichförmige Drehung. Das Drehmoment schwankt während des Eingriffs eines Zahns etwas; die Formel liefert den Mittelwert.

| | | |
|---|---|---|
| $M'$ | Drehmoment an der Welle des getriebenen Triebes | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $M$ | Drehmoment (an der Welle des treibenden Rades) | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $\eta$ | Wirkungsgrad (je Eingriff; Richtwert 0,90 bis 0,95; ohne Reibung 1) | 1 |
| $z$ | Zähnezahl (des treibenden Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes (wird getrieben) | 1 |

BEISPIEL Ein Federhaus mit 72 Zähnen gibt 8 N·mm ab und treibt den Minutentrieb mit 12 Zähnen. Der Eingriff hat den Wirkungsgrad 0,95.

Gegeben: $M = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\eta = 0{,}95$; $z' = 12$; $z = 72$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{M \cdot \eta \cdot z'}{z} \\ &= \frac{8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 0{,}95 \cdot 12}{72} \\ &\approx 1{,}27\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

An der Minutenradwelle kommen 1,27 N·mm an. Ohne Reibung wären es 1,33 N·mm.

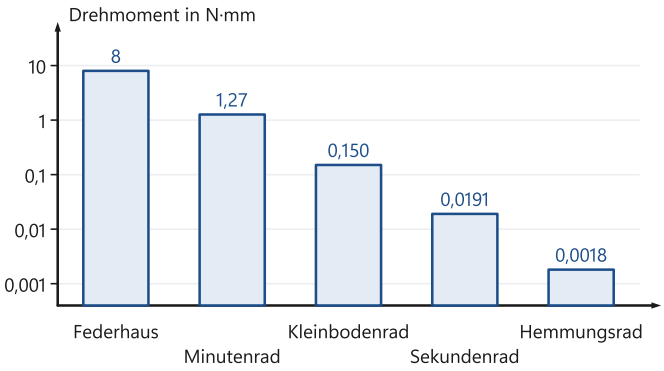



**Abb. 2.4** Drehmoment an den Wellen des Räderwerks aus Abb. 2.2 bei 8 N·mm am Federhaus und $\eta = 0{,}95$ je Eingriff

## 2.2 Gehwerk berechnen

Das Gehwerk verbindet das Minutenrad, das einmal je Stunde dreht, mit dem Hemmungsrad. Seine Übersetzung und die Zähnezahl des Hemmungsrads legen fest, wie viele Halbschwingungen der Gangregler je Stunde machen muss, damit die Zeiger richtig laufen.

Mit diesen Formeln bestimmt man die Schlagzahl eines unbekannten Werks, die Länge eines fehlenden Pendels (Kapitel 4) und die Zähnezahl eines fehlenden Rades oder Triebes.

### Schlagzahl aus dem Räderwerk

(2.6) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot i \cdot n_\mathrm{M}$$

Jeder Zahn des Hemmungsrads lässt den Gangregler zwei Halbschwingungen machen: eine am Eingang, eine am Ausgang. Je Umdrehung des Hemmungsrads sind das $2 \cdot z_\mathrm{H}$ Schläge.

**Gilt:** alle gebräuchlichen Hemmungen; $i$ nach Formel (2.3). Das Minutenrad dreht einmal je Stunde; geht die Rechnung von einer anderen Welle aus, wird deren Drehzahl eingesetzt.

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $z_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungsrads | 1 |
| $i$ | Übersetzung (vom Minutenrad zum Hemmungsrad) | 1 |
| $n_\mathrm{M}$ | Drehzahl des Minutenrads (eine Umdrehung je Stunde) | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ |

BEISPIEL Ein Regulator hat ein Minutenrad mit 80 und ein Zwischenrad mit 75 Zähnen, zwei Triebe mit je 10 Zähnen und ein Hemmungsrad mit 30 Zähnen. Die Übersetzung vom Minutenrad zum Hemmungsrad ist $8 \cdot 7{,}5 = 60$.

Gegeben: $z_\mathrm{H} = 30; \quad i = 60; \quad n_\mathrm{M} = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= 2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot i \cdot n_\mathrm{M} \\ &= 2 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 1\,\tfrac{1}{\mathrm{h}} \\ &= 3600\,\tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

3600 Schläge je Stunde sind 60 je Minute. Zu diesem Werk gehört ein Sekundenpendel von 994 mm Länge (Kapitel 4).

## Schlagzahl der Kleinuhr aus den Zähnezahlen

(2.7) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S} \cdot z'_\mathrm{H}}$$

Im Zähler stehen die treibenden Räder, im Nenner die getriebenen Triebe. Jeder Trieb trägt den Index der Welle, auf der er sitzt (Abb. 2.2).

**Gilt:** Räderwerk mit drei Eingriffen zwischen Minutenrad und Hemmungsrad. Bei anderer Bauart den Bruch nach Formel (2.3) anpassen.

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $z_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungsrads | 1 |
| $n_\mathrm{M}$ | Drehzahl des Minutenrads (eine Umdrehung je Stunde) | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ |
| $z_\mathrm{M}$ | Zähnezahl des Minutenrads | 1 |
| $z_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodenrads | 1 |
| $z_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundenrads | 1 |
| $z'_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodentriebs | 1 |
| $z'_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundentriebs | 1 |
| $z'_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungstriebs | 1 |

**Gut zu wissen:** Fehlt ein Rad oder Trieb, wird die Formel nach seiner Zähnezahl umgestellt. Das Ergebnis muss eine ganze Zahl sein; sonst ist eine Zähnezahl falsch gezählt oder die Schlagzahl falsch angenommen.

BEISPIEL Gezählt wurden: Minutenrad 80, Kleinbodenrad 75, Sekundenrad 84, Hemmungsrad 20 Zähne; Kleinbodentrieb 10, Sekundentrieb 10, Hemmungstrieb 7 Zähne.

Gegeben: $z_\mathrm{H} = 20$; $n_\mathrm{M} = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}$; $z_\mathrm{M} = 80$; $z_\mathrm{K} = 75$; $z_\mathrm{S} = 84$; $z'_\mathrm{K} = 10$; $z'_\mathrm{S} = 10$; $z'_\mathrm{H} = 7$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S} \cdot z'_\mathrm{H}} \\ &= \frac{2 \cdot 20 \cdot 1\,\frac{1}{\mathrm{h}} \cdot 80 \cdot 75 \cdot 84}{10 \cdot 10 \cdot 7} \\ &= 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Das Werk schlägt 28 800 Halbschwingungen je Stunde, die Unruh schwingt mit 4 Hz.

## Drehzahl des Hemmungsrads

(2.8) GESELLE

$$n_\mathrm{H} = \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z_\mathrm{H}}$$

So findet man die Drehzahl, die das Räderwerk am Hemmungsrad liefern muss. Mehr Zähne am Hemmungsrad heißt: Das Räderwerk kann langsamer laufen.

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{H}$ | Drehzahl des Hemmungsrads | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $z_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungsrads | 1 |

BEISPIEL Wie schnell dreht ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen bei 28 800 A/h?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $z_\mathrm{H} = 20$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{H} &= \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z_\mathrm{H}} \\ &= \frac{28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{2 \cdot 20} \\ &= 12\,\frac{1}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Zwölf Umdrehungen je Minute, eine Umdrehung dauert 5 s. Ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen bräuchte bei gleicher Schlagzahl 16 Umdrehungen je Minute.

Kleinuhren bis 21600 A/h haben fast immer ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen, Werke mit 28800 A/h und mehr häufig eines mit 20 Zähnen. Bei Großuhren reicht die Spanne von etwa 15 bis 40 Zähnen. Sitzt der Sekundenzeiger auf der Welle des Hemmungsrads und schlägt das Pendel Sekunden, hat das Hemmungsrad 30 Zähne.

## Bedingung für das Sekundenrad

(2.9) GESELLE

$$\frac{z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}} = 60$$

UMGESTELLT $$z_\mathrm{K} = \frac{60 \cdot z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}}{z_\mathrm{M}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $z_\mathrm{M}$ | Zähnezahl des Minutenrads | 1 |
| $z_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodenrads | 1 |
| $z'_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodentriebs | 1 |
| $z'_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundentriebs | 1 |

Trägt die Welle des Sekundenrads den Sekundenzeiger, muss sie 60-mal so schnell drehen wie das Minutenrad. Üblich ist die Aufteilung $8 \cdot 7{,}5$.

**Gilt:** Werke, deren Sekundenrad einmal je Minute dreht (kleine Sekunde oder Sekundenrad in der Mitte).

BEISPIEL In einem Werk fehlt das Kleinbodenrad. Das Minutenrad hat 80 Zähne, Kleinbodentrieb und Sekundentrieb haben je 10 Zähne.

Gegeben: $z'_\mathrm{K} = 10$; $z'_\mathrm{S} = 10$; $z_\mathrm{M} = 80$

$$\begin{aligned} z_\mathrm{K} &= \frac{60 \cdot z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}}{z_\mathrm{M}} \\ &= \frac{60 \cdot 10 \cdot 10}{80} \\ &= 75 \end{aligned}$$

Das fehlende Kleinbodenrad hat 75 Zähne. Den Modul liefert der Achsabstand, Formel (2.16).

## Schlagzahl aus dem letzten Eingriff

(2.10) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{H}}$$

UMGESTELLT $$z_\mathrm{S} = \frac{n_\mathrm{h} \cdot z'_\mathrm{H}}{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $z_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungsrads | 1 |
| $n_\mathrm{S}$ | Drehzahl des Sekundenrads (eine Umdrehung je Minute) | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |
| $z_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundenrads | 1 |
| $z'_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungstriebs | 1 |

**Gilt:** Sekundenrad dreht einmal je Minute.

BEISPIEL Ein Werk mit 28800 A/h hat ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen und einen Hemmungstrieb mit 7 Zähnen. Das Sekundenrad fehlt.

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $z'_\mathrm{H} = 7$; $z_\mathrm{H} = 20$; $n_\mathrm{S} = 1\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} z_\mathrm{S} &= \frac{n_\mathrm{h} \cdot z'_\mathrm{H}}{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S}} \\ &= \frac{28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \cdot 7}{2 \cdot 20 \cdot 1\ \frac{1}{\mathrm{min}}} \\ &= 84 \end{aligned}$$

Das Sekundenrad muss 84 Zähne haben.

### Zähnezahlsätze für Kleinuhren (gerechnete Beispiele, Sekundenrad dreht einmal je Minute)

| Schlagzahl in A/h | Minutenrad : Kleinbodentrieb | Kleinbodenrad : Sekundentrieb | Sekundenrad : Hemmungstrieb | Hemmungsrad | Übersetzung |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 000 | 80 : 10 | 75 : 10 | 80 : 8 | 15 | 600 |
| 18 000 | 64 : 8 | 60 : 8 | 70 : 7 | 15 | 600 |
| 21 600 | 80 : 10 | 75 : 10 | 72 : 6 | 15 | 720 |
| 21 600 | 64 : 8 | 60 : 8 | 84 : 7 | 15 | 720 |
| 28 800 | 80 : 10 | 75 : 10 | 84 : 7 | 20 | 720 |
| 36 000 | 80 : 10 | 75 : 10 | 90 : 6 | 20 | 900 |

Die Sätze sind mit Formel (2.7) gerechnet und zeigen, wie die Schlagzahl aus den Zähnezahlen entsteht. Ausgeführte Kaliber weichen davon ab; maßgeblich sind immer die gezählten Zähne.

**Merksatz:** Schlagzahl gleich zweimal Hemmungsradzähne mal Übersetzung vom Minutenrad zum Hemmungsrad. Treibende Räder in den Zähler, getriebene Triebe in den Nenner.

## 2.3 Zeigerwerk

Das Zeigerwerk sitzt unter dem Zifferblatt und leitet aus der Drehung des Minutenzeigers die des Stundenzeigers ab. Das Viertelrohr, auch Minutenrohr genannt, sitzt mit Reibung auf der Welle des Minutenrads, damit sich die Zeiger stellen lassen.

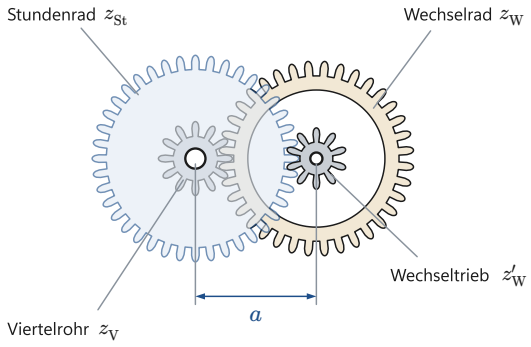



**Abb. 2.5** Zeigerwerk in der Draufsicht: Beide Eingriffe haben denselben Achsabstand $a$

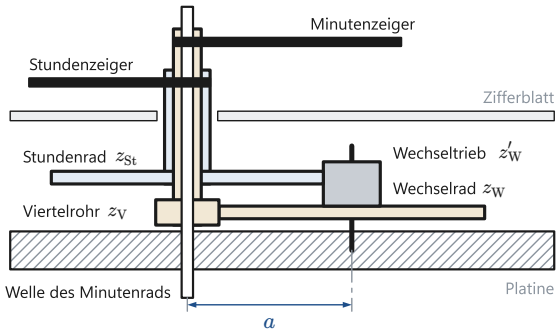



**Abb. 2.6** Zeigerwerk im Schnitt (Schema): Das Stundenrad dreht lose auf dem Viertelrohr

## Untersetzung des Zeigerwerks

(2.11) GESELLE

$$\frac{z_{\mathrm{W}} \cdot z_{\mathrm{St}}}{z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}} = 12$$

UMGESTELLT $z_{\mathrm{St}} = \dfrac{12 \cdot z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}}{z_{\mathrm{W}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $z_{\mathrm{W}}$ | Zähnezahl des Wechselrads | 1 |
| $z_{\mathrm{St}}$ | Zähnezahl des Stundenrads | 1 |
| $z_{\mathrm{V}}$ | Zähnezahl des Viertelrohrs (treibt das Wechselrad) | 1 |
| $z'_{\mathrm{W}}$ | Zähnezahl des Wechseltriebs (treibt das Stundenrad) | 1 |

Das Viertelrohr trägt den Minutenzeiger und dreht einmal je Stunde, das Stundenrad einmal in 12 Stunden. Weil hier die Triebe treiben, stehen die getriebenen Räder im Zähler: Das Zeigerwerk untersetzt 12 zu 1.

**Gilt:** Anzeige mit 12 Stunden je Umlauf des Stundenzeigers. Nach zwei Eingriffen dreht das Stundenrad in derselben Richtung wie das Viertelrohr.

BEISPIEL An einem Zeigerwerk fehlt das Stundenrad. Das Viertelrohr hat 14 Zähne, das Wechselrad 42, der Wechseltrieb 12.

Gegeben: $z_{\mathrm{V}} = 14$; $z'_{\mathrm{W}} = 12$; $z_{\mathrm{W}} = 42$

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{St}} &= \frac{12 \cdot z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}}{z_{\mathrm{W}}} \\ &= \frac{12 \cdot 14 \cdot 12}{42} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Das Stundenrad hat 48 Zähne. Die Untersetzung teilt sich in 3 am ersten und 4 am zweiten Eingriff.

## 24-Stunden-Anzeige

(2.12) MEISTER

$$z_{24} = 2 \cdot z_{\mathrm{A}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $z_{24}$ | Zähnezahl des 24-Stunden-Rads | 1 |
| $z_{\mathrm{A}}$ | Zähnezahl des treibenden Rades auf dem Stundenrohr | 1 |

Der 24-Stunden-Zeiger dreht halb so schnell wie der Stundenzeiger. Ein Zwischenrad ändert die Untersetzung nicht, lässt den Zeiger aber rechtsherum laufen. Dieselbe Untersetzung 2 zu 1 treibt das Schaltrad des Datums, das einmal am Tag schaltet (Abschnitt 2.6).

**Gilt:** Antrieb vom Stundenrad aus. Vom Viertelrohr aus gerechnet ist die Untersetzung 24 zu 1.

BEISPIEL Auf dem Stundenrohr sitzt ein Rad mit 24 Zähnen, das über ein Zwischenrad das 24-Stunden-Rad treibt.

Gegeben: $z_{\mathrm{A}} = 24$

$$\begin{aligned} z_{24} &= 2 \cdot z_{\mathrm{A}} \\ &= 2 \cdot 24 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Das 24-Stunden-Rad braucht 48 Zähne. Die Zähnezahl des Zwischenrads ist frei wählbar.

### Gleicher Achsabstand im Zeigerwerk

(2.13) MEISTER

$$m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W}) = m_2 \cdot (z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St})$$

UMGESTELLT $$m_2 = \frac{m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W})}{z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St}}$$

Viertelrohr und Stundenrad drehen um dieselbe Achse, Wechselrad und Wechseltrieb auch. Beide Eingriffe haben darum denselben Achsabstand nach Formel (2.16). Sind die Zähnezahlsummen verschieden, müssen es auch die Module sein.

| | | |
|---|---|---|
| $m_1$ | Modul des Eingriffs Viertelrohr und Wechselrad | mm |
| $z_\mathrm{V}$ | Zähnezahl des Viertelrohrs (treibt das Wechselrad) | 1 |
| $z_\mathrm{W}$ | Zähnezahl des Wechselrads | 1 |
| $m_2$ | Modul des Eingriffs Wechseltrieb und Stundenrad | mm |
| $z'_\mathrm{W}$ | Zähnezahl des Wechseltriebs (treibt das Stundenrad) | 1 |
| $z_\mathrm{St}$ | Zähnezahl des Stundenrads | 1 |

BEISPIEL Ein Zeigerwerk hat Viertelrohr 12, Wechselrad 36, Wechseltrieb 10 und Stundenrad 40 Zähne. Der erste Eingriff hat den Modul 0,25 mm.

Gegeben: $m_1 = 0{,}25\,\mathrm{mm}$; $z_\mathrm{V} = 12$; $z_\mathrm{W} = 36$; $z'_\mathrm{W} = 10$; $z_\mathrm{St} = 40$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W})}{z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St}} \\ &= \frac{0{,}25\,\mathrm{mm} \cdot (12 + 36)}{10 + 40} \\ &= 0{,}24\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der zweite Eingriff braucht den Modul 0,24 mm. Mit den Zähnezahlen 10 und 30 sowie 8 und 32 kämen beide Eingriffe mit demselben Modul aus.

## 2.4 Verzahnungsgeometrie

Alle Maße einer Verzahnung hängen am Modul. Mit Modul und Zähnezahl liegen Teilkreis, Achsabstand und Zahngröße fest; die Zahnform bestimmt dann Kopf- und Fußkreis.

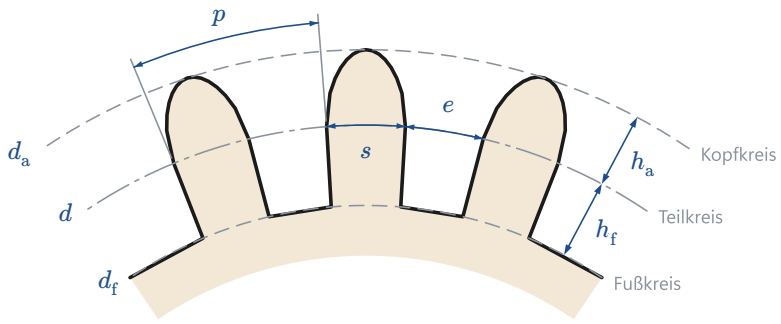



**Abb. 2.7** Maße am Zahnrad: Kopfkreis $d_\mathrm{a}$, Teilkreis $d$, Fußkreis $d_\mathrm{f}$, Teilung $p$, Zahndicke $s$, Lücke $e$, Kopfhöhe $h_\mathrm{a}$ und Fußhöhe $h_\mathrm{f}$

## Teilung und Modul

(2.14) GESELLE

$$p = \pi \cdot m$$

UMGESTELLT $m = \dfrac{p}{\pi}$

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | Teilung (Abstand von Zahn zu Zahn, als Bogen auf dem Teilkreis) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |

Der Modul ist die Teilung geteilt durch $\pi$. Er ist das Maß für die Zahngröße: Nur Rad und Trieb mit gleichem Modul passen zusammen.

BEISPIEL Wie groß ist die Teilung bei Modul 0,2 mm?

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} p &= \pi \cdot m \\ &= \pi \cdot 0{,}2\,\mathrm{mm} \\ &\approx 0{,}628\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Von Zahn zu Zahn sind es auf dem Teilkreis 0,628 mm; Zahn und Lücke sind also je rund 0,3 mm breit.

## Teilkreisdurchmesser

(2.15) GESELLE

$$d = m \cdot z$$

UMGESTELLT $m = \dfrac{d}{z}$

| | | |
|---|---|---|
| $d$ | Teilkreisdurchmesser | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl | 1 |

Der Teilkreis ist der gedachte Kreis, auf dem Rad und Trieb aufeinander abrollen wie zwei glatte Reibräder.

BEISPIEL Ein Rad hat 80 Zähne und den Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}; \quad z = 80$

$$\begin{aligned} d &= m \cdot z \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot 80 \\ &= 16\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Teilkreis misst 16 mm. Am fertigen Rad ist er nicht zu sehen; messen kann man nur den Kopfkreis.

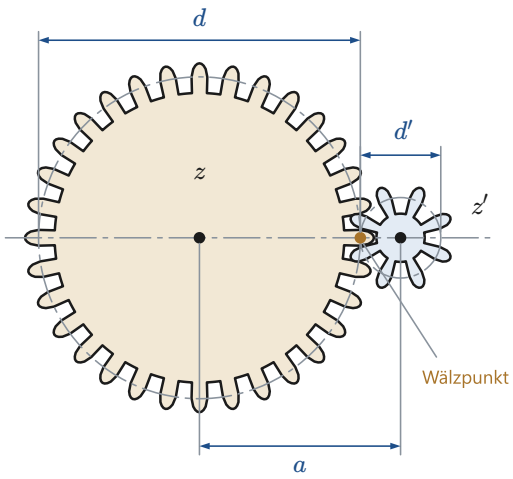



**Abb. 2.8** Eingriff: Die Teilkreise $d$ und $d'$ berühren sich im Wälzpunkt

## Achsabstand

(2.16) GESELLE

$$a = \frac{m \cdot (z + z')}{2}$$

UMGESTELLT $m = \frac{2 \cdot a}{z + z'}$

Die Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt. Der Achsabstand ist die Summe der beiden Teilkreishalbmesser. Umgestellt liefert die Formel den Modul aus dem gemessenen Achsabstand.

**Gilt:** Außenverzahnung mit richtig eingestellter Eingriffstiefe.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | Achsabstand | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 |

BEISPIEL Zwischen zwei Lagern werden 8,5 mm Achsabstand gemessen. Das Rad hat 75 Zähne, der Trieb 10.

Gegeben: $a = 8{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 75; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} m &= \frac{2 \cdot a}{z + z'} \\ &= \frac{2 \cdot 8{,}5\,\mathrm{mm}}{75 + 10} \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Eingriff hat den Modul 0,2 mm.

## Teilkreis aus dem Achsabstand

(2.17) MEISTER

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot z}{z + z'}$$

Der Achsabstand teilt sich im Verhältnis der Zähnezahlen auf Rad und Trieb auf. Für den Trieb steht $z'$ im Zähler.

| | | |
|---|---|---|
| $d$ | Teilkreisdurchmesser (des Rades) | $\mathrm{mm}$ |
| $a$ | Achsabstand | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Rades) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 |

BEISPIEL Achsabstand 8,5 mm, Rad 75 Zähne, Trieb 10 Zähne.

Gegeben: $a = 8{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 75; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} d &= \frac{2 \cdot a \cdot z}{z + z'} \\ &= \frac{2 \cdot 8{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 75}{75 + 10} \\ &= 15\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Teilkreis des Rades misst 15 mm, für den Trieb bleiben 2 mm.

**Uhrenverzahnung.** Im Gehwerk treibt das Rad den Trieb, und zwar mit möglichst gleichmäßiger Kraft und wenig Reibung. Dafür hat sich die Zykloidenverzahnung durchgesetzt, heute meist als Kreisbogenverzahnung nach den Normen der Uhrenindustrie ausgeführt: Der Radzahn trägt über dem Teilkreis einen Spitzbogen, der Triebzahn hat gerade, zur Mitte laufende Flanken und einen runden oder spitzbogigen Kopf. Die Kopfhöhen hängen von den Zähnezahlen ab. Die folgenden Formeln fassen sie in einem Zuschlag zur Zähnezahl zusammen.

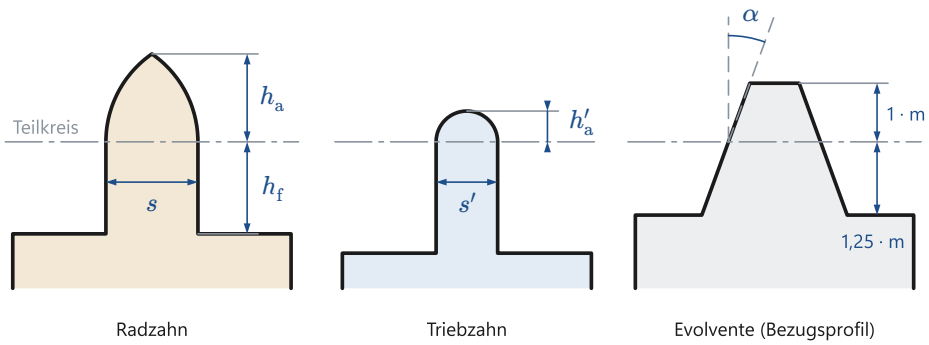



**Abb. 2.9** Zahnformen, auf geradem Teilkreis gezeichnet: Radzahn mit Spitzbogen, Triebzahn mit halbrundem Kopf, Bezugsprofil der Evolventenverzahnung mit $\alpha = 20°$

## Kopfkreis des Rades

(2.18) NÄHERUNG GESELLE

$$d_a \approx m \cdot (z + k)$$

Der Kopfkreis ist der Außendurchmesser des Rades und das einzige Maß, das sich leicht messen lässt. Die Kopfhöhe ist $h_a = \frac{k}{2} \cdot m$.

**Gilt:** Uhrenverzahnung, Rad treibt Trieb. $k$ aus der Tabelle; ohne Tabelle rechnet man mit $k \approx 3$, in Kursaufgaben auch mit $k \approx \pi$.

| | | |
|---|---|---|
| $d_a$ | Kopfkreisdurchmesser (des Rades) | mm |
| $m$ | Modul | mm |
| $z$ | Zähnezahl (des Rades) | 1 |
| $k$ | Kopfzuschlag (des Rades: doppelte Kopfhöhe, in Modul gemessen) | 1 |

BEISPIEL Ein Rad mit 80 Zähnen und Modul 0,2 mm greift in einen Trieb mit 10 Zähnen; nach der Tabelle ist $k = 3{,}19$.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\text{mm}$; $z = 80$; $k = 3{,}19$

$$\begin{aligned} d_a &\approx m \cdot (z + k) \\ &= 0{,}2\,\text{mm} \cdot (80 + 3{,}19) \\ &\approx 16{,}64\,\text{mm} \end{aligned}$$

Das Rad wird auf 16,64 mm Kopfkreis gedreht; der Teilkreis liegt 0,32 mm unter den Zahnspitzen.

### Kopfzuschlag $k$ des Rades im Überblick (gerundet, für Übersetzungen von 6 bis 10)

| Zähnezahl des Triebes | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Kopfzuschlag $k$ | 2,6 | 2,8 | 2,9 | 3,2 | 3,4 |

Je mehr Zähne der Trieb hat, desto höher wird der Spitzbogen des Radzahns. Die genauen Werte hängen auch von der Zähnezahl des Rades ab; sie stehen in der folgenden Tabelle.

### Kopfzuschlag $k$ des Rades nach den Zähnezahlen von Rad und Trieb (Tabellenwerte der Uhrenverzahnung, Zykloidenverzahnung)

| Zähnezahl $z$ des Rades | Trieb $z' = 6$ | $z' = 7$ | $z' = 8$ | $z' = 9$ | $z' = 10$ | $z' = 12$ | $z' = 15$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 2,53 | 2,65 | 2,76 | 2,86 | 2,95 | 3,10 | 3,24 |
| 24 | 2,56 | 2,68 | 2,79 | 2,90 | 2,99 | 3,14 | 3,31 |
| 25 | 2,57 | 2,69 | 2,80 | 2,91 | 3,00 | 3,15 | 3,33 |
| 28 | 2,57 | 2,71 | 2,82 | 2,93 | 3,03 | 3,18 | 3,38 |
| 30 | 2,58 | 2,71 | 2,83 | 2,94 | 3,04 | 3,20 | 3,40 |
| 32 | 2,59 | 2,72 | 2,84 | 2,95 | 3,06 | 3,22 | 3,43 |
| 35 | 2,60 | 2,73 | 2,85 | 2,96 | 3,07 | 3,25 | 3,46 |
| 36 | 2,60 | 2,73 | 2,85 | 2,96 | 3,08 | 3,26 | 3,47 |
| 40 | 2,60 | 2,74 | 2,86 | 2,98 | 3,10 | 3,29 | 3,51 |
| 42 | 2,61 | 2,74 | 2,87 | 2,98 | 3,10 | 3,30 | 3,53 |
| 45 | 2,61 | 2,74 | 2,88 | 3,00 | 3,12 | 3,32 | 3,55 |
| 48 | 2,62 | 2,75 | 2,88 | 3,00 | 3,12 | 3,33 | 3,56 |
| 50 | 2,62 | 2,75 | 2,89 | 3,01 | 3,12 | 3,33 | 3,57 |
| 54 | 2,62 | 2,75 | 2,89 | 3,01 | 3,13 | 3,35 | 3,59 |
| 56 | 2,62 | 2,76 | 2,90 | 3,02 | 3,13 | 3,35 | 3,60 |
| 60 | 2,63 | 2,76 | 2,90 | 3,02 | 3,14 | 3,36 | 3,61 |
| 64 | 2,63 | 2,77 | 2,91 | 3,03 | 3,15 | 3,37 | 3,62 |
| 70 | 2,63 | 2,77 | 2,92 | 3,05 | 3,17 | 3,39 | 3,64 |
| 72 | 2,64 | 2,78 | 2,92 | 3,05 | 3,17 | 3,39 | 3,64 |
| 75 | 2,64 | 2,78 | 2,93 | 3,06 | 3,18 | 3,40 | 3,65 |
| 80 | 2,64 | 2,79 | 2,93 | 3,07 | 3,19 | 3,41 | 3,66 |
| 84 | 2,64 | 2,79 | 2,93 | 3,07 | 3,20 | 3,42 | 3,67 |
| 90 | 2,65 | 2,80 | 2,94 | 3,08 | 3,21 | 3,44 | 3,69 |
| 96 | 2,65 | 2,80 | 2,94 | 3,09 | 3,22 | 3,45 | 3,70 |
| 100 | 2,66 | 2,81 | 2,95 | 3,10 | 3,23 | 3,46 | 3,71 |
| 110 | 2,66 | 2,81 | 2,96 | 3,11 | 3,24 | 3,47 | 3,73 |
| 120 | 2,67 | 2,82 | 2,97 | 3,12 | 3,25 | 3,49 | 3,75 |
| 140 | 2,68 | 2,84 | 2,99 | 3,13 | 3,27 | 3,51 | 3,78 |
| 150 | 2,69 | 2,84 | 3,00 | 3,14 | 3,28 | 3,52 | 3,80 |
| 160 | 2,69 | 2,85 | 3,01 | 3,15 | 3,29 | 3,52 | 3,81 |
| 180 | 2,70 | 2,86 | 3,01 | 3,15 | 3,30 | 3,53 | 3,83 |
| 200 | 2,71 | 2,87 | 3,02 | 3,16 | 3,31 | 3,55 | 3,85 |

Mit diesen Werten rechnen Kurs- und Prüfungsaufgaben. Für Zähnezahlen zwischen den Zeilen nimmt man die nächstliegende Zeile; von Zeile zu Zeile ändert sich $k$ nur um wenige Hundertstel. Die Kopfhöhe des Radzahns ist $h_\mathrm{a} = \frac{k}{2} \cdot m$. Die Werte gehören zum Spitzbogenzahn der Zykloidenverzahnung: Seine Flanke entsteht, wenn ein Kreis vom halben Durchmesser des Triebteilkreises außen auf dem Teilkreis des Rades abrollt (Epizykloide). Nachgerechnet liegen die Tabellenwerte bei rund 95 % der Höhe, in der sich die beiden Flanken zur Spitze treffen, wenn der Zahn auf dem Teilkreis eine halbe Teilung dick ist. Für die Fertigung gelten die Verzahnungsnormen der Uhrenindustrie (NHS, NIHS). Sie liefern je nach Norm und Profil etwas andere Werte als diese Tabelle, bei der Radverzahnung um einige Hundertstel bis wenige Zehntel; wer ein Rad fertigt, rechnet deshalb mit dem Normblatt.

## Modul aus dem gemessenen Kopfkreis

(2.19) NÄHERUNG GESELLE

$$m \approx \frac{d_\mathrm{a}}{z + k}$$

Der übliche Weg zum fehlenden Rad oder Trieb: am vorhandenen Partner die Zähne zählen, den Kopfkreis messen und den Modul berechnen. Das Ergebnis mit dem Achsabstand nach Formel (2.16) gegenprüfen.

**Gilt:** wie Formel (2.18). Für einen vorhandenen Trieb gilt Formel (2.20) entsprechend.

| | | |
|---|---|---|
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $d_\mathrm{a}$ | Kopfkreisdurchmesser (des Rades) | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Rades) | 1 |
| $k$ | Kopfzuschlag (des Rades: doppelte Kopfhöhe, in Modul gemessen) | 1 |

BEISPIEL Zu einem Rad fehlt der Trieb. Das Rad hat 64 Zähne und 10,06 mm Kopfkreis; es soll einen Trieb mit 8 Zähnen treiben, also $k = 2{,}9$.

Gegeben: $d_\mathrm{a} = 10{,}06\,\mathrm{mm}$; $z = 64$; $k = 2{,}9$

$$\begin{aligned} m &\approx \frac{d_\mathrm{a}}{z + k} \\ &= \frac{10{,}06\,\mathrm{mm}}{64 + 2{,}9} \\ &\approx 0{,}150\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Modul ist 0,15 mm. Der fehlende Trieb hat damit 1,2 mm Teilkreis, der Achsabstand ist 5,4 mm.

## Kopfkreis des Triebes

(2.20) NÄHERUNG MEISTER

$$d'_\mathrm{a} \approx m \cdot (z' + k')$$

Der Triebkopf arbeitet im Gehwerk nur kurz vor der Mittellinie mit. Er ist deshalb niedrig; beim halbrunden Kopf ist die Kopfhöhe gleich der halben Zahndicke. Allgemein ist die Kopfhöhe $h'_\mathrm{a} = \frac{k'}{2} \cdot m$.

**Gilt:** Uhrenverzahnung, Trieb wird getrieben. $k'$ aus den beiden Tabellen.

| | | |
|---|---|---|
| $d'_\mathrm{a}$ | Kopfkreisdurchmesser des Triebes | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 |
| $k'$ | Kopfzuschlag des Triebes (Tabelle) | 1 |

BEISPIEL Ein Trieb mit 8 Zähnen und Modul 0,15 mm bekommt halbrunde Köpfe; aus der Zahndicke folgt $k' = 1{,}05$.

Gegeben: $m = 0{,}15\,\mathrm{mm}$; $z' = 8$; $k' = 1{,}05$

$$\begin{aligned} d'_\mathrm{a} &\approx m \cdot (z' + k') \\ &= 0{,}15\,\mathrm{mm} \cdot (8 + 1{,}05) \\ &\approx 1{,}36\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Trieb hat 1,36 mm Außendurchmesser bei 1,2 mm Teilkreis. Mit dem gerundeten Tabellenwert $k' = 1{,}0$ ergeben sich 1,35 mm.

### Triebzahn der Uhrenverzahnung: Zahndicke und daraus gerechneter Kopfzuschlag (Richtwerte)

| Zähnezahl des Triebes | Zahndicke $s'$ | Kopfzuschlag $k'$ bei halbrundem Kopf |
|---|---|---|
| 6 bis 10 | rund ein Drittel der Teilung, $1{,}05 \cdot m$ | 1,05 |
| ab 11 | rund zwei Fünftel der Teilung, $1{,}25 \cdot m$ | 1,25 |

Beim halbrunden Kopf ist die Kopfhöhe die halbe Zahndicke; daraus folgen diese Werte. Die Grenze zwischen 10 und 11 Zähnen folgt der Verzahnungsnorm der Uhrenindustrie.

### Kopfzuschlag $k'$ des Triebes nach der Kopfform (gerundete Tabellenwerte der Kurs- und Prüfungsaufgaben)

| Kopfform des Triebzahns | Trieb mit 6 bis 10 Zähnen | Trieb ab 11 Zähnen |
|---|---|---|
| halbrund (rund gewälzt) | 1,0 | 1,2 |
| spitzbogig (spitz gewälzt) | 1,5 | 1,8 |

Die Werte für den halbrunden Kopf sind die abgerundeten Werte 1,05 und 1,25 der Tabelle darüber. Der Unterschied ändert den Kopfkreis nur um $0{,}05 \cdot m$, bei Modul 0,2 mm also um 0,01 mm. Die Grenze liegt wie in der Verzahnungsnorm der Uhrenindustrie zwischen 10 und 11 Zähnen: Bis 10 Zähne muss der Triebzahn dünn bleiben, damit der Radzahn in der Lücke Platz hat. Manche Kursunterlagen zählen den Trieb mit 10 Zähnen schon zur zweiten Gruppe; in der Prüfung gilt der Wert, den die Aufgabe oder ihre Tabelle nennt. Spitzbogige Köpfe sind höher; je nach Profil reichen sie bis etwa $k' = 2$.

## Fußkreis des Rades

(2.21) NÄHERUNG MEISTER

$$d_\mathrm{f} \approx m \cdot (z - \pi)$$

Die Fußhöhe des Radzahns ist etwa die halbe Teilung, $h_\mathrm{f} \approx \frac{\pi}{2} \cdot m$. So geht der Triebkopf frei durch die Lücke.

**Gilt:** Richtwert der Uhrenverzahnung. Die Fußtiefe des Rades ist unkritisch, solange der Triebkopf nicht aufsitzt.

| | | |
|---|---|---|
| $d_\mathrm{f}$ | Fußkreisdurchmesser (des Rades) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Rades) | 1 |

BEISPIEL Rad mit 80 Zähnen, Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$; $z = 80$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{f} &\approx m \cdot (z - \pi) \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot (80 - \pi) \\ &\approx 15{,}37\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Zahngrund liegt auf 15,37 mm Durchmesser. Die ganze Zahnhöhe ist damit rund 0,63 mm.

## Fußkreis des Triebes (Richtwert)

(2.22) NÄHERUNG GESELLE

$$d'_\mathrm{f} \approx m \cdot (z' - 4)$$

Die Fußhöhe des Triebzahns ist rund $2 \cdot m$. Das reicht für jeden Radkopf der Tabelle: Der höchste misst $1{,}93 \cdot m$, die üblichen rund $1{,}3 \cdot m$ bis $1{,}7 \cdot m$. Der Rest ist Kopfspiel.

**Gilt:** Richtwert der Uhrenverzahnung für Kurs- und Prüfungsaufgaben. Die folgende Formel rechnet genauer mit dem Kopfzuschlag des Gegenrades.

| | | |
|---|---|---|
| $d'_\mathrm{f}$ | Fußkreisdurchmesser des Triebes (Kerndurchmesser) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 |

BEISPIEL Ein Trieb mit 12 Zähnen hat den Modul 0,31 mm. Wie groß ist sein Fußkreis?

Gegeben: $m = 0{,}31\,\mathrm{mm}$; $z' = 12$

$$\begin{aligned} d'_\mathrm{f} &\approx m \cdot (z' - 4) \\ &= 0{,}31\,\mathrm{mm} \cdot (12 - 4) \\ &= 2{,}48\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

2,48 mm bei 3,72 mm Teilkreis.

## Fußkreis des Triebes

(2.23) VERTIEFUNG

$$d'_{\mathrm{f}} = m \cdot (z' - k) - 2 \cdot c$$

Die Lücke des Triebes muss den Kopf des Radzahns aufnehmen und darunter noch Luft lassen: Fußhöhe des Triebes gleich Kopfhöhe des Rades plus Kopfspiel.

| | | |
|---|---|---|
| $d'_{\mathrm{f}}$ | Fußkreisdurchmesser des Triebes (Kerndurchmesser) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 |
| $k$ | Kopfzuschlag (des Gegenrades) | 1 |
| $c$ | Kopfspiel zwischen Radkopf und Triebgrund (Richtwert $0{,}4 \cdot m$) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Trieb mit 10 Zähnen, Modul 0,2 mm, Gegenrad mit $k = 3{,}2$, Kopfspiel 0,08 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$; $z' = 10$; $k = 3{,}2$; $c = 0{,}08\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} d'_{\mathrm{f}} &= m \cdot (z' - k) - 2 \cdot c \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot (10 - 3{,}2) - 2 \cdot 0{,}08\,\mathrm{mm} \\ &= 1{,}20\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kern des Triebes misst 1,2 mm bei 2 mm Teilkreis. Ohne Kopfspiel wären es 1,36 mm; bei diesem Maß säße der Radzahn schon auf dem Grund auf.

## Zahndicke des Rades

(2.24) GESELLE

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2}$$

Zahn und Lücke teilen sich die Teilung: $p = s + e$. Beim Rad sind beide gleich groß, die Zahndicke ist also die halbe Teilung.

**Gilt:** Rad der Uhrenverzahnung (Richtwert). Triebzähne sind dünner, siehe Tabelle bei Formel (2.20).

| | | |
|---|---|---|
| $s$ | Zahndicke (des Rades auf dem Teilkreis) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi \cdot m}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 0{,}2\,\mathrm{mm}}{2} \\ &\approx 0{,}314\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Zahn und Lücke des Rades sind auf dem Teilkreis je 0,314 mm breit.

## Flankenspiel

(2.25) MEISTER

$$j = p - s - s'$$

Der Triebzahn ist schmaler als die Lücke des Rades. Der Unterschied ist das Flankenspiel. Es lässt Raum für Öl, Schmutz, Teilungs- und Rundlauffehler.

**Gilt:** Messung auf dem Teilkreis bei richtigem Achsabstand.

| | | |
|---|---|---|
| $j$ | Flankenspiel auf dem Teilkreis | $\mathrm{mm}$ |
| $p$ | Teilung (Abstand von Zahn zu Zahn, als Bogen auf dem Teilkreis) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Zahndicke (des Rades auf dem Teilkreis) | $\mathrm{mm}$ |
| $s'$ | Zahndicke des Triebes auf dem Teilkreis | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Modul 0,2 mm: Teilung 0,628 mm, Zahndicke des Rades 0,314 mm, des Triebes mit 8 Zähnen 0,209 mm.

Gegeben: $p = 0{,}628\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}314\,\mathrm{mm}$; $s' = 0{,}209\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} j &= p - s - s' \\ &= 0{,}628\,\mathrm{mm} - 0{,}314\,\mathrm{mm} - 0{,}209\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}105\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Zwischen den Flanken bleiben rund 0,1 mm Luft, ein Sechstel der Teilung.

**Eingriffstiefe.** Stehen die Achsen zu eng, schneiden sich die Teilkreise: Der Eingriff ist zu tief, die Zähne drängen gegeneinander, das Werk läuft schwer und klemmt im ungünstigen Fall. Stehen sie zu weit, ist der Eingriff zu flach: Die Zahnspitzen führen, die Kraft wird ungleichmäßig übertragen und der Eingriff fällt hörbar. Geprüft wird mit dem Eingriffszirkel oder durch Fühlen des Zahnspiels; berichtigt wird über den Achsabstand oder mit einem passenden Trieb.

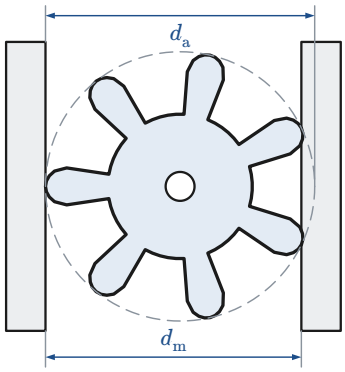



**Abb. 2.10** Ungerade Zähnezahl: Das Messmaß $d_\mathrm{m}$ ist kleiner als der Kopfkreis $d_\mathrm{a}$

### Kopfkreis bei ungerader Zähnezahl messen

(2.26) MEISTER

$$d_\mathrm{a} = \frac{d_\mathrm{m}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{z}\right)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $d_\mathrm{a}$ | Kopfkreisdurchmesser | mm |
| $d_\mathrm{m}$ | Messmaß zwischen den Messflächen | mm |
| $z$ | Zähnezahl (ungerade) | 1 |

Bei ungerader Zähnezahl steht jedem Zahn eine Lücke gegenüber. Die eine Messfläche liegt auf einer Zahnspitze, die andere auf zweien. Das Messmaß ist deshalb kleiner als der Kopfkreis.

**Gilt:** ungerade Zähnezahl; Messflächen eben, parallel und breiter als eine Teilung. Bei gerader Zähnezahl wird der Kopfkreis direkt gemessen.

BEISPIEL Ein Trieb mit 7 Zähnen misst zwischen den Schenkeln des Messschiebers 1,62 mm.

Gegeben: $d_\mathrm{m} = 1{,}62\,\mathrm{mm}; \quad z = 7$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{a} &= \frac{d_\mathrm{m}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{z}\right)} \\ &= \frac{1{,}62\,\mathrm{mm}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{7}\right)} \\ &\approx 1{,}70\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kopfkreis ist 0,08 mm größer als das Messmaß. Bei 15 Zähnen macht der Unterschied noch rund 1 % aus, ab etwa 60 Zähnen weniger als 0,1 %.

**Evolventenverzahnung.** Die Verzahnung des Maschinenbaus findet sich in der Uhr dort, wo ins Langsame übersetzt wird oder die Kraftrichtung wechselt: im Aufzug, in der Zeigerstellung, im Automatikgetriebe und in Kalenderwerken. Ihre Flanken sind Evolventen, also Abwickelkurven eines Fadens vom Grundkreis. Die Verzahnung verträgt kleine Fehler im Achsabstand: Die Drehung wird trotzdem gleichförmig übertragen. Teilung, Teilkreis und Achsabstand berechnen sich wie oben.

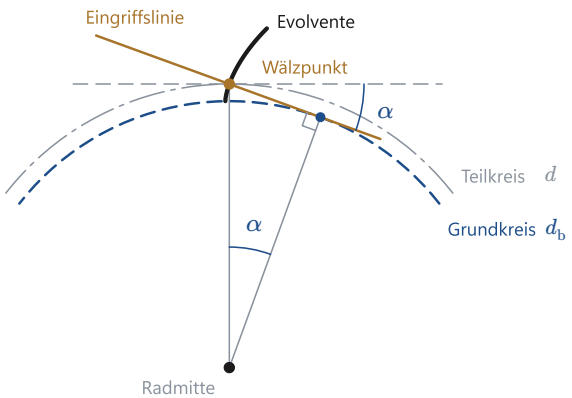



**Abb. 2.11** Evolventenverzahnung: Die Eingriffslinie berührt den Grundkreis und ist um den Eingriffswinkel $\alpha$ geneigt

## Kopfkreis der Evolventenverzahnung

(2.27) MEISTER

$$d_\mathrm{a} = m \cdot (z + 2)$$

UMGESTELLT $m = \dfrac{d_\mathrm{a}}{z + 2}$

| | | |
|---|---|---|
| $d_\mathrm{a}$ | Kopfkreisdurchmesser | mm |
| $m$ | Modul | mm |
| $z$ | Zähnezahl | 1 |

Die Kopfhöhe ist gleich dem Modul. Umgestellt liefert die Formel den Modul eines Evolventenrades aus Kopfkreis und Zähnezahl.

**Gilt:** Normalverzahnung ohne Profilverschiebung, Eingriffswinkel 20°, Kopfhöhe $1 \cdot m$.

BEISPIEL Ein Rad mit 24 Zähnen und Modul 0,5 mm.

Gegeben: $m = 0{,}5\,\mathrm{mm}$; $z = 24$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{a} &= m \cdot (z + 2) \\ &= 0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot (24 + 2) \\ &= 13\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Kopfkreis 13 mm bei 12 mm Teilkreis.

## Fußkreis der Evolventenverzahnung

(2.28) MEISTER

$$d_\mathrm{f} = m \cdot (z - 2{,}5)$$

| | | |
|---|---|---|
| $d_\mathrm{f}$ | Fußkreisdurchmesser | mm |
| $m$ | Modul | mm |
| $z$ | Zähnezahl | 1 |

Die Fußhöhe ist das 1,25-Fache des Moduls: Kopfhöhe des Gegenrades plus $0{,}25 \cdot m$ Kopfspiel.

**Gilt:** Normalverzahnung ohne Profilverschiebung. In der Feinwerktechnik sind auch größere Fußhöhen üblich; dann steht statt 2,5 der doppelte Fußhöhenfaktor.

BEISPIEL Dasselbe Rad: 24 Zähne, Modul 0,5 mm.

Gegeben: $m = 0{,}5\,\mathrm{mm}$; $z = 24$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{f} &= m \cdot (z - 2{,}5) \\ &= 0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot (24 - 2{,}5) \\ &= 10{,}75\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Fußkreis 10,75 mm; die Zahnhöhe ist $2{,}25 \cdot m$, also 1,125 mm.

## Grundkreis

(2.29) VERTIEFUNG

$$d_\mathrm{b} = d \cdot \cos\alpha$$

| | | |
|---|---|---|
| $d_\mathrm{b}$ | Grundkreisdurchmesser | mm |
| $d$ | Teilkreisdurchmesser | mm |
| $\alpha$ | Eingriffswinkel (genormt 20°) | ° |

Vom Grundkreis wird die Evolvente abgewickelt. Die Zähne berühren sich immer auf der Eingriffslinie, die beide Grundkreise berührt und um den Eingriffswinkel gegen die gemeinsame Tangente der Teilkreise geneigt ist.

BEISPIEL Teilkreis 12 mm, Eingriffswinkel 20°.

Gegeben: $d = 12\,\mathrm{mm}$; $\alpha = 20^\circ$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{b} &= d \cdot \cos\alpha \\ &= 12\,\mathrm{mm} \cdot \cos(20^\circ) \\ &\approx 11{,}28\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Grundkreis liegt 0,36 mm unter dem Teilkreis. Unterhalb des Grundkreises gibt es keine Evolvente.

## 2.5 Schlagwerk

Das Schlagwerk ist ein eigenes Laufwerk mit Antrieb, Räderwerk und Windfang. Das Gehwerk löst es aus, ein Zählwerk bestimmt die Zahl der Schläge: die Schlossscheibe oder der Rechen.

### Summe der Stundenschläge

(2.30) MEISTER

$$N = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

Die Stundenschläge 1 + 2 + 3 und so weiter addieren sich nach der Summenformel.

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Anzahl (der Schläge für die Stunden 1 bis $k$) | 1 |
| $k$ | letzte geschlagene Stunde | 1 |

BEISPIEL Wie viele Schläge fallen von 1 Uhr bis 12 Uhr?

Gegeben: $k = 12$

$$\begin{aligned} N &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \\ &= \frac{12 \cdot (12+1)}{2} \\ &= 78 \end{aligned}$$

78 Schläge in 12 Stunden, 156 am Tag.

### Schläge je Tag

(2.31) MEISTER

$$N_\mathrm{d} = 2 \cdot (N_{12} + 12 \cdot b)$$

Der Halbstundenschlag bringt in 12 Stunden 12 Schläge dazu.

**Gilt:** Stundenschlag mit höchstens einem Schlag zur halben Stunde. Viertelschlagwerke haben ein eigenes Laufwerk und werden getrennt gerechnet.

| | | |
|---|---|---|
| $N_\mathrm{d}$ | Schläge in 24 Stunden | 1 |
| $N_{12}$ | Stundenschläge in 12 Stunden (78) | 1 |
| $b$ | Schläge zu jeder halben Stunde (0 oder 1) | 1 |

BEISPIEL Ein Schlagwerk schlägt die Stunden und zu jeder halben Stunde einen Schlag.

Gegeben: $N_{12} = 78; \quad b = 1$

$$\begin{aligned} N_\mathrm{d} &= 2 \cdot (N_{12} + 12 \cdot b) \\ &= 2 \cdot (78 + 12 \cdot 1) \\ &= 180 \end{aligned}$$

180 Schläge am Tag: 90 in 12 Stunden statt 78.

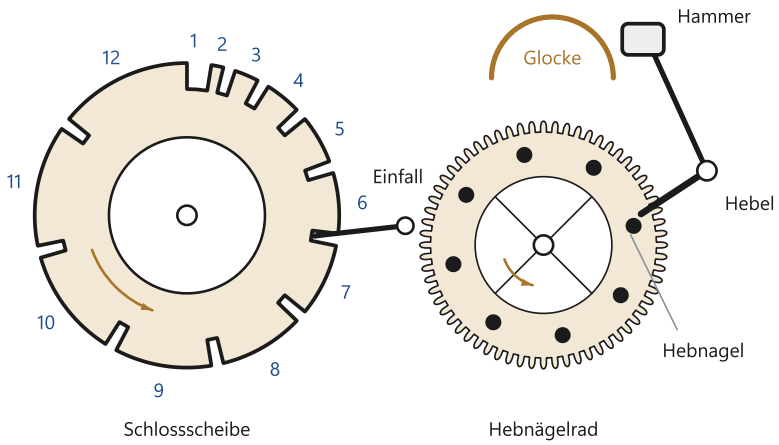



**Abb. 2.12** Schlossscheibe mit 78 Teilen (jede Stunde belegt so viele Teile, wie sie Schläge hat) und Hebnägelrad mit Hammer

### Schlossscheibe

(2.32) MEISTER

$$N_{\mathrm{Sch}} = \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{Sch}}}{z'_{\mathrm{Sch}}}$$

Die Schlossscheibe zählt die Schläge. Sie dreht in 12 Stunden einmal; ihr Umfang ist in 78 oder 90 Teile geteilt, und nach jeder Schlagfolge fällt der Einfall in einen Einschnitt und hält das Laufwerk an.

**Gilt:** Schlossscheibe wird von der Welle des Hebnägelrads angetrieben und dreht in 12 Stunden einmal.

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{Sch}}$ | Schläge je Umdrehung der Schlossscheibe (78, mit Halbstundenschlag 90) | 1 |
| $z_{\mathrm{N}}$ | Zahl der Hebnägel | 1 |
| $z_{\mathrm{Sch}}$ | Zähnezahl des Schlossscheibenrads | 1 |
| $z'_{\mathrm{Sch}}$ | Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads, der die Schlossscheibe treibt | 1 |

BEISPIEL Ein Hebnägelrad trägt 10 Hebnägel. Auf seiner Welle sitzt ein Trieb mit 8 Zähnen, der ein Schlossscheibenrad mit 72 Zähnen treibt.

Gegeben: $z_{\mathrm{N}} = 10;\quad z_{\mathrm{Sch}} = 72;\quad z'_{\mathrm{Sch}} = 8$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Sch}} &= \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{Sch}}}{z'_{\mathrm{Sch}}} \\ &= \frac{10 \cdot 72}{8} \\ &= 90 \end{aligned}$$

90 Schläge je Umdrehung: ein Schlagwerk mit Halbstundenschlag. Für 78 Schläge passen 13 Hebnägel mit der Untersetzung 6.

Beim Rechenschlagwerk bestimmt die Stundenstaffel, eine Stufenscheibe mit 12 Stufen am Stundenrad, wie tief der Rechen fällt. Bei jedem Schlag hebt der Schöpfer den Rechen um einen Zahn zurück, bis das Laufwerk wieder gesperrt ist. Anders als die Schlossscheibe kann das Rechenschlagwerk gegenüber den Zeigern nicht außer Tritt geraten.

### Schläge je Umdrehung des Antriebsrads

(2.33) MEISTER

$$N_{\mathrm{A}} = \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{A}}}{z'_{\mathrm{N}}}$$

Jeder Hebnagel hebt den Hammer einmal. Das Hebnägelrad dreht um die Übersetzung schneller als das Antriebsrad.

**Gilt:** Antriebsrad greift direkt in den Trieb des Hebnägelrads. Liegt ein Beisatzrad dazwischen, kommt dessen Übersetzung als Faktor dazu.

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{A}}$ | Schläge je Umdrehung des Antriebsrads (Walzenrad oder Federhaus) | 1 |
| $z_{\mathrm{N}}$ | Zahl der Hebnägel | 1 |
| $z_{\mathrm{A}}$ | Zähnezahl des Antriebsrads | 1 |
| $z'_{\mathrm{N}}$ | Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads | 1 |

BEISPIEL Ein Walzenrad mit 96 Zähnen treibt den Trieb (8 Zähne) eines Hebnägelrads mit 8 Hebnägeln.

Gegeben: $z_{\mathrm{N}} = 8;\quad z_{\mathrm{A}} = 96;\quad z'_{\mathrm{N}} = 8$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{A}} &= \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{A}}}{z'_{\mathrm{N}}} \\ &= \frac{8 \cdot 96}{8} \\ &= 96 \end{aligned}$$

Je Umdrehung der Walze fallen 96 Schläge.

### Umdrehungen je Aufzug

(2.34) MEISTER

$$U = \frac{t_\mathrm{G} \cdot n_\mathrm{d}}{N_\mathrm{A}}$$

Die Zahl der Schläge je Tag liefert Formel (2.31). Gehwerk und Schlagwerk werden so ausgelegt, dass beide mit einem Aufzug gleich lange laufen.

| | | |
|---|---|---|
| $U$ | nötige Umdrehungen des Antriebsrads | 1 |
| $t_\mathrm{G}$ | Gangdauer | $\mathrm{d}$ |
| $n_\mathrm{d}$ | Schläge je Tag | $\frac{1}{\mathrm{d}}$ |
| $N_\mathrm{A}$ | Schläge je Umdrehung des Antriebsrads | 1 |

BEISPIEL Das Schlagwerk aus dem Beispiel davor soll 8 Tage laufen und schlägt 180-mal am Tag.

Gegeben: $t_\mathrm{G} = 8\,\mathrm{d}$; $n_\mathrm{d} = 180\,\frac{1}{\mathrm{d}}$; $N_\mathrm{A} = 96$

$$\begin{aligned} U &= \frac{t_\mathrm{G} \cdot n_\mathrm{d}}{N_\mathrm{A}} \\ &= \frac{8\,\mathrm{d} \cdot 180\,\frac{1}{\mathrm{d}}}{96} \\ &= 15 \end{aligned}$$

In 8 Tagen fallen 1440 Schläge; die Walze dreht dafür 15-mal. Mit der Seildicke und dem Walzendurchmesser folgt daraus die Fallhöhe des Gewichts (Kapitel 1).

### Umdrehungen des Windfangs je Schlag

(2.35) MEISTER

$$U_\mathrm{W} = \frac{i_\mathrm{W}}{z_\mathrm{N}}$$

Der Windfang bremst das Laufwerk durch den Luftwiderstand seiner Flügel. Weil der Widerstand mit der Drehzahl stark wächst, stellt sich eine gleichmäßige Geschwindigkeit ein, und die Schläge folgen in gleichem Abstand. Größere oder steiler gestellte Flügel machen den Schlag langsamer.

| | | |
|---|---|---|
| $U_\mathrm{W}$ | Umdrehungen des Windfangs je Schlag | 1 |
| $i_\mathrm{W}$ | Übersetzung vom Hebnägelrad zum Windfang | 1 |
| $z_\mathrm{N}$ | Zahl der Hebnägel | 1 |

BEISPIEL Vom Hebnägelrad (64 Zähne, 8 Hebnägel) zum Windfang laufen drei Eingriffe: 64 zu 8, 56 zu 7 und 49 zu 7. Die Übersetzung ist $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

Gegeben: $i_\mathrm{W} = 448$; $z_\mathrm{N} = 8$

$$\begin{aligned} U_\mathrm{W} &= \frac{i_\mathrm{W}}{z_\mathrm{N}} \\ &= \frac{448}{8} \\ &= 56 \end{aligned}$$

Der Windfang dreht 56-mal je Schlag.

## 2.6 Kalender und Mondphase

Kalenderwerke zählen Tage. Ihre Räder werden nicht stetig angetrieben, sondern einmal am Tag um einen Zahn weitergeschaltet; die Zähnezahl ist dann die Zahl der Tage je Umlauf.

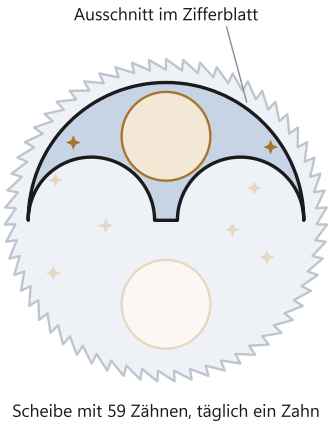



**Abb. 2.13** Mondphasenscheibe hinter dem Ausschnitt im Zifferblatt

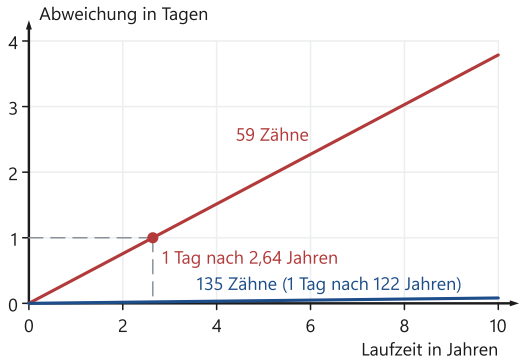



**Abb. 2.14** Abweichung der Mondphasenanzeige vom mittleren Mond

## Mondphasenscheibe

(2.36) MEISTER

$$t_\mathrm{L} = \frac{z \cdot t_\mathrm{s}}{k}$$

Von Neumond zu Neumond vergehen im Mittel 29,530 59 Tage, der synodische Monat. Weil ein Rad keine halben Zähne haben kann, trägt die Scheibe zwei Monde und 59 Zähne.

| | | |
|---|---|---|
| $t_\mathrm{L}$ | angezeigte Dauer eines Mondumlaufs | d |
| $z$ | Zähnezahl (der Mondscheibe) | 1 |
| $t_\mathrm{s}$ | Zeit zwischen zwei Schaltungen (ein Zahn je Tag) | d |
| $k$ | Anzahl (der Monde auf der Scheibe) | 1 |

BEISPIEL Eine Mondscheibe mit 59 Zähnen und zwei Monden wird täglich um einen Zahn geschaltet.

Gegeben: $z = 59;\quad t_\mathrm{s} = 1\,\mathrm{d};\quad k = 2$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{L} &= \frac{z \cdot t_\mathrm{s}}{k} \\ &= \frac{59 \cdot 1\,\mathrm{d}}{2} \\ &= 29{,}5\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Die Anzeige durchläuft alle Phasen in 29,5 Tagen. Der Mond braucht im Mittel 29,530 59 Tage, die Anzeige läuft also etwas zu schnell.

## Laufzeit bis zur Abweichung der Mondphase

(2.37) MEISTER

$$t_{\mathrm{F}} = \frac{\Delta t \cdot t_{\mathrm{L}}}{\left| T_{\mathrm{syn}} - t_{\mathrm{L}} \right|}$$

Je Umlauf weicht die Anzeige um den Unterschied zwischen angezeigtem und wahrem Mondumlauf ab. Die Abweichungen summieren sich.

**Gilt:** mittlerer Mondlauf. Der wahre Mond weicht davon im Lauf eines Monats um bis zu rund einen halben Tag ab.

| | | |
|---|---|---|
| $t_{\mathrm{F}}$ | Laufzeit, bis die Anzeige um $\Delta t$ abweicht | d |
| $\Delta t$ | Abweichung der Anzeige vom wahren Mondalter | d |
| $t_{\mathrm{L}}$ | angezeigte Dauer eines Mondumlaufs | d |
| $T_{\mathrm{syn}}$ | synodischer Monat (Mittelwert 29,530 59 d, Abschnitt 8.1) | d |

BEISPIEL Nach welcher Zeit weicht die Anzeige mit 59 Zähnen um einen Tag ab?

Gegeben: $\Delta t = 1\,\mathrm{d}$; $t_{\mathrm{L}} = 29{,}5\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{syn}} = 29{,}530\,59\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{F}} &= \frac{\Delta t \cdot t_{\mathrm{L}}}{\left| T_{\mathrm{syn}} - t_{\mathrm{L}} \right|} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 29{,}5\,\mathrm{d}}{\left| 29{,}530\,59\,\mathrm{d} - 29{,}5\,\mathrm{d} \right|} \\ &\approx 964\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Nach 964 Tagen, das sind rund 2,6 Jahre, geht die Anzeige einen Tag vor und muss berichtigt werden.

## Genaue Mondphase mit Übersetzung

(2.38) VERTIEFUNG

$$t_{\mathrm{L}} = \frac{t_{\mathrm{A}} \cdot z}{z' \cdot k}$$

Eine Übersetzung zwischen Schaltrad und Mondscheibe trifft den synodischen Monat viel genauer als die einfache Scheibe mit 59 Zähnen.

**Gilt:** Mondscheibe wird über Räder angetrieben. Die Scheibe mit 135 Zähnen ist verbreitet; der Antrieb im Beispiel ist ein möglicher Zähnezahlsatz, andere sind ausgeführt.

| | | |
|---|---|---|
| $t_{\mathrm{L}}$ | angezeigte Dauer eines Mondumlaufs | d |
| $t_{\mathrm{A}}$ | Umlaufzeit der treibenden Welle (Stern mit 7 Zähnen, täglich geschaltet: 7 d) | d |
| $z$ | Zähnezahl (der Mondscheibe) | 1 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes (treibt die Mondscheibe) | 1 |
| $k$ | Anzahl (der Monde auf der Scheibe) | 1 |

BEISPIEL Ein Stern mit 7 Zähnen wird täglich geschaltet. Auf seiner Welle sitzt ein Trieb mit 16 Zähnen, der über ein Zwischenrad eine Mondscheibe mit 135 Zähnen und zwei Monden treibt.

Gegeben: $t_{\mathrm{A}} = 7\,\mathrm{d}$; $z = 135$; $z' = 16$; $k = 2$

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{L}} &= \frac{t_{\mathrm{A}} \cdot z}{z' \cdot k} \\ &= \frac{7\,\mathrm{d} \cdot 135}{16 \cdot 2} \\ &= 29{,}531\,25\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Die Anzeige ist je Umlauf nur noch 57 s zu langsam. Nach Formel (2.37) mit $T_{\mathrm{syn}} = 29{,}530\,59\,\mathrm{d}$ dauert es 44 744 Tage, gut 122 Jahre, bis sie um einen Tag nachgeht.

### Zählräder der Kalenderanzeigen

| Anzeige | Rad | schaltet | ein Umlauf in |
|---|---|---|---|
| Datum | Datumsring oder Datumsrad mit 31 Zähnen | täglich | 31 Tagen |
| Wochentag | Stern mit 7 Zähnen | täglich | 7 Tagen |
| Monat | Stern mit 12 Zähnen | monatlich | 1 Jahr |
| Mondphase | Scheibe mit 59 Zähnen und zwei Monden | täglich | 59 Tagen |
| Ewiger Kalender | Programmrad mit 48 Monatsstufen | monatlich | 4 Jahren (1461 Tagen) |

Der einfache Kalender wird fünfmal im Jahr von Hand weitergestellt, nämlich nach jedem Monat mit weniger als 31 Tagen. Der Jahreskalender braucht eine Korrektur am Ende des Februars. Der ewige Kalender kennt auch die Schaltjahre; er muss erst im Jahr 2100 berichtigt werden, das kein Schaltjahr ist.

Das Schaltrad des Datums dreht einmal in 24 Stunden und wird vom Stundenrad mit der Untersetzung 2 zu 1 angetrieben, Formel (2.12). Schaltjahre, die Länge des Jahres und die Zeitgleichung stehen in Kapitel 8.

## 2.7 Wirkungsgrad des Räderwerks

Jeder Eingriff und jedes Lager verbraucht einen Teil der Antriebskraft durch Reibung. Der Wirkungsgrad sagt, welcher Anteil des Drehmoments übrig bleibt.

### Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks

(2.39) MEISTER

$$\eta_{\text{ges}} = \eta^{k}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\eta_{\text{ges}}$ | Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks | 1 |
| $\eta$ | Wirkungsgrad (je Eingriff; mit Lagerreibung, Richtwert 0,90 bis 0,95) | 1 |
| $k$ | Anzahl (der Eingriffe) | 1 |

Die Wirkungsgrade hintereinander liegender Eingriffe werden multipliziert. Sind sie verschieden, steht statt der Potenz das Produkt der einzelnen Werte. Die allgemeine Form steht in Formel (XL 2.30).

**Gilt:** Richtwerte für saubere, geölte Werke. Triebe mit wenigen Zähnen, trockene Lager und zu tiefe oder zu flache Eingriffe drücken den Wirkungsgrad deutlich.

BEISPIEL Vom Federhaus bis zum Hemmungsrad liegen vier Eingriffe mit je 0,95 Wirkungsgrad.

Gegeben: $\eta = 0{,}95; \quad k = 4$

$$\begin{aligned}\eta_{\text{ges}} &= \eta^{k} \\ &= 0{,}95^{4} \\ &\approx 0{,}81\end{aligned}$$

Rund ein Fünftel des Drehmoments geht im Räderwerk verloren. Bei 0,90 je Eingriff wäre es schon ein Drittel.

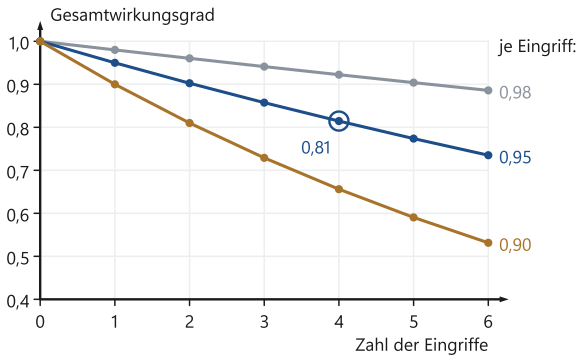



**Abb. 2.15** Gesamtwirkungsgrad nach der Zahl der Eingriffe

## Drehmoment am Hemmungsrad

(2.40) MEISTER

$$M_{\mathrm{H}} = \frac{M_{\mathrm{F}} \cdot \eta_{\mathrm{ges}}}{i_{\mathrm{ges}}}$$

Das Drehmoment fällt von Welle zu Welle um die Übersetzung und um die Reibungsverluste (Abb. 2.4).

| | | |
|---|---|---|
| $M_{\mathrm{H}}$ | Drehmoment am Hemmungsrad | $\mu\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $M_{\mathrm{F}}$ | Drehmoment am Federhaus | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |
| $\eta_{\mathrm{ges}}$ | Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks | 1 |
| $i_{\mathrm{ges}}$ | Gesamtübersetzung (vom Federhaus zum Hemmungsrad) | 1 |

BEISPIEL Ein Federhaus gibt 8 N·mm ab. Die Übersetzung zum Hemmungsrad ist $6 \cdot 600 = 3600$, der Gesamtwirkungsgrad 0,81.

Gegeben: $M_{\mathrm{F}} = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\eta_{\mathrm{ges}} = 0{,}81$; $i_{\mathrm{ges}} = 3600$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{H}} &= \frac{M_{\mathrm{F}} \cdot \eta_{\mathrm{ges}}}{i_{\mathrm{ges}}} \\ &= \frac{8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 0{,}81}{3600} \\ &= 1{,}8\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

Am Hemmungsrad bleiben 1,8 µN·m, gut ein Fünftausendstel des Federmoments. Deshalb bringt schon wenig Schmutz an den schnellen Wellen ein Werk zum Stehen.

## Wirkungsgrad aus gemessenen Drehmomenten

(2.41) VERTIEFUNG

$$\eta_{\mathrm{ges}} = \frac{M_{\mathrm{H}} \cdot i_{\mathrm{ges}}}{M_{\mathrm{F}}}$$

Ohne Reibung käme am Hemmungsrad das Federmoment geteilt durch die Übersetzung an. Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis des gemessenen zu diesem idealen Wert.

| | | |
|---|---|---|
| $\eta_{\mathrm{ges}}$ | Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks | 1 |
| $M_{\mathrm{H}}$ | Drehmoment am Hemmungsrad | $\mu\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $i_{\mathrm{ges}}$ | Gesamtübersetzung (vom Federhaus zum Hemmungsrad) | 1 |
| $M_{\mathrm{F}}$ | Drehmoment am Federhaus | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ |

BEISPIEL An einem Werk werden 8 N·mm am Federhaus und 1,7 µN·m am Hemmungsrad gemessen; die Übersetzung ist 3600.

Gegeben: $M_{\mathrm{H}} = 1{,}7\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $i_{\mathrm{ges}} = 3600$; $M_{\mathrm{F}} = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{ges}} &= \frac{M_{\mathrm{H}} \cdot i_{\mathrm{ges}}}{M_{\mathrm{F}}} \\ &= \frac{1{,}7\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot 3600}{8\,\mathrm{N{\cdot}mm}} \\ &= 0{,}765 \end{aligned}$$

Das Räderwerk überträgt gut drei Viertel des Drehmoments. Das entspricht 0,935 je Eingriff bei vier Eingriffen.

# 3 Gangregler: Unruh und Spirale

Unruh und Spirale bilden den Gangregler der Kleinuhr. Die Unruh ist die träge Masse, die Spirale die Feder, die sie in die Ruhelage zurückholt. Wie schnell beide zusammen schwingen, bestimmen nur zwei Größen: das Trägheitsmoment der Unruh und das Richtmoment der Spirale.

Fast alle Regulierformeln dieses Kapitels folgen aus einer Regel: Die Schwingungsdauer wächst mit der Wurzel aus dem Trägheitsmoment und fällt mit der Wurzel aus dem Richtmoment. Ein Prozent mehr Trägheitsmoment oder ein Prozent weniger Richtmoment macht die Uhr um ein halbes Prozent langsamer, das sind 432 s am Tag. In diesem Kapitel steht $N$ für eine Anzahl (Windungen der Spirale, gleiche Schrauben am Reif), $W$ für die Energie und $P$ für die Leistung.

## 3.1 Schwingung der Unruh

Die Unruh schwingt um ihre Ruhelage hin und her. Eine Schwingung ist hin und zurück; die Uhr tickt dabei zweimal, denn jeder Schlag ist eine Halbschwingung.

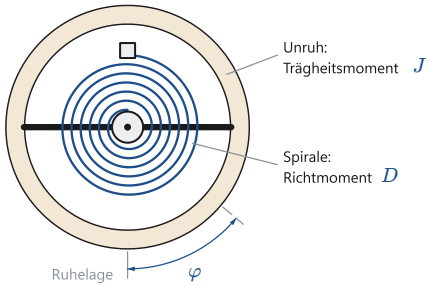



**Abb. 3.1** Unruh mit Spirale: Die Unruh bringt das Trägheitsmoment $J$, die Spirale das Richtmoment $D$

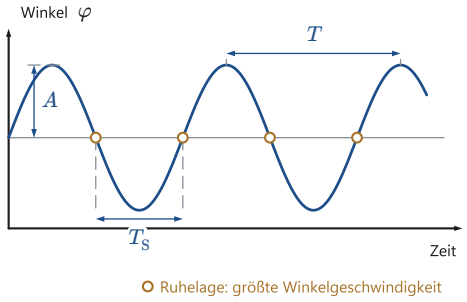



**Abb. 3.2** Winkel der Unruh über der Zeit: Amplitude $A$, Schwingungsdauer $T$, Schlagdauer $T_S = \frac{1}{2}T$

## Schwingungsdauer der Unruh

(3.1) GESELLE

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$$

UMGESTELLT $$D = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J}{T^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | Schwingungsdauer (volle Schwingung, hin und zurück) | $\mathrm{s}$ |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh; mit allem, was mitschwingt) | $\mathrm{mg \cdot cm^2}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale; Drehmoment je Winkel) | $\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |

Eine trägere Unruh schwingt langsamer, eine stärkere Spirale schneller. Beide Größen stehen unter der Wurzel: Vierfaches Trägheitsmoment verdoppelt die Schwingungsdauer.

**Gilt:** Rückstellmoment der Spirale proportional zum Winkel, ohne Reibung und ohne Einfluss der Hemmung. Zu $J$ gehören Reif, Schenkel, Welle, Doppelscheibe und Spiralrolle.

**Gut zu wissen:** Die Amplitude kommt in der Formel nicht vor. Ein idealer Gangregler schwingt bei kleinem und großem Ausschlag gleich schnell; diese Eigenschaft heißt Isochronismus (Abschnitt 3.7).

BEISPIEL Eine Unruh hat das Trägheitsmoment $10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$, ihre Spirale das Richtmoment $0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Wie lange dauert eine Schwingung?

Gegeben: $J = 10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$; $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}}{0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}}} \\ &\approx 0{,}250\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Eine Schwingung dauert eine Viertelsekunde. Die Unruh macht also 4 Schwingungen und 8 Schläge je Sekunde.

## Frequenz der Unruh

(3.2) GESELLE

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{J}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $f$ | Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde) | $\mathrm{Hz}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh) | $\mathrm{mg \cdot cm^2}$ |

Die Frequenz ist der Kehrwert der Schwingungsdauer: $f = \frac{1}{T}$.

**Gilt:** wie bei Formel (3.1).

BEISPIEL Welche Frequenz hat der Gangregler aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $J = 10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{J}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}}{10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}}} \\ &\approx 4{,}00\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

4 Hz, die übliche Frequenz heutiger Armbanduhren.

## Schlagzahl aus der Frequenz

(3.3) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot f$$

UMGESTELLT $f = \dfrac{n_\mathrm{h}}{2}$

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $f$ | Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde) | $\mathrm{Hz}$ |

Je Schwingung schlägt die Uhr zweimal. Die Schlagzahl wird bei Kleinuhren in Halbschwingungen je Stunde angegeben (A/h, A für Alternanz). Mit der Schlagdauer steht die Formel schon in Abschnitt XL 1.1.

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 3 Hz. Welche Schlagzahl ist das?

Gegeben: $f = 3\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= 2 \cdot f \\ &= 2 \cdot 3\,\mathrm{Hz} \\ &= 6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &\approx 21\,600\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

21 600 Halbschwingungen je Stunde. Die Schlagzahl steht im Datenblatt des Kalibers, und die Zeitwaage rechnet mit ihr.

### Gebräuchliche Schlagzahlen

| Schlagzahl $n_\mathrm{h}$ in $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Schläge je Sekunde | Frequenz $f$ in Hz | Schwingungsdauer $T$ in s | Schlagdauer $T_\mathrm{S}$ in s |
|---|---|---|---|---|
| 18 000 | 5 | 2,5 | 0,4 | 0,2 |
| 19 800 | 5,5 | 2,75 | 0,3636 | 0,1818 |
| 21 600 | 6 | 3 | 0,3333 | 0,1667 |
| 25 200 | 7 | 3,5 | 0,2857 | 0,1429 |
| 28 800 | 8 | 4 | 0,25 | 0,125 |
| 36 000 | 10 | 5 | 0,2 | 0,1 |

Die Schlagdauer $T_\mathrm{S}$ ist die Dauer einer Halbschwingung, also die halbe Schwingungsdauer.

## Kreisfrequenz

(3.4) MEISTER

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

| | | |
|---|---|---|
| $\omega$ | Kreisfrequenz | $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ |
| $f$ | Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde) | $\mathrm{Hz}$ |

Die Kreisfrequenz ist die Frequenz im Bogenmaß: $2\pi$ je Schwingung. Für die Unruh gilt auch $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$.

BEISPIEL Wie groß ist die Kreisfrequenz bei 4 Hz?

Gegeben: $f = 4\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 4\,\mathrm{Hz} \\ &\approx 25{,}1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund 25,1 rad je Sekunde. Mit dieser Zahl rechnen die folgenden Formeln.

### Winkel der Unruh über der Zeit

(3.5) MEISTER

$$\varphi = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Unruh schwingt sinusförmig: In der Ruhelage ist sie am schnellsten, an den Umkehrpunkten steht sie einen Augenblick still.

**Gilt:** freie, ungedämpfte Schwingung. Das Produkt $\omega \cdot t$ ist ein Winkel im Bogenmaß; der Taschenrechner muss für den Sinus auf rad stehen.

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi$ | Winkel (der Unruh gegen die Ruhelage) | $^\circ$ |
| $A$ | Amplitude (größter Winkel gegen die Ruhelage) | $^\circ$ |
| $\omega$ | Kreisfrequenz | $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| $t$ | Zeit (seit dem Durchgang durch die Ruhelage) | $\text{s}$ |

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 4 Hz ($\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) und 270° Amplitude. Wo steht sie 0,02 s nach dem Durchgang durch die Ruhelage?

Gegeben: $A = 270^\circ$; $\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $t = 0{,}02\,\text{s}$

$$\begin{aligned}\varphi &= A \cdot \sin(\omega \cdot t)\\ &= 270^\circ \cdot \sin\left(25{,}13\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0{,}02\,\text{s}\right)\\ &\approx 130^\circ\end{aligned}$$

Nach 0,02 s hat die Unruh schon rund 130° zurückgelegt, fast die Hälfte der Amplitude. Bis zum Umkehrpunkt braucht sie insgesamt 0,0625 s, eine Viertelschwingung.

### Größte Winkelgeschwindigkeit

(3.6) MEISTER

$$\omega_{\max} = A \cdot \omega$$

In der Ruhelage steckt die ganze Energie der Schwingung in der Bewegung. Hier greift die Hemmung ein, weil eine Störung an dieser Stelle den Gang am wenigsten verändert.

**Gilt:** Amplitude im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

| | | |
|---|---|---|
| $\omega_{\max}$ | Winkelgeschwindigkeit der Unruh beim Durchgang durch die Ruhelage | $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| $A$ | Amplitude (im Bogenmaß) | $\text{rad}$ |
| $\omega$ | Kreisfrequenz | $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |

BEISPIEL Wie schnell dreht die Unruh mit 4 Hz und 270° Amplitude (4,71 rad) in der Ruhelage?

Gegeben: $A = 4{,}71\,\text{rad}$; $\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned}\omega_{\max} &= A \cdot \omega\\ &= 4{,}71\,\text{rad} \cdot 25{,}13\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\\ &\approx 118\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Rund 118 rad je Sekunde; gleichmäßig weitergedreht wären das fast 19 Umdrehungen je Sekunde. Ein Punkt am Reif mit 5 mm Radius ist dabei rund 0,6 m je Sekunde schnell.

**Merksatz:** 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 8 Schläge je Sekunde und 4 Hz.

## 3.2 Spiralfeder

Die Spirale ist eine Biegefeder. Ihr Richtmoment sagt, wie viel Drehmoment sie je Winkel aufbringt. Es hängt vom Werkstoff, vom Querschnitt der Klinge und von der wirksamen Länge ab.

## Rückstellmoment der Spirale

(3.7) GESELLE

$$M = D \cdot \varphi$$

Das Rückstellmoment wächst gleichmäßig mit dem Winkel und zeigt immer zur Ruhelage. Nur deshalb schwingt die Unruh bei jeder Amplitude gleich schnell.

**Gilt:** Spirale im elastischen Bereich; Windungen berühren sich nicht.

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | Drehmoment (Rückstellmoment der Spirale) | $\mu\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $\varphi$ | Winkel (der Unruh gegen die Ruhelage; Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Mit welchem Drehmoment zieht eine Spirale mit $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$ die Unruh am Umkehrpunkt bei 270° (4,71 rad) zurück?

Gegeben: $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$; $\varphi = 4{,}71\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} M &= D \cdot \varphi \\ &= 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}} \cdot 4{,}71\,\mathrm{rad} \\ &\approx 2{,}98\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

Knapp 3 µN·m. Das ist die Größenordnung des Drehmoments, das am Hemmungsrad ankommt.

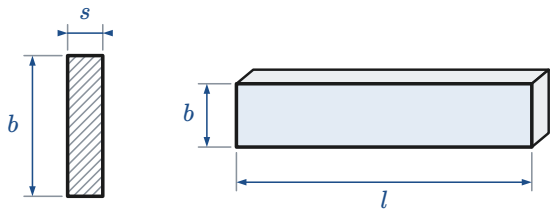



**Abb. 3.3** Klinge der Spirale: Klingenhöhe $b$, Klingenstärke $s$, wirksame Länge $l$

## Richtmoment aus den Maßen der Spirale

(3.8) MEISTER

$$D = \frac{E \cdot b \cdot s^3}{12 \cdot l}$$

Die Höhe und der Elastizitätsmodul gehen einfach ein, die Stärke mit der dritten Potenz. Eine längere Spirale ist weicher.

**Gilt:** rechteckiger Querschnitt, gleichmäßige Klinge, reine Biegung. Mit N und mm ergibt sich $D$ in N·mm je rad; $1\,\mathrm{N{\cdot}mm} = 1000\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$.

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $E$ | Elastizitätsmodul (des Spiralwerkstoffs) | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$ |
| $b$ | Klingenhöhe (in Richtung der Unruhwelle) | $\mathrm{mm}$ |
| $s$ | Klingenstärke (in radialer Richtung) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Länge (der Spirale, wirksam) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Eine Spirale hat $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, 0,14 mm Klingenhöhe, 0,032 mm Klingenstärke und 121 mm wirksame Länge.

Gegeben: $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 0{,}14\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}032\,\mathrm{mm}$; $l = 121\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} D &= \frac{E \cdot b \cdot s^3}{12 \cdot l} \\ &= \frac{200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 0{,}14\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}032\,\mathrm{mm})^3}{12 \cdot 121\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Diese Spirale passt zur Unruh mit $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ aus Abschnitt 3.1 und ergibt mit ihr 4 Hz.

## Gangänderung durch die Klingenstärke

(3.9) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx \frac{3 \cdot \Delta s}{2 \cdot s} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta s$ | Änderung der Klingenstärke (+ heißt: stärker) | $\mu\mathrm{m}$ |
| $s$ | Klingenstärke | $\mu\mathrm{m}$ |

Weil das Richtmoment mit $s^3$ wächst, ändert 1 % mehr Stärke das Richtmoment um 3 % und den Gang um 1,5 %.

**Gilt:** kleine Änderungen; Höhe, Länge und Unruh unverändert. Für die Klingenhöhe gilt entsprechend $\Delta G \approx \frac{\Delta b}{2 \cdot b} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$.

BEISPIEL Eine Spirale ist statt 32 µm um 0,1 µm stärker.

Gegeben: $\Delta s = 0{,}1\,\mu\mathrm{m}; \quad s = 32\,\mu\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{3 \cdot \Delta s}{2 \cdot s} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{3 \cdot 0{,}1\,\mu\mathrm{m}}{2 \cdot 32\,\mu\mathrm{m}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 405\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Ein Zehntel Mikrometer macht fast 7 Minuten am Tag. So genau lässt sich keine Klinge messen; deshalb werden Spiralen nicht nach Maß, sondern nach ihrem gemessenen Richtmoment sortiert und der Unruh zugeteilt.

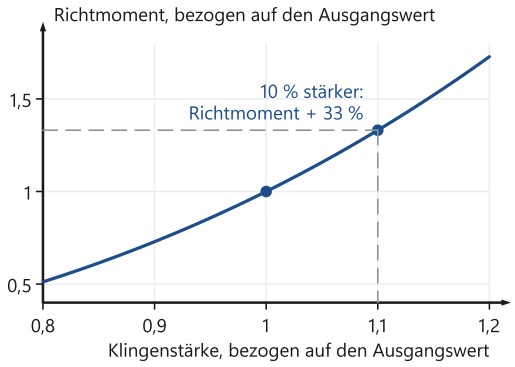



**Abb. 3.4** Das Richtmoment wächst mit der dritten Potenz der Klingenstärke

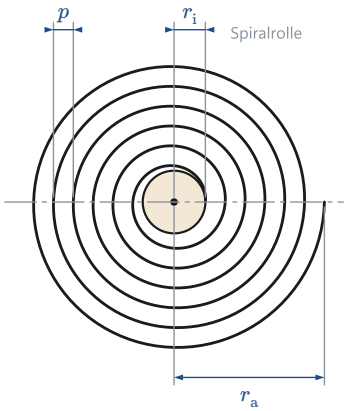



**Abb. 3.5** Flachspirale: Radien $r_\mathrm{i}$ und $r_\mathrm{a}$, Windungsabstand $p$

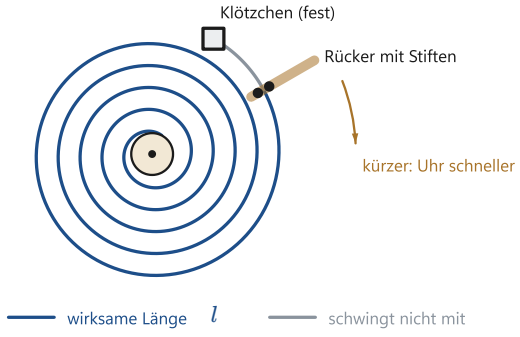



**Abb. 3.6** Rücker: Die wirksame Länge $l$ reicht von der Rolle bis zu den Rückerstiften

## Länge der Flachspirale

(3.10) NÄHERUNG MEISTER

$$l \approx \pi \cdot N \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i})$$

Jede Windung ist fast ein Kreis. Die Länge ist die Windungszahl mal dem Umfang der mittleren Windung.

**Gilt:** gleichmäßig gewickelte Flachspirale (archimedische Spirale) mit mindestens etwa 5 Windungen; Endkurve und Ansteckenden nicht mitgerechnet.

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | Länge (der Spirale) | $\mathrm{mm}$ |
| $N$ | Anzahl (der Windungen) | 1 |
| $r_\mathrm{a}$ | Radius der äußersten Windung | $\mathrm{mm}$ |
| $r_\mathrm{i}$ | Radius der innersten Windung (an der Spiralrolle) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Eine Spirale hat 12 Windungen zwischen 0,6 mm und 2,6 mm Radius.

Gegeben: $N = 12$; $r_\mathrm{a} = 2{,}6\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} l &\approx \pi \cdot N \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i}) \\ &= \pi \cdot 12 \cdot (2{,}6\,\mathrm{mm} + 0{,}6\,\mathrm{mm}) \\ &\approx 121\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Klinge ist rund 121 mm lang, so lang wie die Spirale in den Beispielen zum Richtmoment und zum Rücker. In einer Armbanduhr stecken also gut 12 cm Federband auf der Fläche eines Hemdknopfs.

## Windungsabstand

(3.11) MEISTER

$$p = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}}{N}$$

Der Abstand bestimmt, wie viel Luft die Windungen beim Atmen der Spirale haben. Bei großer Amplitude dürfen sie sich nicht berühren.

**Gilt:** gleichmäßig gewickelte Flachspirale.

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | Windungsabstand (Mitte Klinge bis Mitte der nächsten Klinge) | $\mathrm{mm}$ |
| $r_\mathrm{a}$ | Radius der äußersten Windung | $\mathrm{mm}$ |
| $r_\mathrm{i}$ | Radius der innersten Windung | $\mathrm{mm}$ |
| $N$ | Anzahl (der Windungen) | 1 |

BEISPIEL Wie weit liegen die Windungen der Spirale aus dem Beispiel davor auseinander?

Gegeben: $r_\mathrm{a} = 2{,}6\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathrm{mm}$; $N = 12$

$$\begin{aligned} p &= \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}}{N} \\ &= \frac{2{,}6\,\mathrm{mm} - 0{,}6\,\mathrm{mm}}{12} \\ &\approx 0{,}167\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 0,17 mm von Klinge zu Klinge. Bei 0,032 mm Klingenstärke bleiben etwa 0,13 mm Luft.

## CGS-Nummer der Spirale

(3.12) MEISTER

$$K = D \cdot \left(d_\mathrm{a}^2 - d_\mathrm{i}^2\right)$$

Der CGS-Wert ist das Richtmoment mal der Differenz der Durchmesserquadrate. Er hängt nur von Werkstoff, Klinge und Windungsabstand ab, nicht davon, an welcher Stelle die Spirale gefasst wird: Weiter außen gefasst, sinkt das Richtmoment im selben Maß, wie die Differenz der Quadrate wächst. Deshalb werden Rohspiralen nach diesem Wert gestuft und bestellt.

**Gilt:** gleichmäßig gewickelte Flachspirale; $d_\mathrm{a}$ an der Stelle, an der die Spirale gefasst wird, $d_\mathrm{i}$ an der Spiralrolle. Die CGS-Nummer ist derselbe Wert in der alten Einheit $\mathrm{dyn \cdot cm^3}$ je rad: Zahlenwert in $\mathrm{N \cdot mm^3}$ mal 100.

| | | |
|---|---|---|
| $K$ | CGS-Wert der Spirale (mal 100 ergibt die CGS-Nummer) | $\frac{\mathrm{N \cdot mm^3}}{\mathrm{rad}}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $d_\mathrm{a}$ | Durchmesser der äußersten Windung ($2 \cdot r_\mathrm{a}$) | $\mathrm{mm}$ |
| $d_\mathrm{i}$ | Durchmesser der innersten Windung ($2 \cdot r_\mathrm{i}$) | $\mathrm{mm}$ |

**Gut zu wissen:** Mit der Länge und dem Windungsabstand aus den beiden Formeln davor wird daraus $K \approx \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot p}{3 \cdot \pi}$. Darin kommen weder die Länge noch die Durchmesser vor.

BEISPIEL Zur Unruh mit $10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$ aus Abschnitt 3.1 gehört für 4 Hz das Richtmoment $0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Die Spirale soll bei 5,0 mm Durchmesser gefasst werden, ihre innerste Windung misst 1,2 mm. Welche Spirale wird bestellt?

Gegeben: $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $\quad d_\mathrm{a} = 5{,}0\,\mathrm{mm}$; $\quad d_\mathrm{i} = 1{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} K &= D \cdot \left(d_\mathrm{a}^2 - d_\mathrm{i}^2\right) \\ &= 0{,}632\,\tfrac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}} \cdot \left((5{,}0\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}2\,\mathrm{mm})^2\right) \\ &\approx 0{,}0149\,\tfrac{\mathrm{N \cdot mm^3}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Der CGS-Wert ist 0,0149, die CGS-Nummer also 1,49. Bestellt wird die nächste genormte Nummer, hier 1,50.

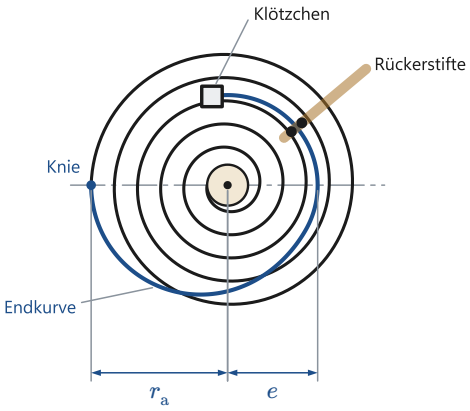



**Abb. 3.7** Breguetspirale von oben: Die hochgebogene Endkurve führt die Klinge vom Außenradius $r_\mathrm{a}$ auf den Endhalbmesser $e$, auf dem die Rückerstifte laufen

## Endkurvennummer

(3.13) GESELLE

$$N_{\mathrm{E}} = \frac{100 \cdot e}{r_{\mathrm{a}}}$$

UMGESTELLT $e = \dfrac{N_{\mathrm{E}} \cdot r_{\mathrm{a}}}{100}$

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{E}}$ | Endkurvennummer | 1 |
| $e$ | Endhalbmesser (Unruhachse bis Mitte zwischen den Rückerstiften) | $\mathrm{mm}$ |
| $r_{\mathrm{a}}$ | Radius der äußersten Windung | $\mathrm{mm}$ |

Bei der Breguetspirale wird das äußere Ende hochgebogen und in einer Endkurve nach innen geführt. Ihr letztes Stück ist ein Kreisbogen um die Unruhachse, auf dem die Rückerstifte laufen. Die Endkurvennummer nennt den Halbmesser dieses Bogens in Prozent des Außenradius. Nach ihr wird die Form der Kurve aus der Kurvenvorlage gewählt.

**Gilt:** Spirale mit hochgebogener Endkurve. Die Kurvenvorlagen sind gestuft; man wählt die nächstliegende Nummer. Üblich sind Nummern zwischen etwa 40 und 100.

BEISPIEL Eine Breguetspirale hat 6,4 mm Außendurchmesser, also 3,2 mm Außenradius. Die Rückerstifte stehen 2,4 mm von der Unruhachse entfernt. Welche Endkurve gehört dazu?

Gegeben: $e = 2{,}4\,\mathrm{mm}$; $r_{\mathrm{a}} = 3{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{E}} &= \frac{100 \cdot e}{r_{\mathrm{a}}} \\ &= \frac{100 \cdot 2{,}4\,\mathrm{mm}}{3{,}2\,\mathrm{mm}} \\ &= 75 \end{aligned}$$

Die Endkurve Nummer 75: Ihr Bogen liegt auf drei Vierteln des Außenradius.

## Abzählen: Schwingungen in der Zählzeit

(3.14) GESELLE

$$N_{\mathrm{S}} = \frac{n_{\mathrm{h}} \cdot t}{2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N_{\mathrm{S}}$ | Zahl der vollen Schwingungen (in der Zählzeit) | 1 |
| $n_{\mathrm{h}}$ | Schlagzahl (Sollwert) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $t$ | Zeit (Zählzeit) | $\mathrm{s}$ |

Beim Abzählen sucht man die Stelle der Spirale, an der sie mit ihrer Unruh die Sollschlagzahl ergibt. Man fasst die Spirale probeweise, lässt die Unruh frei schwingen und zählt die vollen Schwingungen.

**Gilt:** $n_{\mathrm{h}}$ und $t$ in zueinander passenden Einheiten: A/h in Schläge je Sekunde umrechnen (durch 3600 teilen), wenn $t$ in Sekunden steht.

BEISPIEL Eine Unruh für 18 000 A/h wird mit ihrer neuen Spirale abgezählt. Wie viele volle Schwingungen muss sie in 60 s machen?

Gegeben: $n_{\mathrm{h}} = 18\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $t = 60\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{S}} &= \frac{n_{\mathrm{h}} \cdot t}{2} \\ &= \frac{18\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \cdot 60\,\mathrm{s}}{2} \\ &= 150 \end{aligned}$$

150 Schwingungen in der Minute. Zählt man mehr, ist die Spirale an dieser Stelle zu kurz gefasst; zählt man weniger, zu lang.

### Wirksame Länge für die Sollschlagzahl

(3.15) GESELLE

$$l_2 = l_1 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

| | | |
|---|---|---|
| $l_2$ | nötige wirksame Länge | $\mathrm{mm}$ |
| $l_1$ | wirksame Länge beim Versuch | $\mathrm{mm}$ |
| $n_1$ | Schlagzahl beim Versuch | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $n_2$ | Schlagzahl (Sollwert) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |

Die Schlagzahl ändert sich mit der Wurzel aus dem Kehrwert der Länge. Kürzer heißt schneller.

**Gilt:** dieselbe Unruh, gleichmäßige Klinge.

BEISPIEL Mit 130 mm wirksamer Länge macht eine Unruh 28 000 A/h. Sie soll 28 800 A/h machen.

Gegeben: $l_1 = 130\,\mathrm{mm}$; $n_1 = 28\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $n_2 = 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

$$l_2 = l_1 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

$$= 130\,\mathrm{mm} \cdot \left(\frac{28\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}\right)^2$$

$$\approx 122{,}9\,\mathrm{mm}$$

Die Spirale muss rund 7 mm kürzer gefasst werden.

### Gangänderung mit dem Rücker

(3.16) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta l}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\Delta l \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta l$ | Längenänderung (der wirksamen Länge; + heißt: länger) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Länge (der Spirale, wirksam: Rolle bis Rückerstifte) | $\mathrm{mm}$ |

Der Rücker verschiebt die Rückerstifte entlang der äußersten Windung. Kürzere wirksame Länge heißt größeres Richtmoment, die Uhr wird schneller; daher das Minuszeichen.

**Gilt:** kleine Änderungen; die Spirale liegt ohne Spiel zwischen den Rückerstiften. Mit Spiel wirkt der Rücker schwächer, und der Gang hängt von der Amplitude ab (Abschnitt 3.7).

BEISPIEL Eine Uhr mit 121 mm wirksamer Spirallänge geht 20 s am Tag nach. Sie soll also um 20 s am Tag schneller werden.

Gegeben: $\Delta G = 20\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $l = 121\,\mathrm{mm}$

$$\Delta l \approx -\frac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$$

$$= -\frac{2 \cdot 121\,\mathrm{mm} \cdot 20\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$$

$$\approx -0{,}056\,\mathrm{mm}$$

Der Rücker muss die wirksame Länge um rund 0,06 mm verkürzen. Das ist kaum sichtbar; deshalb haben gute Werke eine Feinregulierung am Rücker.

**Merksatz:** Spirale kürzer, Uhr schneller. 1 ‰ weniger wirksame Länge bringt rund 43 s am Tag.

## 3.3 Unruh

Das Trägheitsmoment sagt, wie träge sich die Unruh gegen das Drehen wehrt. Es zählt nicht nur die Masse, sondern vor allem ihr Abstand von der Achse: Der Radius geht quadratisch ein. Deshalb sitzt fast die ganze Wirkung im Reif.

Trägheitsmomente von Unruhen gibt man in mg·cm² an: $1\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} = 10^{-10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Wer mit Milligramm und Millimetern rechnet, erhält mg·mm²; 100 mg·mm² sind 1 mg·cm².

Die allgemeinen Formeln für das Trägheitsmoment einfacher Körper und der Satz von Steiner stehen in Abschnitt XL 2.6.

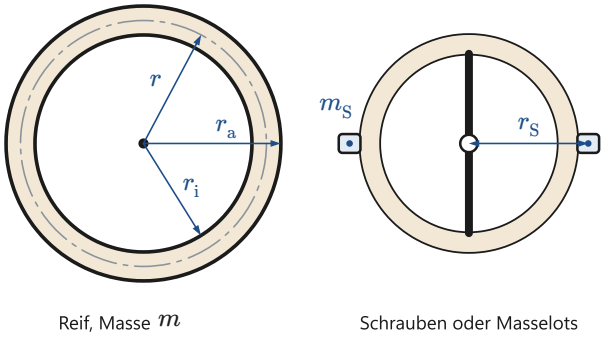



**Abb. 3.8** Links der Reif mit mittlerem Radius $r$, Innenradius $r_\mathrm{i}$ und Außenradius $r_\mathrm{a}$; rechts Schrauben der Masse $m_\mathrm{S}$ im Abstand $r_\mathrm{S}$

### Trägheitsmoment des Reifs (dünner Ring)

(3.17) NÄHERUNG MEISTER

$$J \approx m \cdot r^2$$

| | | |
|---|---|---|
| $J$ | Trägheitsmoment (des Reifs) | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ |
| $m$ | Masse (des Reifs) | $\mathrm{mg}$ |
| $r$ | Radius (des Reifs, Mittelwert) | $\mathrm{mm}$ |

Für den Überschlag denkt man sich die ganze Masse des Reifs auf dem mittleren Radius. Schenkel und Welle tragen wenig bei, weil ihre Masse nahe an der Achse liegt.

**Gilt:** Reif schmal gegenüber dem Radius; nur der Reif, ohne Schenkel, Welle und Schrauben.

**Gut zu wissen:** Genau gerechnet ist der Reif ein Hohlzylinder, Formel (XL 2.37). Mit 4,9 mm Außenradius und 4,1 mm Innenradius ergibt das für den Reif aus dem Beispiel $8{,}16\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$; der Überschlag liegt nur 0,8 % darunter.

BEISPIEL Ein Unruhreif wiegt 40 mg und hat 4,5 mm mittleren Radius.

Gegeben: $m = 40\,\mathrm{mg}$; $r = 4{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &\approx m \cdot r^2 \\ &= 40\,\mathrm{mg} \cdot (4{,}5\,\mathrm{mm})^2 \\ &\approx 8{,}1\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \end{aligned}$$

Rund $8\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ für den Reif allein. Mit Schenkeln, Welle und Schrauben kommt eine solche Unruh auf rund $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$, den Wert der übrigen Beispiele. Unruhen von Herrenarmbanduhren liegen meist zwischen 5 und 20 mg·cm².

## Trägheitsmoment von Schrauben und Masselots

(3.18) MEISTER

$$\Delta J = N \cdot m_S \cdot r_S^2$$

Kleine Massen am Reif zählen wie Punktmassen. Schrauben werden immer paarweise gegenüber gesetzt oder verändert, damit die Unruh im Gleichgewicht bleibt.

**Gilt:** Schraube klein gegenüber ihrem Abstand von der Achse.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta J$ | Änderung des Trägheitsmoments (Zuwachs durch die Schrauben) | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ |
| $N$ | Anzahl (der gleichen Schrauben oder Masselots) | 1 |
| $m_S$ | Masse einer Schraube | $\mathrm{mg}$ |
| $r_S$ | Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL In eine Unruh werden zwei gegenüberliegende Schrauben von je 0,5 mg gesetzt. Ihr Schwerpunkt liegt 5 mm von der Achse.

Gegeben: $N = 2; \quad m_S = 0{,}5\,\mathrm{mg}; \quad r_S = 5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta J &= N \cdot m_S \cdot r_S^2 \\ &= 2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{mg} \cdot (5\,\mathrm{mm})^2 \\ &= 0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}\end{aligned}$$

Die beiden Schrauben bringen $0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ dazu.

## Gangänderung durch das Trägheitsmoment

(3.19) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta J}{2 \cdot J} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta J \approx -\dfrac{2 \cdot J \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta J$ | Änderung des Trägheitsmoments (+ heißt: träger) | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh) | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ |

Eine trägere Unruh schwingt langsamer; daher das Minuszeichen. 1 % mehr Trägheitsmoment kostet 432 s am Tag.

**Gilt:** kleine Änderungen (bis wenige Prozent); Spirale unverändert.

BEISPIEL Die zwei Schrauben aus dem Beispiel davor kommen an eine Unruh mit $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$.

Gegeben: $\Delta J = 0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}; \quad J = 10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{\Delta J}{2 \cdot J} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}}{2 \cdot 10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -1080\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um 18 Minuten am Tag langsamer. Umgekehrt holt man mit zwei leichteren Schrauben einen großen Nachgang auf.

## Feinregulierung mit Regulierschrauben

(3.20) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot m_S \cdot r_S \cdot \Delta r}{J} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

Unruhen ohne Rücker reguliert man, indem man Massen am Reif nach innen oder außen stellt: Regulierschrauben werden gedreht, exzentrische Masselots verdreht. Nach außen heißt träger, die Uhr wird langsamer.

**Gilt:** kleine Verschiebungen; alle $N$ Massen gleich verstellt. Ungleiches Verstellen erzeugt eine Unwucht.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{s}{d}$ |
| $N$ | Anzahl (der gleichen Schrauben oder Masselots) | 1 |
| $m_S$ | Masse einer Schraube | mg |
| $r_S$ | Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse | mm |
| $\Delta r$ | Verschiebung des Schwerpunkts (+ heißt: nach außen) | mm |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh) | $mg \cdot cm^2$ |

BEISPIEL Zwei Regulierschrauben von je 1,5 mg sitzen 4,5 mm von der Achse an einer Unruh mit $10\,mg \cdot cm^2$. Beide werden um 0,01 mm herausgedreht.

Gegeben: $N = 2$; $m_S = 1{,}5\,mg$; $r_S = 4{,}5\,mm$; $\Delta r = 0{,}01\,mm$; $J = 10\,mg \cdot cm^2$

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot m_S \cdot r_S \cdot \Delta r}{J} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

$$= -\frac{2 \cdot 1{,}5\,mg \cdot 4{,}5\,mm \cdot 0{,}01\,mm}{10\,mg \cdot cm^2} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

$$\approx -11{,}7\ \frac{s}{d}$$

Ein Hundertstelmillimeter macht rund 12 s am Tag. Hineindrehen wirkt genauso stark in die andere Richtung.

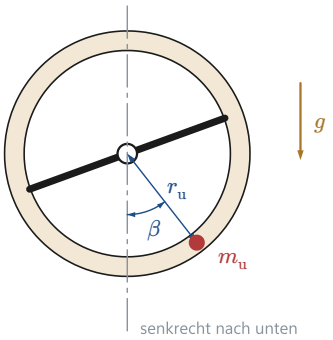



**Abb. 3.9** Unwucht in einer hängenden Lage: Übergewicht $m_u$ im Abstand $r_u$, Winkel $\beta$

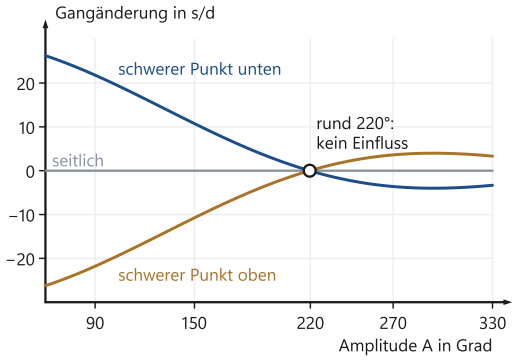



**Abb. 3.10** Gangänderung durch 10 µg Übergewicht am Reif (Beispiel zu Formel 5.21), abhängig von der Amplitude

### Gangänderung durch eine Unwucht (Schwerpunktfehler)

(3.21) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{k_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{u} \cdot g \cdot r_\mathrm{u} \cdot \cos\beta}{2 \cdot D} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

In den hängenden Lagen wirkt ein Übergewicht wie ein kleines Pendel an der Unruh. Unterhalb von rund 220° Amplitude wird die Uhr schneller, wenn der schwere Punkt unten liegt, oberhalb wird sie langsamer; liegt er oben, ist es umgekehrt. Bei rund 220° hebt sich die Wirkung auf.

**Gilt:** Uhr in hängender Lage (Unruhwelle waagerecht), kleines Übergewicht, sinusförmige Schwingung; $\beta$ wird bei Unruh in Ruhelage gemessen. In den liegenden Lagen hat die Unwucht keinen Einfluss auf den Gang.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $k_\mathrm{A}$ | Amplitudenfaktor der Unwucht (aus der Tabelle unten) | 1 |
| $m_\mathrm{u}$ | Übergewicht (Masse, die den Schwerpunkt aus der Achse rückt) | µg |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $r_\mathrm{u}$ | Abstand des Übergewichts von der Unruhachse | mm |
| $\beta$ | Winkel (des Übergewichts gegen die Senkrechte nach unten; Unruh in Ruhelage) | ° |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |

**Gut zu wissen:** Daran erkennt man eine Unwucht: Die Gänge gegenüberliegender hängender Lagen weichen entgegengesetzt vom Mittel ab, und der Unterschied wächst, wenn die Amplitude fällt. Zum Auswuchten prüft man deshalb bei kleiner Amplitude.

BEISPIEL An einem Reif sitzen 10 µg Übergewicht 4,5 mm von der Achse, in der geprüften hängenden Lage genau unten ($\beta = 0°$). Die Uhr läuft mit 270° Amplitude ($k_\mathrm{A} = -0{,}12$), die Spirale hat $D = 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$.

Gegeben: $k_\mathrm{A} = -0{,}12$; $m_\mathrm{u} = 10\,\mu\mathrm{g}$; $g = 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $r_\mathrm{u} = 4{,}5\,\mathrm{mm}$; $\beta = 0°$; $D = 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{k_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{u} \cdot g \cdot r_\mathrm{u} \cdot \cos\beta}{2 \cdot D} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{-0{,}12 \cdot 10\,\mu\mathrm{g} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}5\,\mathrm{mm} \cdot \cos(0°)}{2 \cdot 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -3{,}6\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Unwucht macht die Uhr in dieser Lage um 3,6 s am Tag langsamer, in der Lage gegenüber um 3,6 s am Tag schneller. Fällt die Amplitude auf 150° ($k_\mathrm{A} = 0{,}36$), wird daraus ein Vorgang von rund 11 s am Tag.

#### Amplitudenfaktor $k_\mathrm{A}$ der Unwucht

| Amplitude $A$ | sehr klein | 90° | 120° | 150° | 180° | 200° | 220° | 240° | 270° | 300° | 330° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_\mathrm{A}$ | 1 | 0,72 | 0,54 | 0,36 | 0,18 | 0,08 | 0,00 | −0,06 | −0,12 | −0,13 | −0,11 |

Berechnet aus der Sinusschwingung der Unruh im Schwerefeld; Nullstelle bei 219,5°.

**Merksatz:** Schwerer Punkt unten: unter 220° Amplitude Vorgang, über 220° Nachgang.

## 3.4 Reglage aus Soll- und Istwerten

Regulieren heißt, Trägheitsmoment und Richtmoment so aufeinander abzustimmen, dass die Sollfrequenz herauskommt. Der Gang zeigt, wie weit die Frequenz noch danebenliegt.

## Gang aus der Frequenzabweichung

(3.22) GESELLE

$$G = \frac{f_{\text{ist}} - f_{\text{soll}}}{f_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\text{s}}{\text{d}}$ |
| $f_{\text{ist}}$ | gemessene Frequenz | $\text{Hz}$ |
| $f_{\text{soll}}$ | Sollfrequenz | $\text{Hz}$ |

Schwingt die Unruh zu schnell, zählt das Zeigerwerk zu viele Schläge: Die Uhr geht vor. Der Faktor $86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$ rechnet die relative Abweichung in Sekunden je Tag um. Mit Schlagzahlen steht dieselbe Rechnung in Abschnitt 6.1, für den Quarz in Abschnitt 7.2.

**Gilt:** Frequenz über die Messzeit gemittelt. Statt der Frequenzen können auch die Schlagzahlen eingesetzt werden.

BEISPIEL Eine Unruh mit 4 Hz Sollfrequenz schwingt mit 4,0005 Hz.

Gegeben: $f_{\text{ist}} = 4{,}0005\,\text{Hz}$; $f_{\text{soll}} = 4\,\text{Hz}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{f_{\text{ist}} - f_{\text{soll}}}{f_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= \frac{4{,}0005\,\text{Hz} - 4\,\text{Hz}}{4\,\text{Hz}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= 10{,}8\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 10,8 s am Tag vor. Schon ein Achttausendstel zu viel Frequenz ist als Gang deutlich zu sehen.

## Gangänderung aus Richtmoment und Trägheitsmoment

(3.23) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta J}{J} \right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\text{s}}{\text{d}}$ |
| $\Delta D$ | Änderung des Richtmoments (+ heißt: Spirale stärker) | $\frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$ |
| $\Delta J$ | Änderung des Trägheitsmoments (+ heißt: Unruh träger) | $\text{mg·cm}^2$ |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh) | $\text{mg·cm}^2$ |

Das ist die Grundformel der Reglage. Aus ihr folgen die Rückerformel (3.16) und die Formeln für Schrauben und Masselots. Wer einen Gang $G$ beseitigen will, braucht die Gangänderung $\Delta G = -G$.

**Gilt:** kleine Änderungen (bis wenige Prozent).

BEISPIEL Bei einer Reparatur wird die Spirale ersetzt; die neue hat $0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$ mehr Richtmoment als die alte mit $0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$. Zugleich wird die Unruh mit $10\,\text{mg·cm}^2$ durch Unterlegscheiben um $0{,}010\,\text{mg·cm}^2$ träger.

Gegeben: $\Delta D = 0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$; $D = 0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$; $\Delta J = 0{,}010\,\text{mg·cm}^2$; $J = 10\,\text{mg·cm}^2$

$$\begin{aligned} \Delta G &\approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta J}{J} \right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}}{0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}} - \frac{0{,}010\,\text{mg·cm}^2}{10\,\text{mg·cm}^2} \right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &\approx 93{,}5\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr wird dadurch um rund anderthalb Minuten am Tag schneller: Die stärkere Spirale bringt 137 s, die trägere Unruh nimmt 43 s.

### Paarung: Richtmoment für Unruh und Schlagzahl

(3.24) MEISTER

$$D = \pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2 \cdot J$$

So wird die Spirale zur Unruh ausgesucht. Mit der Frequenz geschrieben lautet die Formel $D = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot J$.

**Gilt:** $n_\mathrm{h}$ in Schlägen je Sekunde und $J$ in kg·m² einsetzen, dann ergibt sich $D$ in N·m je rad.

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | Richtmoment (der Spirale; gesucht) | $\frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Sollwert) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh) | $\mathrm{mg\cdot cm^2}$ |

BEISPIEL Eine Unruh mit $12\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$ soll 21 600 A/h schlagen, das sind 6 Schläge je Sekunde.

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 21\,600\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $J = 12\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$

$$\begin{aligned} D &= \pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2 \cdot J \\ &= \pi^2 \cdot \left(21\,600\ \tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}\right)^2 \cdot 12\,\mathrm{mg\cdot cm^2} \\ &\approx 0{,}426\ \tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Die Spirale braucht rund $0{,}43\ \frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Für 28 800 A/h müsste sie an derselben Unruh fast doppelt so stark sein.

### Trägheitsmoment messen mit einer Zusatzscheibe

(3.25) VERTIEFUNG

$$J = \frac{J_\mathrm{Z}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1}$$

Ein unbekanntes Trägheitsmoment lässt sich nicht wiegen, aber über die Schwingungsdauer messen: Eine Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment macht die Schwingung um ein berechenbares Stück langsamer.

**Gilt:** dieselbe Spirale bei beiden Messungen, Scheibe zentrisch aufgesteckt, freie Schwingung ohne Hemmung.

| | | |
|---|---|---|
| $J$ | Trägheitsmoment (der Unruh; gesucht) | $\mathrm{mg\cdot cm^2}$ |
| $J_\mathrm{Z}$ | bekanntes Trägheitsmoment der aufgesteckten Scheibe | $\mathrm{mg\cdot cm^2}$ |
| $T_1$ | Schwingungsdauer ohne Scheibe | $\mathrm{s}$ |
| $T_2$ | Schwingungsdauer mit Scheibe | $\mathrm{s}$ |

BEISPIEL Eine Unruh schwingt an ihrer Spirale mit 0,250 s. Mit einer aufgesteckten Scheibe von $5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$ dauert die Schwingung 0,306 s.

Gegeben: $J_\mathrm{Z} = 5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$; $T_1 = 0{,}250\,\mathrm{s}$; $T_2 = 0{,}306\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{J_\mathrm{Z}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}}{\left(\frac{0{,}306\,\mathrm{s}}{0{,}250\,\mathrm{s}}\right)^2 - 1} \\ &\approx 10{,}0\,\mathrm{mg\cdot cm^2} \end{aligned}$$

Die Unruh hat rund $10\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$. Aus $J$ und $T_1$ folgt mit Formel (3.1) auch das Richtmoment der Spirale.

## 3.5 Temperatur

Wärme verändert den Gangregler auf zwei Wegen. Die Spirale wird weicher, weil ihr Elastizitätsmodul sinkt, und alle Teile dehnen sich aus. Bei einer Stahlspirale überwiegt der erste Weg bei weitem: Die Uhr geht in der Wärme stark nach.

Zwei Lösungen haben sich durchgesetzt. Die Kompensationsunruh hat einen aufgeschnittenen Reif aus Stahl innen und Messing außen; in der Wärme biegen sich die freien Enden nach innen, das Trägheitsmoment sinkt und gleicht die weichere Spirale aus. Heute nimmt man selbstkompensierende Spiralen aus Nickel-Eisen-Legierungen wie Nivarox oder aus oxidiertem Silizium, deren Elastizitätsmodul sich mit der Temperatur kaum ändert, zusammen mit einer einmetallischen Unruh.

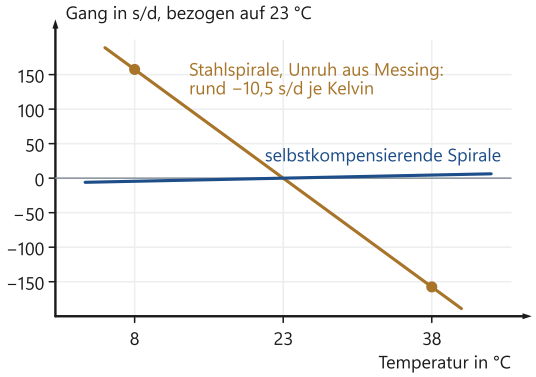



**Abb. 3.11** Gang über der Temperatur: Stahlspirale mit einmetallischer Unruh und selbstkompensierende Spirale

### Temperaturkoeffizient aus den Werkstoffdaten

(3.26) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$C \approx \frac{1}{2} \cdot (\beta_\mathrm{E} + 3 \cdot \alpha_\mathrm{S} - 2 \cdot \alpha_\mathrm{U}) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Spirale wird in der Wärme weicher ($\beta_\mathrm{E}$ ist bei Stahl negativ), zugleich in allen Maßen größer; die Unruh wird größer und damit träger. Die Formel zählt die drei Anteile zusammen.

**Gilt:** einmetallische, nicht aufgeschnittene Unruh; gleichmäßige Erwärmung; kleine Temperaturänderungen. Der Einfluss von Öl, Hemmung und Rückerstiften ist nicht enthalten.

| | | |
|---|---|---|
| $C$ | Temperaturkoeffizient des Gangs (+ heißt: Uhr geht in der Wärme vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}$ |
| $\beta_\mathrm{E}$ | Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls der Spirale | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |
| $\alpha_\mathrm{S}$ | Längenausdehnungskoeffizient der Spirale | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |
| $\alpha_\mathrm{U}$ | Längenausdehnungskoeffizient der Unruh | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |

BEISPIEL Eine Stahlspirale ($\beta_\mathrm{E} = -240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$, $\alpha_\mathrm{S} = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$) arbeitet mit einer einmetallischen Unruh aus Messing ($\alpha_\mathrm{U} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$).

Gegeben: $\beta_\mathrm{E} = -240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\alpha_\mathrm{S} = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\alpha_\mathrm{U} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{1}{2} \cdot (\beta_\mathrm{E} + 3 \cdot \alpha_\mathrm{S} - 2 \cdot \alpha_\mathrm{U}) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} + 3 \cdot 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} - 2 \cdot 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}\right) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -10{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}} \end{aligned}$$

Die Uhr verliert rund 10,5 s am Tag je Kelvin Erwärmung, zwischen 8 °C und 38 °C also mehr als 5 Minuten am Tag. Fast alles davon kommt aus dem Elastizitätsmodul.

### Werkstoffe von Spirale und Unruh (Richtwerte bei 20 °C)

| Werkstoff | Verwendung | $\beta_\mathrm{E}$ in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ | $\alpha$ in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ |
|---|---|---|---|
| Kohlenstoffstahl, gehärtet | Spirale älterer Uhren | −200 … −270 | 11 … 13 |
| Nivarox und ähnliche Nickel-Eisen-Legierungen | selbstkompensierende Spirale | um 0, einstellbar | um 8 |
| Silizium, unbeschichtet | zum Vergleich; ohne Oxidschicht nicht kompensiert | um −60 | 2,6 |
| Silizium mit Oxidschicht | selbstkompensierende Spirale | um 0, einstellbar | um 2,6 |
| Messing | einmetallische Unruh | | 18 … 21 |
| Berylliumbronze (Glucydur) | einmetallische Unruh | | 17 |

Bei selbstkompensierenden Spiralen stellt der Hersteller $\beta_\mathrm{E}$ so ein, dass es die Ausdehnung von Spirale und Unruh gerade ausgleicht.

## Temperaturkoeffizient aus der Messung

(3.27) MEISTER

$$C = \frac{G_2 - G_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

UMGESTELLT $G_2 = G_1 + C \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$

Geprüft wird bei zwei Temperaturen in derselben Lage und mit gleichem Aufzugszustand. Üblich sind 8 °C und 38 °C; der Nenner ist dann 30 K. In der Chronometerprüfung liegen beide Temperaturen fest (Abschnitt 6.4).

**Gilt:** mittlerer Koeffizient zwischen den beiden Prüftemperaturen; die Uhr muss vor jeder Messung durchgewärmt oder durchgekühlt sein.

| | | |
|---|---|---|
| $C$ | Temperaturkoeffizient des Gangs | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}$ |
| $G_2$ | Gang bei der höheren Temperatur | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_1$ | Gang bei der tieferen Temperatur | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\vartheta_2$ | höhere Prüftemperatur | $^\circ\mathrm{C}$ |
| $\vartheta_1$ | tiefere Prüftemperatur | $^\circ\mathrm{C}$ |

BEISPIEL Eine Uhr geht bei 8 °C um 6,0 s am Tag vor, bei 38 °C um 1,5 s am Tag vor, jeweils in derselben Lage.

Gegeben: $G_2 = 1{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $\vartheta_2 = 38^\circ\mathrm{C}$; $\vartheta_1 = 8^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{G_2 - G_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \\ &= \frac{1{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{38^\circ\mathrm{C} - 8^\circ\mathrm{C}} \\ &= -0{,}15\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}} \end{aligned}$$

Die Uhr verliert 0,15 s am Tag je Kelvin Erwärmung. Die Chronometerprüfung nach ISO 3159 lässt bei Werken über 20 mm Durchmesser bis zu 0,6 s am Tag je Kelvin in beide Richtungen zu.

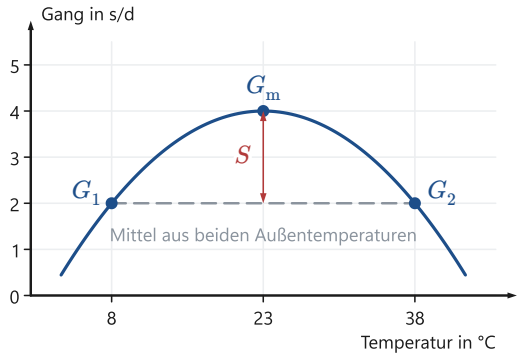



**Abb. 3.12** Sekundärer Fehler $S$: Bei mittlerer Temperatur geht die Uhr vor, obwohl die Gänge $G_1$ und $G_2$ bei 8 °C und 38 °C gleich sind

### Sekundärer Fehler

(3.28) VERTIEFUNG

$$S = G_{\mathrm{m}} - \frac{G_1 + G_2}{2}$$

Die Kompensationsunruh gleicht fast geradlinig aus, die Stahlspirale wird aber nicht geradlinig weicher. Stimmt der Gang bei den beiden Außentemperaturen, geht die Uhr dazwischen vor. Selbstkompensierende Spiralen haben diesen Fehler kaum noch.

**Gilt:** drei Messungen in derselben Lage; mittlere Temperatur genau zwischen den beiden äußeren.

| | | |
|---|---|---|
| $S$ | sekundärer Fehler (+ heißt: Uhr geht bei mittlerer Temperatur vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_{\mathrm{m}}$ | Gang bei der mittleren Temperatur (23 °C) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_1$ | Gang bei der tieferen Temperatur (8 °C) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_2$ | Gang bei der höheren Temperatur (38 °C) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

BEISPIEL Eine Taschenuhr mit Kompensationsunruh und Stahlspirale geht bei 8 °C und bei 38 °C je 2,0 s am Tag vor, bei 23 °C aber 4,0 s am Tag vor.

Gegeben: $G_{\mathrm{m}} = 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_2 = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} S &= G_{\mathrm{m}} - \frac{G_1 + G_2}{2} \\ &= 4{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - \frac{2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{2} \\ &= 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Der sekundäre Fehler beträgt 2 s am Tag; wenige Sekunden am Tag sind für diese Bauart typisch. Der Temperaturkoeffizient nach Formel (3.27) ist hier null und verrät den Fehler nicht.

**Merksatz:** Stahlspirale mit einfacher Unruh: rund 11 s Nachgang am Tag je Kelvin Erwärmung.

## 3.6 Energie und Güte

Die schwingende Unruh ist ein Energiespeicher. Bei jeder Schwingung geht ein kleiner Teil der Energie durch Luft- und Lagerreibung verloren; die Hemmung muss genau diesen Teil nachliefern. Je kleiner der Verlust, desto weniger stört die Hemmung den Gang.

### Energie der schwingenden Unruh

(3.29) MEISTER

$$W = \frac{D \cdot A^2}{2}$$

Am Umkehrpunkt steckt die ganze Energie in der gespannten Spirale, in der Ruhelage in der Bewegung der Unruh: $W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{\max}^2$. Die Energie wächst mit dem Quadrat der Amplitude. Es ist die Energie einer Drehfeder nach Formel (XL 2.26).

**Gilt:** Amplitude im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Energie (der Schwingung) | $\mu\mathrm{J}$ |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ |
| $A$ | Amplitude (im Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Welche Energie steckt in einer Unruh mit $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ bei 270° Amplitude (4,71 rad)?

Gegeben: $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $A = 4{,}71\ \mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{D \cdot A^2}{2} \\ &= \frac{0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}} \cdot (4{,}71\ \mathrm{rad})^2}{2} \\ &\approx 7{,}01\ \mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 7 µJ. Bei 220° wären es nur noch 4,7 µJ, zwei Drittel davon.

## Gütefaktor

(3.30) VERTIEFUNG

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot W}{\Delta W}$$

| | | |
|---|---|---|
| $Q$ | Gütefaktor | 1 |
| $W$ | Energie (der Schwingung) | $\mu J$ |
| $\Delta W$ | Energieverlust je voller Schwingung | $\mu J$ |

Der Gütefaktor vergleicht die gespeicherte Energie mit dem Verlust je Schwingung. Hohe Güte heißt: Der Schwinger braucht wenig Nachschub und lässt sich von der Hemmung wenig stören.

**Gilt:** schwach gedämpfter Schwinger ($Q$ viel größer als 1). Bei der Unruh hängt $Q$ etwas von Amplitude und Lage ab.

BEISPIEL Die Unruh aus dem Beispiel davor verliert je Schwingung 0,176 µJ.

Gegeben: $W = 7{,}01\,\mu J$; $\Delta W = 0{,}176\,\mu J$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2 \cdot \pi \cdot W}{\Delta W} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 7{,}01\,\mu J}{0{,}176\,\mu J} \\ &\approx 250 \end{aligned}$$

Ein Gütefaktor um 250 ist für eine Armbanduhr üblich. Ein gutes Sekundenpendel erreicht einige Tausend bis über Zehntausend, ein Uhrenquarz mehrere Zehntausend.

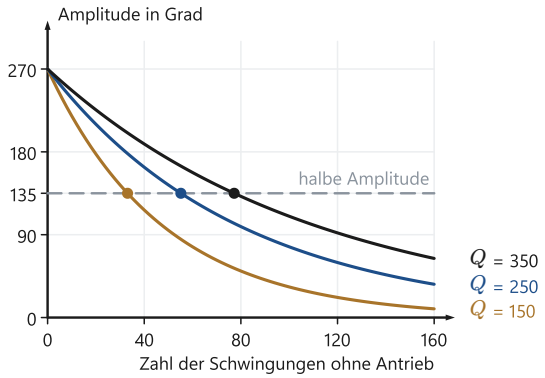



**Abb. 3.13** Ausschwingen ohne Antrieb: Die Amplitude halbiert sich nach rund $0{,}22 \cdot Q$ Schwingungen

### Ausschwingen ohne Antrieb

(3.31) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$A_\mathrm{N} \approx A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{Q}}$$

UMGESTELLT

$$Q \approx \frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{\ln\left(\frac{A_0}{A_\mathrm{N}}\right)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $A_\mathrm{N}$ | Amplitude nach $N_\mathrm{S}$ Schwingungen | ° |
| $A_0$ | Amplitude am Anfang | ° |
| $N_\mathrm{S}$ | Zahl der vollen Schwingungen (ohne Antrieb) | 1 |
| $Q$ | Gütefaktor | 1 |

Ohne Antrieb klingt die Schwingung ab. Die Amplitude halbiert sich nach rund $0{,}22 \cdot Q$ Schwingungen. Umgekehrt liefert ein Ausschwingversuch den Gütefaktor.

**Gilt:** Reibung proportional zur Geschwindigkeit (Luftreibung), $Q$ über den Versuch konstant. Lagerreibung lässt die Amplitude am Ende schneller fallen.

BEISPIEL Eine Unruh mit $Q = 250$ schwingt mit 270° und wird nicht mehr angetrieben. Wie groß ist die Amplitude nach 55 Schwingungen?

Gegeben: $A_0 = 270°$; $N_\mathrm{S} = 55$; $Q = 250$

$$\begin{aligned} A_\mathrm{N} &\approx A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{Q}} \\ &= 270° \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot 55}{250}} \\ &\approx 135° \end{aligned}$$

Nach 55 Schwingungen, bei 4 Hz also nach knapp 14 s, ist die Amplitude auf die Hälfte gefallen.

### Leistungsbedarf der Unruh

(3.32) MEISTER

$$P = \Delta W \cdot f$$

| | | |
|---|---|---|
| $P$ | Leistung (die die Hemmung an die Unruh abgeben muss) | µW |
| $\Delta W$ | Energieverlust je voller Schwingung | µJ |
| $f$ | Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde) | Hz |

Im Gleichgewicht ersetzt die Hemmung in jeder Schwingung genau den Verlust. Mit dem Gütefaktor geschrieben: $P = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot W}{Q}$. $P$ ist hier die Leistung, nicht die Gewindesteigung.

**Gilt:** eingeschwungener Zustand mit gleichbleibender Amplitude.

BEISPIEL Die Unruh aus den Beispielen davor verliert 0,176 µJ je Schwingung und schwingt mit 4 Hz.

Gegeben: $\Delta W = 0{,}176\,\mathrm{\mu J}$; $f = 4\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} P &= \Delta W \cdot f \\ &= 0{,}176\,\mathrm{\mu J} \cdot 4\,\mathrm{Hz} \\ &= 0{,}704\,\mathrm{\mu W} \end{aligned}$$

Die Unruh braucht rund 0,7 µW. Das Federhaus muss ein Mehrfaches liefern, weil Räderwerk und Hemmung nur einen Teil weitergeben (Kapitel 1 und 5).

**Merksatz:** Doppelte Amplitude, vierfache Energie.

## 3.7 Isochronismus

Isochron heißt gleich lang dauernd: Ein idealer Gangregler braucht für große und kleine Schwingungen dieselbe Zeit. Die Formel (3.1) erfüllt das, die wirkliche Uhr nur annähernd. Weil die Amplitude mit ablaufender Zugfeder und in den hängenden Lagen kleiner wird, zeigt sich jeder Isochronismusfehler als Gangunterschied zwischen voll aufgezogener und fast abgelaufener Uhr und zwischen den Lagen.

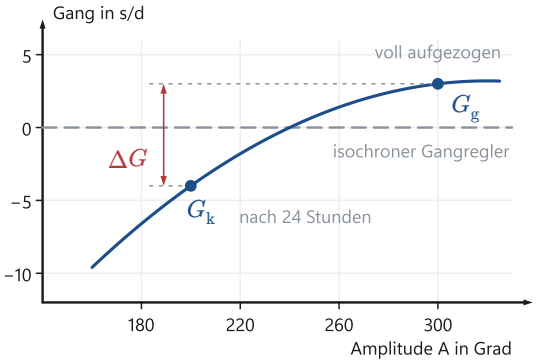



**Abb. 3.14** Gang-Amplituden-Diagramm (Prinzip): Der Isochronismusfehler $\Delta G$ ist der Gangunterschied zwischen kleiner und großer Amplitude

Der **Isochronismusfehler** ist der Gangunterschied zwischen kleiner und großer Amplitude, gemessen in derselben Lage und bei derselben Temperatur (Abb. 3.14). Am einfachsten misst man voll aufgezogen und nach 24 Stunden Lauf; Formel und Beispiel dazu stehen in Abschnitt 6.3, Formel (6.14). Wird die Uhr bei kleiner Amplitude langsamer, liegt das häufig an zu viel Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften. Weitere Ursachen nennt die Tabelle.

### Was den Isochronismus stört

| Ursache | Wirkung bei kleiner Amplitude | Abhilfe |
|---|---|---|
| Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften | Nachgang: Die Spirale liegt einen kleineren Teil der Schwingung am Stift an und wirkt im Mittel länger | Spiel klein halten, Spirale mittig zwischen die Stifte legen |
| Hemmung (Auslösung vor, Antrieb um die Ruhelage) | meist Nachgang, weil der Eingriff einen größeren Teil der Schwingung einnimmt | leichtgängige Hemmung, hohe Amplitude, hohe Güte |
| Unwucht der Unruh | in den hängenden Lagen Vorgang oder Nachgang je nach Lage des schweren Punkts (Abschnitt 3.3) | auswuchten |
| einseitiges Atmen der Flachspirale | Schwerpunkt der Spirale wandert, die Zapfen werden seitlich belastet; der Gang hängt von Amplitude und Lage ab | Endkurve nach Breguet oder Spirale mit angepasster Form |
| Lage des inneren Ansteckpunkts an der Rolle | Vorgang oder Nachgang in den hängenden Lagen je nach Stellung des Ansteckpunkts | Ansteckpunkt nach Herstellerangabe; wird in der Feinreglage gezielt genutzt |

Die Wirkungen überlagern sich. In der Feinreglage stimmt man sie so ab, dass sie sich möglichst aufheben.

Die Endkurve nach Breguet führt die äußerste Windung nach oben und in einem engeren Bogen zum Klötzchen. Bei richtiger Form öffnet und schließt sich die Spirale gleichmäßig nach allen Seiten, ihr Schwerpunkt bleibt in der Achse und die Zapfen werden nicht seitlich gedrückt. Für die Form der Endkurve gibt es Konstruktionsregeln, aber keine einfache Formel; sie wird nach Vorlage gebogen und am Gang geprüft.

**Merksatz:** Isochron ist ein Gangregler, wenn der Gang nicht von der Amplitude abhängt.

# 4 Pendel

Das Pendel ist der Gangregler der Großuhr. Seine Schwingungsdauer hängt nur von der Länge und der Fallbeschleunigung ab, nicht von der Masse der Linse und bei kleinen Ausschlägen kaum vom Ausschlag. Darum regulieren wir eine Pendeluhr über die Länge: Linse höher, Uhr schneller.

Die Formeln gelten für kleine Ausschläge von wenigen Grad, wie sie in Uhren üblich sind. Was größere Ausschläge, die Temperatur und der Aufstellort ausmachen, steht in den Abschnitten 4.4 und 4.5.

## 4.1 Mathematisches Pendel

Das mathematische Pendel ist das Modell, mit dem wir rechnen: eine punktförmige Masse an einem gewichtslosen Faden. Echte Pendel weichen davon nur wenig ab; wie man sie genau berechnet, steht in Abschnitt 4.3.

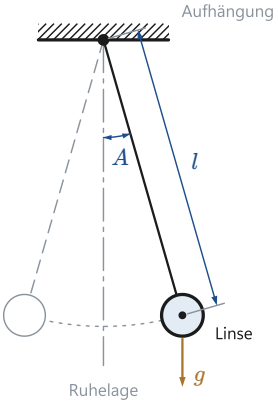



**Abb. 4.1** Mathematisches Pendel: Länge $l$ bis zum Schwerpunkt der Linse, Ausschlag $A$ (zur Verdeutlichung übertrieben)

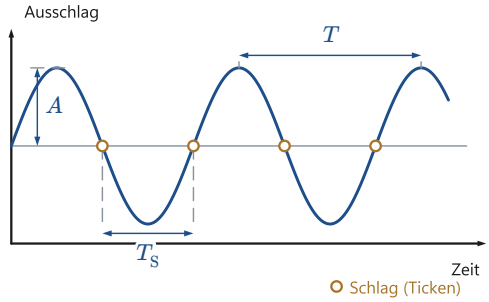



**Abb. 4.2** Ein Schlag ist eine Halbschwingung: $T_S = \frac{1}{2} T$

## Schwingungsdauer

(4.1) GESELLE

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

UMGESTELLT $l = \dfrac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | Schwingungsdauer (volle Schwingung, hin und zurück) | $\mathrm{s}$ |
| $l$ | Pendellänge (Aufhängepunkt bis Schwerpunkt der Linse) | $\mathrm{m}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung (in Mitteleuropa $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |

Die Schwingungsdauer wächst mit der Wurzel der Länge: Ein viermal so langes Pendel schwingt halb so schnell.

**Gilt:** kleine Ausschläge (bis etwa 5°), punktförmige Linse, ohne Reibung. Für ein echtes Pendel $l$ durch die reduzierte Pendellänge $l_\mathrm{r}$ ersetzen (Abschnitt 4.3).

**Gut zu wissen:** Die Masse der Linse kommt in der Formel nicht vor. Eine schwerere Linse ändert die Schwingungsdauer nicht, sie macht das Pendel nur unempfindlicher gegen Störungen aus Hemmung und Räderwerk.

BEISPIEL Ein Pendel misst vom Aufhängepunkt bis zur Mitte der Linse 0,5 m. Wie groß ist die Schwingungsdauer?

Gegeben: $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\,\mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$
$$\approx 1{,}42\,\mathrm{s}$$

Eine volle Schwingung, also hin und zurück, dauert rund 1,42 s; jeder Schlag dauert 0,71 s.

## Schlagdauer (Halbschwingung)

(4.2) GESELLE

$$T_\mathrm{S} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $T_\mathrm{S}$ | Schlagdauer (Halbschwingung, von einem Umkehrpunkt zum anderen) | $\mathrm{s}$ |
| $l$ | Pendellänge | $\mathrm{m}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |

Uhrmacher zählen Schläge. Ein Schlag ist eine Halbschwingung, also die halbe Schwingungsdauer; jeder Schlag ist als Ticken zu hören.

**Gilt:** wie bei Formel (4.1).

BEISPIEL Wie lange dauert ein Schlag bei einem Pendel von 994 mm Länge?

Gegeben: $l = 0{,}994\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$T_\mathrm{S} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$= \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}994\,\mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$
$$\approx 1{,}00\,\mathrm{s}$$

Genau eine Sekunde: Ein Pendel von 994 mm ist ein Sekundenpendel, wie es in Regulatoren und vielen Standuhren schwingt.

## Schlagzahl aus der Schwingungsdauer

(4.3) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2}{T}$$

UMGESTELLT $T = \frac{2}{n_\mathrm{h}}$

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $T$ | Schwingungsdauer | $\mathrm{s}$ |

Je volle Schwingung schlägt das Pendel zweimal. Bei Großuhren gibt man die Schlagzahl oft je Minute an, bei Kleinuhren in Halbschwingungen je Stunde (A/h).

BEISPIEL Ein Pendel hat eine Schwingungsdauer von 1,5 s. Wie groß ist die Schlagzahl je Stunde?

Gegeben: $T = 1{,}5\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= \frac{2}{T} \\ &= \frac{2}{1{,}5\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2}{1{,}5\,\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &= 4800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

4800 Schläge je Stunde, das sind 80 Schläge je Minute.

## Pendellänge aus der Schlagzahl

(4.4) GESELLE

$$l = \frac{g}{\pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | Pendellänge | $\mathrm{m}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |

So bestimmt man die Länge eines fehlenden Pendels: Schlagzahl aus den Zähnezahlen des Räderwerks berechnen (Kapitel 2), dann die Länge.

**Gilt:** wie bei der Schwingungsdauer Formel (4.1); $n_\mathrm{h}$ in Schlägen je Sekunde einsetzen, wenn $g$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ steht.

BEISPIEL Ein Uhrwerk ist für 90 Schläge je Minute gebaut, das sind 1,5 Schläge je Sekunde. Wie lang muss das Pendel sein?

Gegeben: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $n_\mathrm{h} = 1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$$\begin{aligned} l &= \frac{g}{\pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2} \\ &= \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\pi^2 \cdot \left(1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} \\ &\approx 0{,}442\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Pendel muss vom Aufhängepunkt bis zur Mitte der Linse rund 442 mm lang sein.

### Pendellänge aus Schlägen je Minute (Werkstattformel)

(4.5) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$l = \frac{3\,578\,400}{n_\mathrm{h}^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | Pendellänge in mm | $\mathrm{mm}$ |
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl in Schlägen je Minute | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |

Die Zahl 3 578 400 ist die Länge des Sekundenpendels (994 mm) mal $60^2$. Werte nur in den angegebenen Einheiten einsetzen.

**Gilt:** $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $l$ in mm, $n_\mathrm{h}$ in Schlägen je Minute.

BEISPIEL Wie lang ist das Pendel für 90 Schläge je Minute?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 90\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} l &= \frac{3\,578\,400}{n_\mathrm{h}^2} \\ &= \frac{3\,578\,400}{90^2} \\ &\approx 442\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 442 mm, wie in der Formel davor.

**Merksatz:** Ein Pendel von 994 mm schlägt Sekunden. Ein viermal so langes Pendel schlägt halb so oft.

## 4.2 Regulieren über die Pendellänge

Geht eine Pendeluhr vor, wird das Pendel verlängert; geht sie nach, wird es verkürzt. Weil die Schwingungsdauer mit der Wurzel der Länge wächst, macht 1 ‰ mehr Länge die Schwingung um 0,5 ‰ langsamer, das sind 43 s am Tag.

### Gangänderung durch Längenänderung

(4.6) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta l}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta l \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta l$ | Längenänderung (+ heißt: Pendel länger, Linse tiefer) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Pendellänge | $\mathrm{mm}$ |

Ein längeres Pendel schwingt langsamer, die Uhr wird langsamer; daher das Minuszeichen. Der Faktor $86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ rechnet die relative Änderung in Sekunden je Tag um.

**Gilt:** kleine Änderungen ($\Delta l$ viel kleiner als $l$); Pendel ohne schwere Stange.

**Gut zu wissen:** Bei Pendeln mit schwerer Stange wandert der Schwingungsmittelpunkt weniger weit als die Linse. Die Linse muss dann weiter verstellt werden als berechnet. Rechnet man mit der Pendellänge aus der Schlagzahl, sind es bei einer Stange mit 10 %, 20 % und 30 % der Linsenmasse rund 3 %, 7 % und 10 % mehr Weg. Für das wirkliche Pendel wird deshalb oft mit dem Faktor 2,2 statt 2 gerechnet, siehe Formel (4.7).

BEISPIEL Eine Standuhr mit 994 mm Pendellänge geht 30 s am Tag vor. Sie soll also um 30 s am Tag langsamer werden. Um wie viel muss die Linse gesenkt werden?

Gegeben: $\Delta G = -30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}; \quad l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \Delta l &\approx -\frac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &= -\frac{2 \cdot 994\,\mathrm{mm} \cdot \left(-30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\right)}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &\approx 0{,}69\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Linse muss um rund 0,7 mm tiefer, das Pendel also länger werden.

## Linse verstellen aus Gang und Schlagzahl (Werkstattformel)

(4.7) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$\Delta l \approx \frac{90 \cdot G}{n_\mathrm{h}^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta l$ | Verstellweg der Linse in mm (+ heißt: Linse tiefer) | $\mathrm{mm}$ |
| $G$ | Gang der Uhr in Sekunden je Tag (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl in Schlägen je Minute | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |

Geht die Uhr vor, kommt die Linse tiefer; geht sie nach, kommt sie höher. In der Zahl 90 stecken die Pendellänge aus der Schlagzahl und ein Zuschlag für das wirkliche Pendel. Für das mathematische Pendel ergeben die Formeln (4.5) und (4.6) zusammen $\frac{2 \cdot 3\,578\,400}{86\,400} \approx 83$. Mit dem Faktor 2,2 statt 2 werden daraus 91, gerundet 90.

**Gilt:** $\Delta l$ in mm, $G$ in Sekunden je Tag, $n_\mathrm{h}$ in Schlägen je Minute.

Richtwert für Pendel mit mitschwingender Stange; bei sehr leichter Stange steht 83 statt 90. Nach dem Verstellen wird der Gang neu gemessen.

BEISPIEL Die Standuhr aus dem Beispiel zu Formel (4.6) schlägt 60-mal in der Minute und geht 30 s am Tag vor. Um wie viel wird die Linse gesenkt?

Gegeben: $G = 30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $n_\mathrm{h} = 60\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned}\Delta l &\approx \frac{90 \cdot G}{n_\mathrm{h}^2} \\ &= \frac{90 \cdot 30}{60^2} \\ &= 0{,}75\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

Die Linse kommt 0,75 mm tiefer. Für das mathematische Pendel waren es 0,69 mm; der Unterschied ist der Zuschlag für die mitschwingende Stange.

## Gangänderung mit der Reguliermutter

(4.8) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot P}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad N \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{P \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $N$ | Umdrehungen (der Mutter; + heißt: Linse tiefer) | 1 |
| $P$ | Gewindesteigung (der Reguliermutter) | $\mathrm{mm}$ |
| $l$ | Pendellänge | $\mathrm{mm}$ |

Eine volle Umdrehung der Mutter verschiebt die Linse um eine Gewindesteigung.

**Gilt:** Linse sitzt auf der Mutter auf; Pendel ohne schwere Stange.

BEISPIEL Wie stark ändert eine volle Umdrehung der Reguliermutter (Steigung 0,5 mm) den Gang eines Sekundenpendels, wenn die Linse dabei sinkt?

Gegeben: $N = 1$; $P = 0{,}5\,\mathrm{mm}$; $l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{N \cdot P}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{1 \cdot 0{,}5\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 994\,\mathrm{mm}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -21{,}7\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 22 s am Tag langsamer. Feinere Korrekturen macht man mit Teilumdrehungen; viele Muttern tragen dafür eine Teilung.

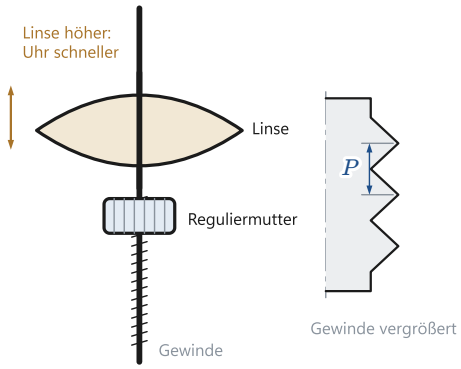



**Abb. 4.3** Die Reguliermutter hebt oder senkt die Linse je Umdrehung um die Steigung $P$

**Merksatz:** Linse höher, Uhr schneller. Beim Sekundenpendel bringt 1 mm rund 43 s am Tag.

**Zulagegewichte.** Präzisionspendeluhren werden zuletzt nicht mehr an der Mutter reguliert, sondern mit kleinen Gewichten auf einem Tischchen an der Pendelstange. Das Pendel schwingt dabei weiter. Jedes aufgelegte Gewicht macht die Uhr schneller, jedes abgenommene langsamer.

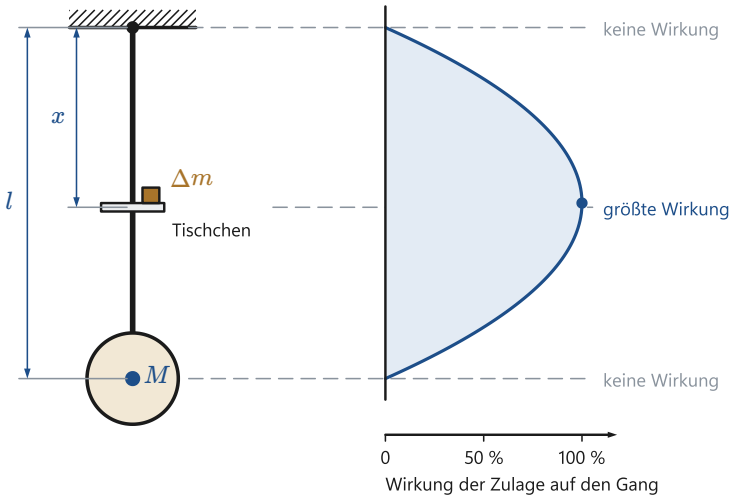



**Abb. 4.4** Zulagegewicht $\Delta m$ im Abstand $x$ unter der Aufhängung: Die Wirkung auf den Gang ist in halber Pendellänge am größten und verschwindet in der Aufhängung und im Schwingungsmittelpunkt $M$

## Zulagegewicht in halber Pendellänge

(4.9) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx \frac{\Delta m}{8 \cdot m} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\Delta m \approx \dfrac{8 \cdot m \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta m$ | Masse des Zulagegewichts (+ heißt: aufgelegt) | $\mathrm{g}$ |
| $m$ | Masse (des Pendels) | $\mathrm{kg}$ |

Die Zulage sitzt über dem Schwingungsmittelpunkt und verkürzt die wirksame Pendellänge ein wenig. Weil 86 400 geteilt durch 8 gleich 10 800 ist, rechnet man in der Werkstatt kürzer: $\Delta m = \frac{m \cdot \Delta G}{10\,800}$ mit $\Delta G$ in Sekunden je Tag.

**Gilt:** Tischchen in halber Pendellänge, also in der Mitte zwischen Aufhängung und Schwingungsmittelpunkt; Zulage viel leichter als das Pendel; Masse des Pendels im Wesentlichen in der Linse. Bei schwerer Stange wirkt die Zulage etwas stärker.

BEISPIEL Eine Präzisionspendeluhr mit 6 kg Pendelmasse geht 0,5 s am Tag nach. Welches Zulagegewicht gleicht das aus?

Gegeben: $m = 6\,\mathrm{kg}$; $\Delta G = 0{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta m &\approx \frac{8 \cdot m \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &= \frac{8 \cdot 6\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &\approx 0{,}28\,\mathrm{g}\end{aligned}$$

Rund 0,28 g. Zum Merken: Der 10 800. Teil der Pendelmasse, hier 0,56 g, bringt 1 s am Tag.

### Zulagegewicht in beliebiger Höhe

(4.10) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{\Delta m \cdot x}{2 \cdot m \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

In der Aufhängung und im Schwingungsmittelpunkt bewirkt eine Zulage nichts. Dazwischen macht sie die Uhr schneller, am stärksten in der Mitte. Unterhalb des Schwingungsmittelpunkts macht sie die Uhr langsamer.

**Gilt:** Zulage viel leichter als das Pendel; Pendel als Punktmasse in der Länge $l$ gerechnet.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta m$ | Masse des Zulagegewichts (+ heißt: aufgelegt) | $\mathrm{g}$ |
| $x$ | Abstand (Aufhängung bis Zulagegewicht) | $\mathrm{mm}$ |
| $m$ | Masse (des Pendels) | $\mathrm{kg}$ |
| $l$ | Pendellänge (Aufhängung bis Schwingungsmittelpunkt) | $\mathrm{mm}$ |

**Gut zu wissen:** Rund um die halbe Pendellänge ändert sich die Wirkung kaum mit der Höhe. Dort sitzt das Tischchen deshalb richtig: Auf einige Millimeter kommt es nicht an. Ein verschiebbares Reguliergewicht gehört dagegen nicht in die Mitte, denn dort bewirkt das Verschieben fast nichts.

BEISPIEL Das Pendel aus dem Beispiel davor (6 kg) ist ein Sekundenpendel mit 994 mm Länge. Darauf liegt 1 g nicht in der Mitte, sondern 331 mm unter der Aufhängung, also in einem Drittel der Länge. Wie stark ändert sich der Gang?

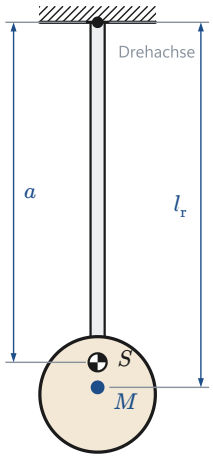
Gegeben: $\Delta m = 1\,\mathrm{g}$; $x = 331\,\mathrm{mm}$; $m = 6\,\mathrm{kg}$; $l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{\Delta m \cdot x}{2 \cdot m \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{g} \cdot 331\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 6\,\mathrm{kg} \cdot 994\,\mathrm{mm}} \cdot \left(1 - \frac{331\,\mathrm{mm}}{994\,\mathrm{mm}}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 1{,}60\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 1,6 s am Tag schneller. In halber Länge wären es 1,8 s.

## 4.3 Physikalisches Pendel

Ein echtes Pendel hat eine Stange mit eigener Masse und eine ausgedehnte Linse. Es schwingt wie ein mathematisches Pendel der reduzierten Länge $l_\mathrm{r}$. Diese reicht bis zum Schwingungsmittelpunkt, der etwas unter dem Schwerpunkt liegt.




S Schwerpunkt · M Schwingungsmittelpunkt

**Abb. 4.5** Physikalisches Pendel: Schwerpunkt $S$ im Abstand $a$, Schwingungsmittelpunkt $M$ in der reduzierten Länge $l_\mathrm{r}$

## Schwingungsdauer des physikalischen Pendels

(4.11) MEISTER

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot g \cdot a}}$$

**Gilt:** kleine Ausschläge, ohne Reibung, starres Pendel.

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | Schwingungsdauer | $\mathrm{s}$ |
| $J_\mathrm{A}$ | Trägheitsmoment um die Drehachse (Aufhängung) | $\mathrm{kg \cdot m^2}$ |
| $m$ | Masse (des ganzen Pendels) | $\mathrm{kg}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$ |
| $a$ | Abstand (Drehachse bis Schwerpunkt) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Eine gleichmäßige Stange (Länge 1 m, Masse 0,6 kg) schwingt um ihr oberes Ende. Ihr Trägheitsmoment um das Ende ist $J_\mathrm{A} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$, der Schwerpunkt liegt in der Mitte.

Gegeben: $J_\mathrm{A} = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$; $m = 0{,}6\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$; $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot g \cdot a}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}}{0{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}} \\ &\approx 1{,}64\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

1,64 s; ein Fadenpendel von 1 m hätte 2,01 s. Die Stange schwingt schneller, weil ein Teil ihrer Masse nahe an der Drehachse liegt.

## Reduzierte Pendellänge

(4.12) MEISTER

$$l_\mathrm{r} = \frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot a}$$

Die reduzierte Pendellänge ist die Länge des mathematischen Pendels mit derselben Schwingungsdauer. Mit $l_\mathrm{r}$ statt $l$ gelten alle Formeln aus den Abschnitten 4.1 und 4.2.

| | | |
|---|---|---|
| $l_\mathrm{r}$ | reduzierte Pendellänge (Drehachse bis Schwingungsmittelpunkt) | $\mathrm{m}$ |
| $J_\mathrm{A}$ | Trägheitsmoment um die Drehachse | $\mathrm{kg \cdot m^2}$ |
| $m$ | Masse (des ganzen Pendels) | $\mathrm{kg}$ |
| $a$ | Abstand (Drehachse bis Schwerpunkt) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Wie lang ist das gleichwertige Fadenpendel für die Stange aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $J_\mathrm{A} = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$; $m = 0{,}6\,\mathrm{kg}$; $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} l_\mathrm{r} &= \frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot a} \\ &= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}}{0{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} \\ &\approx 0{,}667\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Stange schwingt wie ein Fadenpendel von 667 mm, also wie ein Pendel von zwei Dritteln ihrer Länge.

### Trägheitsmoment um die Aufhängung (Satz von Steiner)

(4.13) MEISTER

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + m \cdot a^2$$

So rechnet man das Trägheitsmoment eines Bauteils von seinem Schwerpunkt auf die Drehachse des Pendels um. Für mehrere Bauteile werden die Anteile addiert.

| | | |
|---|---|---|
| $J_\mathrm{A}$ | Trägheitsmoment um die Drehachse | $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ |
| $J_\mathrm{S}$ | Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt | $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ |
| $m$ | Masse (des Bauteils) | $\mathrm{kg}$ |
| $a$ | Abstand (der beiden Achsen) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Eine Linse (Scheibe, Masse 1,2 kg, Radius 60 mm) hängt mit ihrer Mitte 0,9 m unter der Aufhängung. Um ihre eigene Mitte hat sie $J_\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 0{,}002\,16\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Gegeben: $J_\mathrm{S} = 0{,}002\,16\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$; $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$; $a = 0{,}9\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} J_\mathrm{A} &= J_\mathrm{S} + m \cdot a^2 \\ &= 0{,}002\,16\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} + 1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}9\,\mathrm{m})^2 \\ &\approx 0{,}974\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} \end{aligned}$$

Fast das ganze Trägheitsmoment kommt aus dem Abstand zur Aufhängung. Deshalb verhält sich ein Pendel mit schwerer Linse und leichter Stange fast wie ein mathematisches Pendel.

## 4.4 Ausschlag und Kreisfehler

Die Formeln aus Abschnitt 4.1 gelten genau nur für unendlich kleine Ausschläge. Je weiter das Pendel ausschlägt, desto länger dauert eine Schwingung. Diesen Kreisfehler spürt die Uhr erst, wenn sich der Ausschlag ändert, etwa weil die Antriebskraft nachlässt oder das Öl in der Hemmung altert.

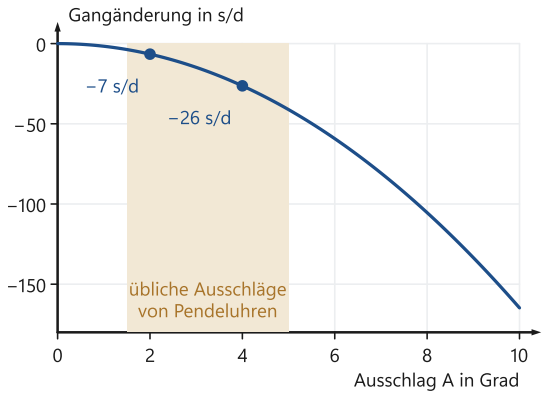



**Abb. 4.6** Kreisfehler: Je größer der Ausschlag, desto langsamer schwingt das Pendel (Gang gegenüber sehr kleinem Ausschlag)

### Schwingungsdauer bei größerem Ausschlag

(4.14) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$T \approx T_0 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{16}\right)$$

**Gilt:** Ausschläge bis etwa 20°. $A$ im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | Schwingungsdauer (beim Ausschlag $A$) | $\mathrm{s}$ |
| $T_0$ | Schwingungsdauer bei sehr kleinem Ausschlag (Formel 6.1) | $\mathrm{s}$ |
| $A$ | Amplitude (Ausschlag des Pendels, im Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Ein Sekundenpendel ($T_0 = 2\,\mathrm{s}$) schwingt mit 4° Ausschlag, das sind 0,0698 rad.

Gegeben: $T_0 = 2\,\mathrm{s}$; $A = 0{,}0698\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} T &\approx T_0 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{16}\right) \\ &= 2\,\mathrm{s} \cdot \left(1 + \frac{(0{,}0698\,\mathrm{rad})^2}{16}\right) \\ &\approx 2{,}0006\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Jede Schwingung dauert 0,6 ms länger; gegenüber einem sehr kleinen Ausschlag verliert die Uhr dadurch rund 26 s am Tag.

### Gangänderung, wenn sich der Ausschlag ändert

(4.15) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx -\frac{A_2^2 - A_1^2}{16} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wird der Ausschlag kleiner, wird die Uhr schneller.

**Gilt:** wie davor.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $A_2$ | Ausschlag nachher (Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |
| $A_1$ | Ausschlag vorher (Bogenmaß) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Der Ausschlag fällt von 2,5° (0,0436 rad) auf 2,0° (0,0349 rad).

Gegeben: $A_2 = 0{,}0349\,\mathrm{rad}$; $A_1 = 0{,}0436\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} \Delta G &\approx -\frac{A_2^2 - A_1^2}{16} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{(0{,}0349\,\mathrm{rad})^2 - (0{,}0436\,\mathrm{rad})^2}{16} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 3{,}7\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr gewinnt rund 3,7 s am Tag. Ein gleichmäßiger Antrieb hält den Ausschlag und damit den Gang konstant; das ist ein Grund, warum Präzisionspendeluhren mit Gewicht laufen.

## 4.5 Temperatur und Aufstellort

Wärme dehnt die Pendelstange, die Uhr geht nach. Und weil die Fallbeschleunigung nicht überall gleich ist, muss eine Pendeluhr nach einem Umzug neu reguliert werden.

## Gangänderung durch Temperatur

(4.16) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{\alpha \cdot \Delta\vartheta}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wärmer heißt länger, länger heißt langsamer.

**Gilt:** Pendel ohne Temperaturausgleich; Ausdehnung von Linse und Aufhängung vernachlässigt.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\alpha$ | Längenausdehnungskoeffizient (der Pendelstange) | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |
| $\Delta\vartheta$ | Temperaturänderung | $\mathrm{K}$ |

BEISPIEL Eine Pendeluhr mit Stahlstange ($\alpha = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$) steht im Sommer 10 K wärmer als im Winter.

Gegeben: $\alpha = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{\alpha \cdot \Delta\vartheta}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 10\,\mathrm{K}}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -4{,}97\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird im Sommer um rund 5 s am Tag langsamer. Mit einer Holzstange schrumpft der Fehler auf rund ein Drittel, mit einer Invarstange auf rund ein Zehntel bis ein Sechstel.

### Längenausdehnungskoeffizienten für Pendelstangen (Richtwerte bei 20 °C)

| Werkstoff | $\alpha$ in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ |
|---|---|
| Zink | 30 |
| Aluminium | 23 |
| Messing | 18 … 21 |
| Stahl, unlegiert | 11 … 13 |
| Holz (Fichte, längs zur Faser) | 3 … 5 |
| Invar (FeNi36) | 1,2 … 2 |
| Quarzglas | 0,5 |

Die Werte schwanken mit Legierung, Wärmebehandlung und beim Holz mit der Feuchte.

## Temperaturausgleich mit zwei Werkstoffen

(4.17) VERTIEFUNG

$$\alpha_1 \cdot l_1 = \alpha_2 \cdot l_2$$

UMGESTELLT $$l_2 = \frac{\alpha_1 \cdot l_1}{\alpha_2}$$

Beim Rostpendel und beim Zink-Stahl-Pendel hebt ein Werkstoff mit großer Ausdehnung die Linse um so viel an, wie der Stahl sie absenkt.

**Gilt:** vereinfacht, nur die Stangen. Die Ausdehnung der Linse und die Lage des Schwingungsmittelpunkts verschieben das Ergebnis etwas; deshalb wird nach dem Bau feinjustiert.

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | Längenausdehnungskoeffizient der nach unten wirkenden Teile (Stahl) | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |
| $l_1$ | Gesamtlänge der nach unten wirkenden Teile | $\mathrm{m}$ |
| $\alpha_2$ | Längenausdehnungskoeffizient der nach oben wirkenden Teile (Zink, Messing) | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ |
| $l_2$ | Gesamtlänge der nach oben wirkenden Teile | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Ein Zink-Stahl-Pendel hat insgesamt 1,2 m Stahl ($\alpha_1 = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$), der sich nach unten ausdehnt. Wie lang muss das Zinkrohr ($\alpha_2 = 30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$) sein?

Gegeben: $\alpha_1 = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$; $l_1 = 1{,}2\,\mathrm{m}$; $\alpha_2 = 30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{\alpha_1 \cdot l_1}{\alpha_2} \\ &= \frac{11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}}{30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}} \\ &\approx 0{,}46\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Zinkrohr muss rund 46 cm lang sein.

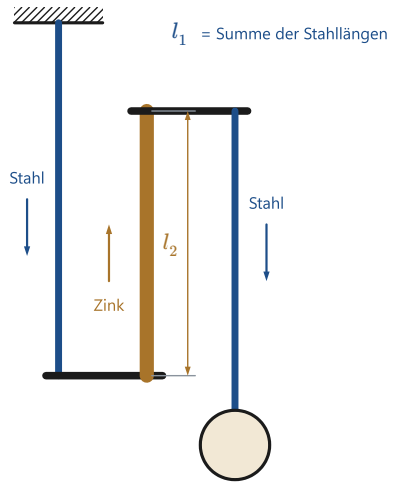



**Abb. 4.7** Zink-Stahl-Pendel, zur Verdeutlichung auseinandergezogen: Stahl senkt die Linse, Zink hebt sie

## Gangänderung durch einen anderen Aufstellort

(4.18) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{\Delta g}{2 \cdot g} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wo die Fallbeschleunigung größer ist, schwingt das Pendel schneller.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta g$ | Änderung der Fallbeschleunigung (neuer Ort minus alter Ort) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung am alten Ort | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |

BEISPIEL Eine in Hamburg ($g = 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) regulierte Standuhr kommt nach München ($g = 9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), also $\Delta g = -0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Gegeben: $\Delta g = -0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $g = 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{\Delta g}{2 \cdot g} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{-0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -28{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

In München geht die Uhr rund 28 s am Tag nach und muss dort neu reguliert werden.

## Fallbeschleunigung nach Breite und Höhe

(4.19) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$g \approx 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\varphi - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot \varphi\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot h$$

Die Formel liefert die Normalschwere einer idealen Erde. Der Untergrund weicht davon örtlich um bis zu etwa $0{,}0005\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ab, im Hochgebirge auch mehr; für das Regulieren einer Uhr reicht das.

**Gilt:** Internationale Schwereformel von 1980 mit Höhenkorrektur für die freie Luft.

| | | |
|---|---|---|
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $\varphi$ | geographische Breite | $^\circ$ |
| $h$ | Höhe (über dem Meeresspiegel) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Fallbeschleunigung in München: Breite 48,14°, Höhe 520 m.

Gegeben: $\varphi = 48{,}14^\circ$; $h = 520\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}g &\approx 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\varphi - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot \varphi\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot h \\ &= 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\left(48{,}14^\circ\right) - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot 48{,}14^\circ\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 520\,\mathrm{m} \\ &\approx 9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Rund $9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; Hamburg auf Meereshöhe hat $9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

# 5 Hemmungen

Die Hemmung sitzt zwischen Räderwerk und Gangregler. Sie hält das Räderwerk an, gibt es im Takt von Unruh oder Pendel Zahn für Zahn frei und führt dem Gangregler dabei die Energie zu, die er durch Reibung verliert. Die Hemmung zählt also die Schwingungen. Wie genau die Uhr geht, hängt auch davon ab, wie wenig sie den Gangregler dabei stört.

Das Kapitel beginnt mit den Größen, die für alle Hemmungen gelten. Es folgen die Geometrie der Schweizer Ankerhemmung, die Energiebilanz, die Geräusche der Hemmung, die eine Zeitwaage auswertet, und die Hemmungen der Großuhr.

## 5.1 Grundgrößen aller Hemmungen

Jede Hemmung gibt das Räderwerk in gleichen Schritten frei und treibt dabei den Gangregler an. Die Begriffe dafür sind bei allen Bauarten dieselben. Die Winkel heißen in diesem Kapitel einheitlich $\gamma$ am Hemmungsrad, $\beta$ am Anker, $\lambda$ und $A$ an der Unruh. Das Hemmungsrad heißt bei der Ankerhemmung auch Ankerrad, in älteren Büchern Gangrad.

### Begriffe der Hemmung

| Begriff | Bedeutung | Winkel |
|---|---|---|
| Ruhe | Ein Zahn liegt auf der Ruhefläche, das Rad steht. Gemessen als Weg des Ankers bis zum Beginn der Hebung. | $\beta_\mathrm{R}$ am Anker |
| Auslösung | Der Gangregler schiebt die Palette aus der Ruhe und gibt den Zahn frei. | Teil von $\lambda$ |
| Hebung | Der Zahn gleitet über die Hebefläche und treibt über den Anker den Gangregler an. | $\gamma_\mathrm{H}$ am Rad, $\beta_\mathrm{H}$ am Anker |
| Fall | Das Rad dreht frei, bis der nächste Zahn auf seine Ruhefläche trifft. | $\gamma_\mathrm{F}$ am Rad |
| Zug | Neigung der Ruhefläche, durch die das Rad den Anker an die Begrenzung zieht. | $\psi$ an der Palette |
| Verlorener Weg | Weg des Ankers nach dem Fall bis zur Begrenzung; Sicherheit für die Ruhe. | $\beta_\mathrm{V}$ am Anker |
| Hebungswinkel | Weg der Unruh, solange der Hebelstein in der Gabel ist. | $\lambda$ an der Unruh |
| Ergänzungsbogen | Weg des Gangreglers außerhalb der Hebung, bis zum Umkehrpunkt. | $\varphi_\mathrm{E}$ an Unruh oder Pendel |

Die Unruh braucht ihren Hebungswinkel für Auslösung und Antrieb zusammen.

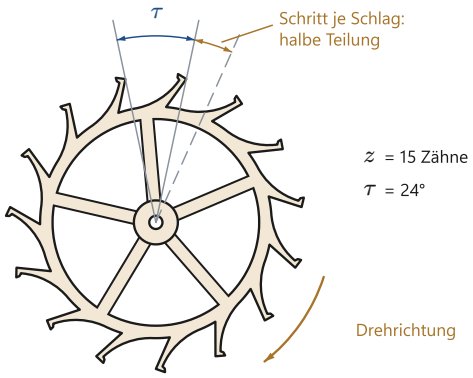



**Abb. 5.1** Teilung $\tau$ des Hemmungsrads; bei jedem Schlag rückt das Rad um die halbe Teilung weiter

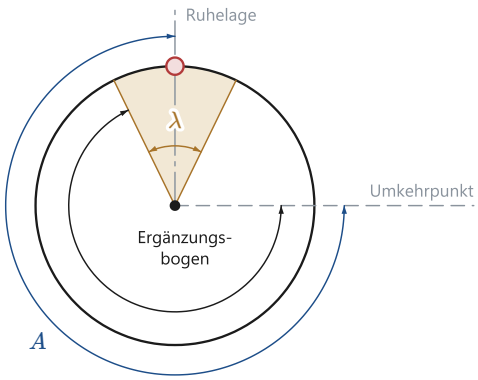



**Abb. 5.2** Weg des Hebelsteins von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt: Amplitude $A$, Hebungswinkel $\lambda$ und Ergänzungsbogen

## Teilung des Hemmungsrads

(5.1) GESELLE

$$\tau = \frac{360^\circ}{z}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\tau$ | Teilung (des Hemmungsrads; Winkel von Zahn zu Zahn) | ° |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |

Die Teilung ist der Winkel von Zahn zu Zahn. Bei jedem Schlag rückt das Rad um die halbe Teilung weiter, denn jeder Zahn arbeitet nacheinander an beiden Paletten.

**Gilt:** Anker-, Zylinder-, Graham- und Hakenhemmung. Bei der Chronometerhemmung rückt das Rad nur bei jedem zweiten Schlag weiter, dann um die ganze Teilung.

BEISPIEL Wie groß ist die Teilung eines Hemmungsrads mit 15 Zähnen?

Gegeben: $z = 15$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{360^\circ}{z} \\ &= \frac{360^\circ}{15} \\ &= 24^\circ\end{aligned}$$

Die Teilung beträgt 24°, der Schritt je Schlag also 12°.

## Schlagzahl und Drehzahl des Hemmungsrads

(5.2) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot z \cdot n_\mathrm{H}$$

UMGESTELLT $\quad n_\mathrm{H} = \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z}$

| | | |
|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit) | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |
| $n_\mathrm{H}$ | Drehzahl des Hemmungsrads | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |

Bei einer Umdrehung des Hemmungsrads geht jeder Zahn einmal durch und lässt zwei Schläge zu. Die Formel verbindet Räderwerk und Gangregler: Aus Schlagzahl und Zähnezahl folgt, wie schnell das Hemmungsrad drehen muss (Kapitel 2). Dieselbe Rechnung steht mit den Zähnezahlen des Räderwerks in Abschnitt 2.2.

**Gilt:** alle Hemmungen, bei denen je Schwingung ein Zahn durchgeht, auch Zylinder- und Chronometerhemmung.

> **Gut zu wissen:** Mit Sekundenpendel und 30 Zähnen dreht das Hemmungsrad genau einmal in der Minute. Darum kann seine Welle den Sekundenzeiger tragen.

BEISPIEL Ein Pendelwerk macht 4800 Schläge je Stunde, das sind 80 je Minute. Das Hemmungsrad hat 32 Zähne. Wie schnell dreht es?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 4800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $\quad z = 32$

$$\begin{aligned}n_\mathrm{H} &= \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z} \\ &= \frac{4800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{2 \cdot 32} \\ &= \frac{80\ \frac{1}{\mathrm{min}}}{2 \cdot 32} \\ &\approx 1{,}25\ \frac{1}{\mathrm{min}}\end{aligned}$$

Das Hemmungsrad dreht 1,25-mal in der Minute, eine Umdrehung dauert also 48 s. Für die Kleinuhr steht ein Beispiel bei Formel (2.8).

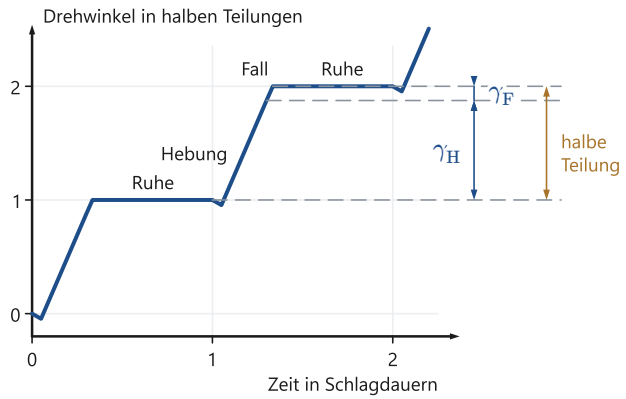



**Abb. 5.3** Weg des Hemmungsrads in zwei Schlägen: Hebung $\gamma_H$ und Fall $\gamma_F$ ergeben die halbe Teilung. Die kleine Senke vor jeder Hebung ist der Rückfall beim Auslösen einer Hemmung mit Zug. Die Zeitachse ist nicht maßstäblich: In der Kleinuhr dauern Hebung und Fall nur wenige Hundertstel der Schlagdauer

## Hebung und Fall am Rad

(5.3) MEISTER

$$\gamma_H + \gamma_F = \frac{180^\circ}{z}$$

UMGESTELLT $\gamma_F = \frac{180^\circ}{z} - \gamma_H$

Der Schritt des Rades besteht aus zwei Stücken. In der Hebung treibt der Zahn die Palette an, im Fall dreht das Rad frei, bis der nächste Zahn auf seine Ruhefläche trifft. Der Fall ist nötige Sicherheit, aber verlorene Energie.

**Gilt:** $\gamma_H$ zählt den ganzen Weg des Rades zwischen zwei Fällen. Bei Hemmungen mit Zug dreht das Rad beim Auslösen einen Bruchteil eines Grades zurück und läuft ihn gleich wieder vor; dieser Rückfall hebt sich in der Summe auf.

| | | |
|---|---|---|
| $\gamma_H$ | Hebung am Rad (Drehwinkel des Rades zwischen zwei Fällen) | ° |
| $\gamma_F$ | Fall (freier Drehwinkel des Rades) | ° |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |

BEISPIEL An einem Hemmungsrad mit 15 Zähnen dreht das Rad während der Hebung um 10,5°. Wie groß ist der Fall?

Gegeben: $z = 15$; $\gamma_H = 10{,}5^\circ$

$$\begin{aligned}\gamma_F &= \frac{180^\circ}{z} - \gamma_H \\ &= \frac{180^\circ}{15} - 10{,}5^\circ \\ &= 1{,}5^\circ\end{aligned}$$

Für den Fall bleiben 1,5°, ein üblicher Wert für die Schweizer Ankerhemmung.

### Fall als Weg der Zahnspitze

(5.4) MEISTER

$$s_{\mathrm{F}} = R \cdot \gamma_{\mathrm{F}}$$

Unter der Lupe zeigt sich der Fall als kleiner Weg der Zahnspitze. Die Formel rechnet den Fallwinkel in diesen Weg um und macht deutlich, mit wie wenig Luft die Hemmung arbeitet.

**Gilt:** Winkel im Bogenmaß: $1^\circ = 0{,}01745\,\mathrm{rad}$.

| | | |
|---|---|---|
| $s_{\mathrm{F}}$ | Fall als Weg (am Umfang des Rades) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten) | $\mathrm{mm}$ |
| $\gamma_{\mathrm{F}}$ | Fall (als Winkel im Bogenmaß einsetzen) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Ein Hemmungsrad hat 2,40 mm Radius, der Fall beträgt 1,5°. Wie weit fällt die Zahnspitze?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma_{\mathrm{F}} = 1{,}5^\circ$

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{F}} &= R \cdot \gamma_{\mathrm{F}} \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot 1{,}5^\circ \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}02618 \\ &\approx 0{,}063\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Zahnspitze fällt 0,063 mm frei. Das ist etwa die Dicke eines Haares.

### Ergänzungsbogen der Unruh

(5.5) MEISTER

$$\varphi_{\mathrm{E}} = A - \frac{\lambda}{2}$$

Außerhalb des Hebungswinkels schwingt die Unruh frei, ohne Berührung mit dem Anker. Diesen Ergänzungsbogen durchläuft sie in jeder Halbschwingung zweimal: absteigend bis zur Hebung und nach der Hebung aufsteigend bis zum Umkehrpunkt.

**Gilt:** freie Hemmungen (Anker- und Chronometerhemmung); Hebungswinkel symmetrisch zur Ruhelage, also richtig eingestellter Abfall.

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_{\mathrm{E}}$ | Ergänzungsbogen (vom Ende der Hebung bis zum Umkehrpunkt) | ° |
| $A$ | Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt) | ° |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen) | ° |

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 270° Amplitude, der Hebungswinkel beträgt 52°. Wie groß ist der Ergänzungsbogen?

Gegeben: $A = 270^\circ$; $\lambda = 52^\circ$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{E}} &= A - \frac{\lambda}{2} \\ &= 270^\circ - \frac{52^\circ}{2} \\ &= 244^\circ \end{aligned}$$

Auf jeder Seite schwingt die Unruh 244° frei. Von den 540° einer Halbschwingung entfallen nur 52° auf die Hebung; auf rund 90 % ihres Weges ist die Unruh ungestört.

**Merksatz:** Je Schlag rückt das Hemmungsrad um die halbe Teilung weiter: erst die Hebung, dann der Fall.

## 5.2 Schweizer Ankerhemmung: Geometrie

Die Schweizer Ankerhemmung arbeitet in fast allen mechanischen Armband- und Taschenuhren. Ihr Anker umspannt 2,5 Teilungen des Rades. Der Ankerdrehpunkt liegt im Schnittpunkt der beiden Tangenten, die den Radkreis in den Berührpunkten berühren. So wirkt der Druck des Zahns in der Ruhe längs des Ankerarms und dreht den Anker nicht. Erst der Zug gibt der Ruhefläche eine kleine Neigung.

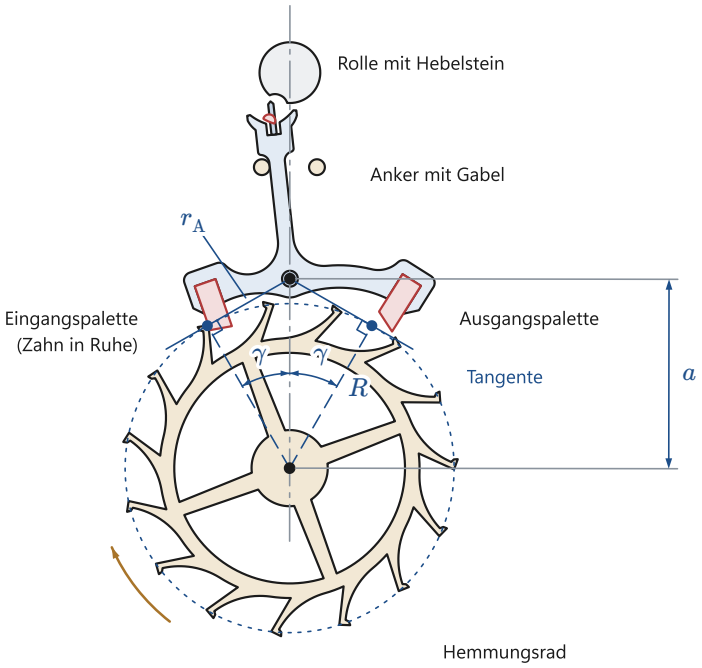



**Abb. 5.4** Schweizer Ankerhemmung nach dem Modell, Zahn in Ruhe auf der Eingangspalette: Der Ankerdrehpunkt liegt im Schnittpunkt der Tangenten; bei 15 Zähnen ist $\gamma = 30^\circ$

## Umspannung des Ankers

(5.6) MEISTER

$$\gamma = \frac{k \cdot 180^\circ}{z}$$

Der Anker greift über $k$ Teilungen des Rades. Weil immer eine Palette im Rad steht, wenn die andere frei ist, endet die Umspannung auf einer halben Teilung: 2,5 Teilungen in der Kleinuhr, 6,5 bis 10,5 in Pendeluhren. Gerechnet wird mit dem halben Umspannungswinkel $\gamma$.

| | | |
|---|---|---|
| $\gamma$ | halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen) | ° |
| $k$ | Umspannung in Teilungen (2,5 bei der Schweizer Ankerhemmung) | 1 |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |

**Gilt:** Berührpunkte symmetrisch zur Verbindungslinie von Rad- und Ankerachse.

BEISPIEL Wie groß ist der halbe Umspannungswinkel bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen Umspannung?

Gegeben: $k = 2{,}5; \quad z = 15$

$$\gamma = \frac{k \cdot 180^\circ}{z} = \frac{2{,}5 \cdot 180^\circ}{15} = 30^\circ$$

Der Anker umspannt 60°, auf jeder Seite der Mittellinie 30°.

## Achsabstand von Rad und Anker

(5.7) MEISTER

$$a = \frac{R}{\cos\gamma}$$

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | Achsabstand (von Hemmungsrad und Anker) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten) | $\mathrm{mm}$ |
| $\gamma$ | halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen) | ° |

Radachse, Berührpunkt und Ankerachse bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Berührpunkt. Je größer die Umspannung, desto weiter rückt der Anker vom Rad weg.

**Gilt:** tangentialer Eingriff: Die Linie vom Ankerdrehpunkt zum Berührpunkt ist Tangente an den Radkreis. $R$ reicht bis zu den Punkten, auf die konstruiert wird, je nach Bauart die Ruhekanten oder die Mitten der Hebeflächen.

BEISPIEL Ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen hat 2,40 mm Radius, der Anker umspannt 2,5 Teilungen. Wie groß ist der Achsabstand?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} a &= \frac{R}{\cos\gamma} \\ &= \frac{2{,}40\,\mathrm{mm}}{\cos(30^\circ)} \\ &\approx 2{,}77\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Achsen liegen 2,77 mm auseinander. Bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen gilt immer $a = 1{,}155 \cdot R$.

## Länge des Ankerarms

(5.8) VERTIEFUNG

$$r_\mathrm{A} = R \cdot \tan\gamma$$

| | | |
|---|---|---|
| $r_\mathrm{A}$ | Ankerarm (vom Ankerdrehpunkt bis zum Berührpunkt) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten) | $\mathrm{mm}$ |
| $\gamma$ | halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen) | ° |

Der Ankerarm ist das Tangentenstück vom Ankerdrehpunkt bis zum Berührpunkt. Mit ihm wird aus einem Winkel des Ankers der Weg der Palette.

**Gilt:** tangentialer Eingriff wie beim Achsabstand.

BEISPIEL Wie lang ist der Ankerarm zum Rad mit 2,40 mm Radius und 30° halbem Umspannungswinkel?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} r_\mathrm{A} &= R \cdot \tan\gamma \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \tan(30^\circ) \\ &\approx 1{,}39\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Ankerarm misst 1,39 mm. Eine Ruhe von 1,5° am Anker ist daran ein Weg der Palette von nur 0,036 mm.

### Abstand der Berührpunkte

(5.9) VERTIEFUNG

$$l_\mathrm{P} = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$$

Die Sehne zwischen den Berührpunkten ist die Weite, mit der der Anker das Rad fasst. An ihr lässt sich prüfen, ob ein Anker zum Rad passt.

**Gilt:** Berührpunkte auf dem Radkreis mit Radius $R$, symmetrisch zur Mittellinie.

| | | |
|---|---|---|
| $l_\mathrm{P}$ | Abstand der beiden Berührpunkte (Sehne im Radkreis) | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten) | $\mathrm{mm}$ |
| $\gamma$ | halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen) | ° |

BEISPIEL Wie weit liegen die Berührpunkte bei 2,40 mm Radradius und 30° halbem Umspannungswinkel auseinander?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} l_\mathrm{P} &= 2 \cdot R \cdot \sin\gamma \\ &= 2 \cdot 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin(30^\circ) \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Abstand ist gleich dem Radradius: Bei 60° Umspannung bilden die Radachse und die beiden Berührpunkte ein gleichseitiges Dreieck.

**Merksatz:** Bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen Umspannung ist der Achsabstand das 1,155-Fache des Radradius, und die Berührpunkte liegen genau einen Radradius auseinander.

### Winkel der Schweizer Ankerhemmung mit 15 Zähnen (Richtwerte)

| Größe | Zeichen | Richtwert |
|---|---|---|
| Teilung des Rades | $\tau$ | 24° |
| Umspannung des Ankers | $2\gamma$ | 2,5 Teilungen = 60° |
| Fall | $\gamma_\mathrm{F}$ | 1° … 1,5° |
| Hebung am Rad | $\gamma_\mathrm{H}$ | 10,5° … 11° |
| Ruhe am Anker | $\beta_\mathrm{R}$ | 1,5° |
| Verlorener Weg | $\beta_\mathrm{V}$ | 0,25° … 0,5° |
| Hebung am Anker | $\beta_\mathrm{H}$ | 8,5° |
| Zugwinkel | $\psi$ | 12° … 15° |
| Hebungswinkel der Unruh | $\lambda$ | meist 49° … 53°; ältere Armbanduhr- und Taschenuhrwerke häufig kleiner, etwa 38° … 46° |

Die Hebung am Anker verteilt sich beim Kolbenzahn auf die Hebefläche der Palette und die des Zahns. Maßgeblich sind immer die Angaben des Herstellers, beim Hebungswinkel auch für die Zeitwaage (Abschnitt 6.2).

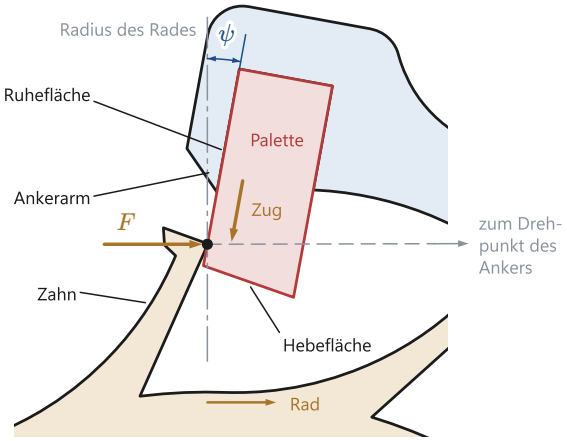



**Abb. 5.5** Eingangspalette in der Ruhe: Die Ruhefläche ist um den Zugwinkel $\psi$ gegen den Radius des Rades geneigt, der Druck $F$ des Zahns zieht die Palette ins Rad

## Zug: Reibungswinkel als Grenze

(5.10) MEISTER

$$\rho = \arctan \mu$$

| | | |
|---|---|---|
| $\rho$ | Reibungswinkel (der Zugwinkel muss größer sein) | ° |
| $\mu$ | Reibungszahl (zwischen Zahn und Ruhefläche) | 1 |

Die Ruhefläche ist um den Zugwinkel $\psi$ geneigt. Dadurch zieht der Druck des Zahns die Palette tiefer ins Rad und hält den Anker an der Begrenzung, auch bei Stößen. Das gelingt nur, wenn $\psi$ größer ist als der Reibungswinkel $\rho$. Sonst hält die Reibung die Palette dort fest, wo sie gerade steht. Allgemein steht der Reibungswinkel in Formel (XL 2.33).

**Gilt:** tangentialer Eingriff; $\psi$ gemessen zwischen Ruhefläche und Radius des Rades im Berührpunkt.

**Aber Vorsicht:** Zu viel Zug kostet Amplitude: Beim Auslösen muss die Unruh das Rad gegen sein Drehmoment ein Stück zurückdrehen.

BEISPIEL Stahl auf geöltem Rubin hat eine Reibungszahl um 0,15. Wie groß ist der Reibungswinkel?

Gegeben: $\mu = 0{,}15$

$$\begin{aligned}\rho &= \arctan \mu \\ &= \arctan 0{,}15 \\ &\approx 8{,}5^\circ\end{aligned}$$

Der Reibungswinkel beträgt 8,5°. Mit den üblichen 12° bis 15° Zug bleibt Reserve, auch wenn das Öl altert.

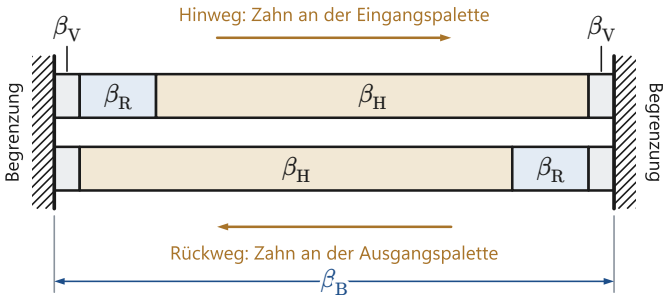



**Abb. 5.6** Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen, gezeichnet für $\beta_V = 0{,}5^\circ$, $\beta_R = 1{,}5^\circ$ und $\beta_H = 8{,}5^\circ$

## Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen

(5.11) MEISTER

$$\beta_B = \beta_R + \beta_H + 2 \cdot \beta_V$$

| | | |
|---|---|---|
| $\beta_B$ | Weg des Ankers von Begrenzung zu Begrenzung | ° |
| $\beta_R$ | Ruhe (unmittelbar nach dem Fall) | ° |
| $\beta_H$ | Hebung am Anker | ° |
| $\beta_V$ | verlorener Weg | ° |

Von der Begrenzung aus legt der Anker erst die ganze Ruhe zurück, dann die Hebung. Nach dem Fall zieht ihn der Zug noch um den verlorenen Weg an die andere Begrenzung. Der verlorene Weg sorgt dafür, dass der Zahn sicher auf der Ruhefläche landet; er zählt auf beiden Seiten.

**Gilt:** Die Gesamtruhe vor dem Auslösen ist $\beta_R + \beta_V$. Beide Paletten gleich eingestellt.

BEISPIEL Ein Anker hat 1,5° Ruhe, 8,5° Hebung und 0,5° verlorenen Weg. Wie weit dreht er von Begrenzung zu Begrenzung?

Gegeben: $\beta_R = 1{,}5°$; $\beta_H = 8{,}5°$; $\beta_V = 0{,}5°$

$$\begin{aligned}\beta_B &= \beta_R + \beta_H + 2 \cdot \beta_V \\ &= 1{,}5° + 8{,}5° + 2 \cdot 0{,}5° \\ &= 11°\end{aligned}$$

Der Anker dreht um 11°. Ohne verlorenen Weg wären es die oft genannten 10°.

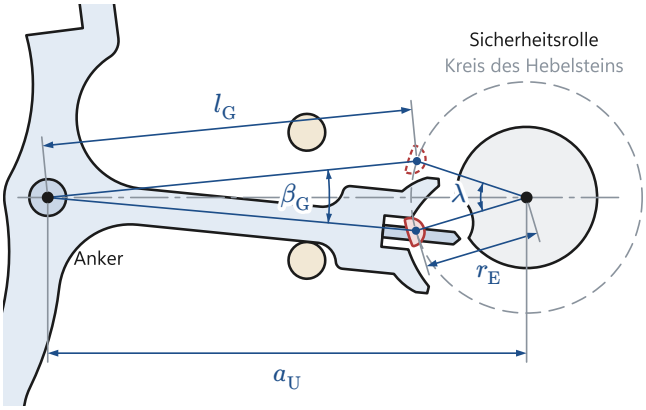



**Abb. 5.7** Gabel, Sicherheitsrolle und Hebelstein nach dem Modell ($\beta_G \approx 11^\circ$, $\lambda \approx 35^\circ$): Hebelstein beim Eintritt (voll) und beim Austritt (gestrichelt)

## Gabel und Hebelstein: Längen und Winkel

(5.12) MEISTER

$$l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right) = r_{\mathrm{E}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

UMGESTELLT $$r_{\mathrm{E}} = \frac{l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

Beim Eintritt und beim Austritt liegt der Hebelstein zugleich auf seinem Kreis um die Unruhachse und im Einschnitt der Gabel. Sein Abstand von der Mittellinie ist von beiden Achsen aus gesehen derselbe; das sagt die Gleichung. Eine lange Gabel und ein kleiner Hebelsteinradius geben einen großen Hebungswinkel der Unruh.

**Gilt:** Hebelstein als Punkt auf der Mittellinie des Gabeleinschnitts; Breite des Steins und Luft in der Gabel vernachlässigt. Dann ist $\beta_{\mathrm{G}}$ gleich dem Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen.

| | | |
|---|---|---|
| $l_{\mathrm{G}}$ | Gabellänge (Ankerachse bis Hebelstein beim Eintritt) | $\mathrm{mm}$ |
| $\beta_{\mathrm{G}}$ | Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°) | ° |
| $r_{\mathrm{E}}$ | Radius des Hebelsteins um die Unruhachse | $\mathrm{mm}$ |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen) | ° |

BEISPIEL Eine Gabel ist 2,89 mm lang. Der Anker dreht 10°, während der Hebelstein in der Gabel ist; die Unruh soll 52° Hebungswinkel haben. Auf welchem Radius muss der Hebelstein sitzen?

Gegeben: $l_{\mathrm{G}} = 2{,}89\,\mathrm{mm}$; $\beta_{\mathrm{G}} = 10°$; $\lambda = 52°$

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

$$= \frac{2{,}89\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{10°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52°}{2}\right)}$$

$$\approx 0{,}575\,\mathrm{mm}$$

Der Hebelstein sitzt 0,575 mm von der Unruhachse entfernt. Die Gabel ist rund fünfmal so lang wie dieser Radius.

## Hebelsteinradius aus dem Achsabstand

(5.13) VERTIEFUNG

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $r_{\mathrm{E}}$ | Radius des Hebelsteins um die Unruhachse | mm |
| $a_{\mathrm{U}}$ | Achsabstand von Anker und Unruh | mm |
| $\beta_{\mathrm{G}}$ | Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°) | ° |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen) | ° |

Beim Entwurf sind Achsabstand und Winkel gegeben. Der Sinussatz im Dreieck aus Ankerachse, Unruhachse und Hebelstein liefert den Radius, auf dem der Hebelstein sitzen muss.

**Gilt:** wie oben: Hebelstein als Punkt, ohne Luft in der Gabel.

BEISPIEL Anker und Unruh stehen 3,40 mm auseinander. Der Anker dreht 10°, die Unruh soll 52° Hebungswinkel haben. Wie groß ist der Hebelsteinradius?

Gegeben: $a_{\mathrm{U}} = 3{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \beta_{\mathrm{G}} = 10°; \quad \lambda = 52°$

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)} = \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{10°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52° + 10°}{2}\right)} \approx 0{,}575\,\mathrm{mm}$$

Der Hebelstein sitzt auf einem Radius von 0,575 mm.

## Gabellänge aus dem Achsabstand

(5.14) VERTIEFUNG

$$l_{\mathrm{G}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $l_{\mathrm{G}}$ | Gabellänge (Ankerachse bis Hebelstein beim Eintritt) | mm |
| $a_{\mathrm{U}}$ | Achsabstand von Anker und Unruh | mm |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen) | ° |
| $\beta_{\mathrm{G}}$ | Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°) | ° |

Dasselbe Dreieck liefert die Gabellänge. Gabellänge und Hebelsteinradius ergeben zusammen etwas mehr als den Achsabstand, weil beide beim Eintritt schräg zur Mittellinie stehen.

**Gilt:** wie oben: Hebelstein als Punkt, ohne Luft in der Gabel.

BEISPIEL Wie lang muss die Gabel bei 3,40 mm Achsabstand, 10° Ankerwinkel und 52° Hebungswinkel sein?

Gegeben: $a_{\mathrm{U}} = 3{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \lambda = 52°; \quad \beta_{\mathrm{G}} = 10°$

$$l_{\mathrm{G}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)} = \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{52°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52° + 10°}{2}\right)} \approx 2{,}89\,\mathrm{mm}$$

Die Gabel wird 2,89 mm lang. Probe über die Mittellinie: $2{,}89 \cdot \cos 5^\circ + 0{,}575 \cdot \cos 26^\circ = 3{,}40$.

### Übersetzung zwischen Gabel und Unruh

(5.15) VERTIEFUNG

$$i_\mathrm{G} = \frac{a_\mathrm{U} - r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}}$$

In der Mittellage berührt die Gabel den Hebelstein auf der Verbindungslinie der Achsen. Dort dreht die Unruh $i_\mathrm{G}$-mal so schnell wie der Anker, und an der Unruh kommt ohne Reibung der $i_\mathrm{G}$-te Teil des Ankermoments an. Über die ganze Hebung gemittelt ist die Übersetzung $\frac{\lambda}{\beta_\mathrm{G}}$.

**Gilt:** Mittellage; beim Eintritt und beim Austritt ist die Übersetzung größer.

| | | |
|---|---|---|
| $i_\mathrm{G}$ | Übersetzung in der Mittellage (Winkelgeschwindigkeit der Unruh durch die des Ankers) | 1 |
| $a_\mathrm{U}$ | Achsabstand von Anker und Unruh | $\mathrm{mm}$ |
| $r_\mathrm{E}$ | Radius des Hebelsteins um die Unruhachse | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Wie groß ist die Übersetzung bei 3,40 mm Achsabstand und 0,575 mm Hebelsteinradius?

Gegeben: $a_\mathrm{U} = 3{,}40\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{E} = 0{,}575\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} i_\mathrm{G} &= \frac{a_\mathrm{U} - r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}} \\ &= \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} - 0{,}575\,\mathrm{mm}}{0{,}575\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 4{,}91 \end{aligned}$$

In der Mittellage beträgt die Übersetzung 4,91, im Mittel über die Hebung 52° zu 10°, also 5,2.

## 5.3 Kraft und Energie

Bei jedem Schlag gibt das Hemmungsrad Arbeit ab. Nur ein Teil davon erreicht die Unruh; der Rest geht im Fall, in der Reibung an den Hebeflächen und in den Stößen verloren. Auch das Auslösen kostet Energie: Die Unruh muss die Palette gegen Reibung und Zug aus dem Rad ziehen.

Im Beharrungszustand führt die Hemmung der Unruh in jeder Schwingung genau so viel Energie zu, wie diese durch Reibung verliert. Daraus ergibt sich die Amplitude. Wie in Kapitel 2 ist $M_\mathrm{H}$ das Drehmoment am Hemmungsrad.

### Arbeit des Hemmungsrads je Schlag

(5.16) MEISTER

$$W_\mathrm{S} = \frac{M_\mathrm{H} \cdot \pi}{z}$$

Arbeit ist Drehmoment mal Drehwinkel. Je Schlag dreht das Rad um die halbe Teilung, im Bogenmaß $\frac{\pi}{z}$. Mehr als diese Arbeit kann die Hemmung bei keinem Schlag weitergeben.

**Gilt:** Drehmoment während des Schritts gleichbleibend. $M_\mathrm{H}$ ist das Moment, das nach den Verlusten des Räderwerks am Hemmungsrad ankommt (Kapitel 2).

| | | |
|---|---|---|
| $W_\mathrm{S}$ | Arbeit des Hemmungsrads je Schlag | $\mu\mathrm{J}$ |
| $M_\mathrm{H}$ | Drehmoment am Hemmungsrad | $\mu\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |

BEISPIEL Am Hemmungsrad mit 20 Zähnen kommen 1,6 µN·m an. Welche Arbeit gibt das Rad je Schlag ab?

Gegeben: $M_\mathrm{H} = 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $z = 20$

$$\begin{aligned} W_\mathrm{S} &= \frac{M_\mathrm{H} \cdot \pi}{z} \\ &= \frac{1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot \pi}{20} \\ &\approx 0{,}251\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Je Schlag stehen 0,25 µJ bereit. Bei 8 Schlägen in der Sekunde sind das 2 µW. In dieser Größenordnung liegt die Leistung am Hemmungsrad einer Armbanduhr.

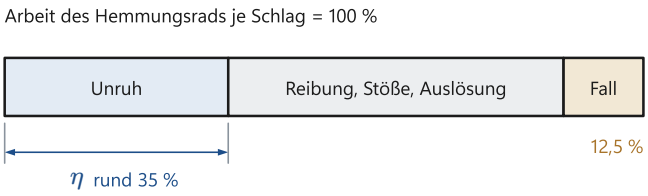



**Abb. 5.8** Wohin die Arbeit des Hemmungsrads geht (Richtwerte für die Schweizer Ankerhemmung)

## Verlust durch den Fall

(5.17) MEISTER

$$v_\mathrm{F} = \frac{\gamma_\mathrm{F} \cdot z}{180^\circ}$$

Im Fall dreht das Rad, ohne anzutreiben. Der Anteil des Falls an der halben Teilung ist deshalb der Anteil der Radarbeit, der im Schlag auf die Ruhefläche verpufft.

**Gilt:** gleichbleibendes Drehmoment am Rad.

| | | |
|---|---|---|
| $v_\mathrm{F}$ | Anteil der Radarbeit, der im Fall verloren geht | % |
| $\gamma_\mathrm{F}$ | Fall (freier Drehwinkel des Rades) | ° |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |

BEISPIEL Welcher Teil der Radarbeit geht beim Rad aus Abschnitt 5.1 (15 Zähne, 1,5° Fall) verloren?

Gegeben: $\gamma_\mathrm{F} = 1{,}5^\circ$; $z = 15$

$$\begin{aligned} v_\mathrm{F} &= \frac{\gamma_\mathrm{F} \cdot z}{180^\circ} \\ &= \frac{1{,}5^\circ \cdot 15}{180^\circ} \\ &= 12{,}5\,\% \end{aligned}$$

Ein Achtel der Arbeit geht allein durch den Fall verloren. Darum wird der Fall so klein gehalten, wie es die Sicherheit erlaubt. Am Rad mit 20 Zähnen aus dem Beispiel davor wären es bei gleichem Fall schon 16,7 %.

## Wirkungsgrad der Hemmung

(5.18) MEISTER

$$\eta = \frac{W_\mathrm{U}}{W_\mathrm{S}}$$

Der Wirkungsgrad sagt, welcher Teil der Radarbeit bei der Unruh ankommt. Bei der Schweizer Ankerhemmung sind es im Betrieb rund 30 % bis 40 % (Richtwert). Der Rest geht durch den Fall, die Gleitreibung an den Hebeflächen, die Stöße und das Beschleunigen von Rad und Anker verloren.

**Gilt:** Beharrungszustand, also gleichbleibende Amplitude.

| | | |
|---|---|---|
| $\eta$ | Wirkungsgrad (der Hemmung) | 1 |
| $W_\mathrm{U}$ | Arbeit, die der Unruh je Schlag zugeführt wird (Antrieb abzüglich Auslösung) | µJ |
| $W_\mathrm{S}$ | Arbeit des Hemmungsrads je Schlag | µJ |

BEISPIEL Das Hemmungsrad gibt je Schlag 0,251 µJ ab, bei der Unruh kommen 0,088 µJ an. Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Gegeben: $W_\mathrm{U} = 0{,}088\,\mu\mathrm{J}$; $W_\mathrm{S} = 0{,}251\,\mu\mathrm{J}$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_\mathrm{U}}{W_\mathrm{S}} \\ &= \frac{0{,}088\,\mu\mathrm{J}}{0{,}251\,\mu\mathrm{J}} \\ &\approx 0{,}35 \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad beträgt 0,35, also 35 %. Das ist ein üblicher Wert.

### Amplitude aus der Energiebilanz

(5.19) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$A \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot M_{\mathrm{H}} \cdot Q}{z \cdot D}}$$

Im Beharrungszustand ist die Energie, die zwei Schläge der Unruh zuführen, gleich ihrem Verlust in einer Schwingung. Dieser Verlust wächst mit dem Quadrat der Amplitude. Darum steigt die Amplitude nur mit der Wurzel des Drehmoments: Das doppelte Drehmoment gibt die 1,4-fache Amplitude, nicht die doppelte.

**Gilt:** $Q$ und $\eta$ als fest angenommen; beide ändern sich in Wirklichkeit etwas mit der Amplitude. Der Gütefaktor ist $2\pi$ mal Schwingungsenergie, geteilt durch den Verlust je Schwingung (Kapitel 3). Die Formel liefert $A$ im Bogenmaß.

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | Amplitude (im Beharrungszustand) | ° |
| $\eta$ | Wirkungsgrad (der Hemmung) | 1 |
| $M_{\mathrm{H}}$ | Drehmoment am Hemmungsrad | $\mu\mathrm{N{\cdot}m}$ |
| $Q$ | Gütefaktor (der Unruh mit Spirale) | 1 |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |
| $D$ | Richtmoment (der Spirale) | $\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$ |

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde hat ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen, an dem 1,6 µN·m ankommen. Das Richtmoment der Spiralfeder beträgt 0,632 µN·m je Radiant, der Gütefaktor 250, der Wirkungsgrad der Hemmung 0,35. Welche Amplitude stellt sich ein?

Gegeben: $\eta = 0{,}35$; $M_{\mathrm{H}} = 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $Q = 250$; $z = 20$; $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned} A &\approx \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot M_{\mathrm{H}} \cdot Q}{z \cdot D}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}35 \cdot 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot 250}{20 \cdot 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}}} \\ &\approx 4{,}71\,\mathrm{rad} \\ &\approx 270^\circ \end{aligned}$$

Die Unruh schwingt mit rund 270°. Fällt das Drehmoment gegen Ende der Gangdauer auf die Hälfte, sinkt die Amplitude auf etwa 190°.

## 5.4 Die Hemmung an der Zeitwaage

Die Zeitwaage hört die Hemmung ab. Jeder Schlag der Ankerhemmung besteht aus drei Geräuschen. Beim ersten trifft der Hebelstein die Gabel, die Auslösung beginnt. Beim zweiten trifft der Zahn die Hebefläche und die Gabel den Hebelstein, der Antrieb beginnt. Beim dritten fällt der nächste Zahn auf die Ruhefläche und der Anker an die Begrenzung. Aus den Zeiten zwischen diesen Geräuschen berechnet das Gerät Amplitude und Abfallfehler. Die Formeln dazu stehen mit Beispielen und Richtwerten in Abschnitt 6.2; hier folgt nur, was davon an der Hemmung liegt.

**Amplitude.** Zwischen dem ersten und dem dritten Geräusch durchläuft die Unruh ihren Hebungswinkel $\lambda$, je zur Hälfte vor und nach der Ruhelage. Je größer die Amplitude, desto schneller ist die Unruh dort und desto kürzer ist diese Hebungszeit. Die Zeitwaage misst die Hebungszeit und rechnet mit dem eingestellten Hebungswinkel auf die Amplitude zurück, Formel (6.9). Der Hebungswinkel ist eine Konstruktionsgröße der Hemmung (Abschnitt 5.2). Ist er am Gerät falsch eingestellt, ist die angezeigte Amplitude im selben Verhältnis falsch, Formel (6.10).

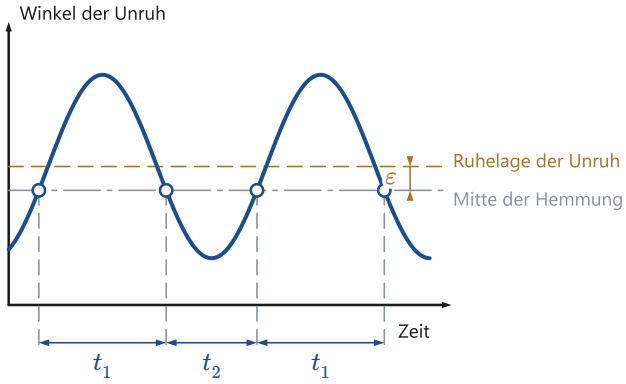



**Abb. 5.9** Abfallfehler: Liegt die Ruhelage der Unruh um $\varepsilon$ neben der Mitte der Hemmung, wechseln lange und kurze Halbschwingungen (stark übertrieben)

**Abfallfehler.** Liegt die Ruhelage der Unruh um den Winkel $\varepsilon$ neben der Mitte der Hemmung, dauert die Halbschwingung zur einen Seite länger als zur anderen (Abb. 5.9): Die Uhr hinkt. Die Zeitwaage zeigt den halben Zeitunterschied als Abfallfehler in Millisekunden, Formel (6.7). Wie man daraus den Winkel $\varepsilon$ berechnet, steht in Formel (6.8). Berichtigt wird an der Unruh: Spiralrolle oder beweglicher Spiralklötzchenträger werden um $\varepsilon$ verdreht, bis der Hebelstein bei ruhender Unruh auf der Verbindungslinie von Ankerachse und Unruhachse steht.

## 5.5 Hemmungen der Großuhr

In Pendeluhren arbeiten ruhende und rückführende Ankerhemmungen. Bei der Grahamhemmung sind die Ruheflächen Kreisbögen um den Ankerdrehpunkt: Solange ein Zahn auf ihnen liegt, steht das Rad still. Bei der Hakenhemmung sind die Ruheflächen geneigt; das Pendel drückt das Rad im Ergänzungsbogen ein Stück zurück, daher heißt sie rückführend. Die Stiftenhemmung großer Uhren trägt statt der Zähne Stifte auf dem Radkranz und ist wie die Grahamhemmung eine ruhende Hemmung.

Teilung, Schritt, Umspannung, Achsabstand und Ankerarm werden für alle diese Hemmungen mit den Formeln aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 gerechnet.

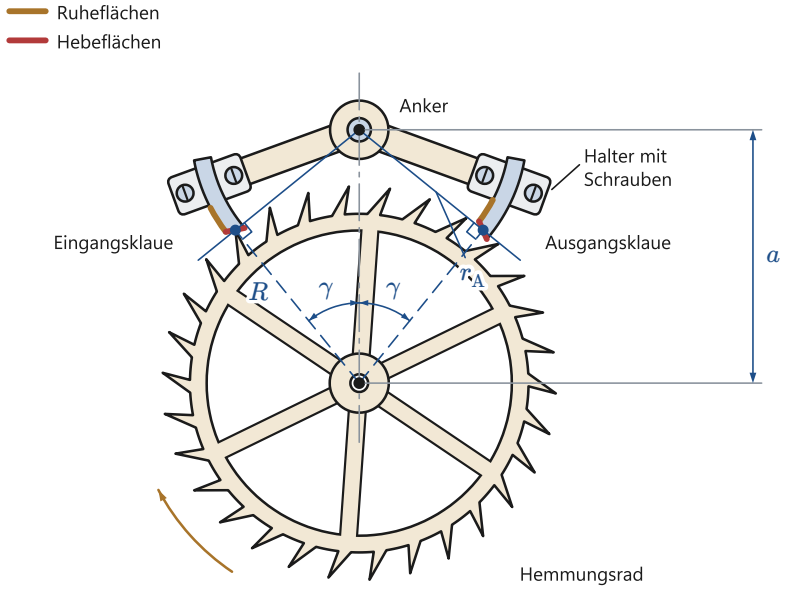



**Abb. 5.10** Grahamhemmung mit 30 Zähnen und 6,5 Teilungen Umspannung: Die Ruheflächen sind Kreisbögen um den Ankerdrehpunkt

### Achsabstand und Ankerarm bei tangentialem Eingriff

| Zähnezahl $z$ | Umspannung $k$ in Teilungen | Umspannungswinkel $2\gamma$ | Achsabstand $a$ in Vielfachen von $R$ | Ankerarm $r_\mathrm{A}$ in Vielfachen von $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 2,5 | 60° | 1,155 | 0,577 |
| 30 | 6,5 | 78° | 1,287 | 0,810 |
| 30 | 7,5 | 90° | 1,414 | 1,000 |
| 30 | 8,5 | 102° | 1,589 | 1,235 |
| 30 | 9,5 | 114° | 1,836 | 1,540 |
| 30 | 10,5 | 126° | 2,203 | 1,963 |

Erste Zeile: Schweizer Ankerhemmung. Die übrigen Zeilen gelten für Pendeluhren mit 30 Zähnen; je größer die Umspannung, desto länger der Ankerarm und desto kleiner der Winkel des Ankers bei gleicher Hebefläche.

### Klauenbreite der Grahamhemmung

(5.20) MEISTER

$$b_\mathrm{K} = R \cdot \left( \frac{\pi}{z} - \gamma_\mathrm{F} \right)$$

Zwischen zwei Zahnspitzen muss abwechselnd eine Klaue Platz finden. Für die Klaue bleibt deshalb die halbe Teilung abzüglich des Falls. So breit ist der Ring um den Ankerdrehpunkt, aus dem beide Klauen geschnitten sind.

**Gilt:** spitze Zähne; tangentialer Eingriff. Winkel im Bogenmaß: Die halbe Teilung ist $\frac{\pi}{z}$, und $1^\circ = 0{,}01745\,\mathrm{rad}$.

| | | |
|---|---|---|
| $b_\mathrm{K}$ | Breite der Klaue, gemessen am Umfang des Rades | $\mathrm{mm}$ |
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Zahnspitzen) | $\mathrm{mm}$ |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |
| $\gamma_\mathrm{F}$ | Fall (als Winkel im Bogenmaß einsetzen) | $\mathrm{rad}$ |

BEISPIEL Ein Hemmungsrad mit 30 Zähnen hat 20 mm Radius. Der Fall soll 1° betragen. Wie breit werden die Klauen?

Gegeben: $R = 20\,\mathrm{mm}$; $z = 30$; $\gamma_\mathrm{F} = 1^\circ$

$$\begin{aligned} b_\mathrm{K} &= R \cdot \left( \frac{\pi}{z} - \gamma_\mathrm{F} \right) \\ &= 20\,\mathrm{mm} \cdot \left( \frac{\pi}{30} - 1^\circ \right) \\ &= 20\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}1047 - 0{,}0175) \\ &\approx 1{,}75\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Klauen werden 1,75 mm breit. Ein Grad Fall ist an diesem Rad 0,35 mm Luft.

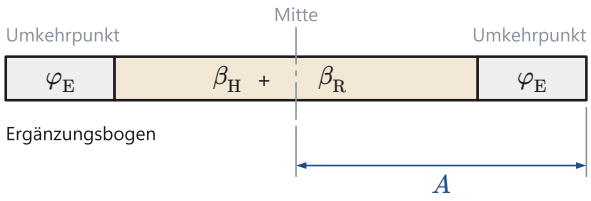



**Abb. 5.11** Ausschlag des Pendels an der Grahamhemmung: in der Mitte Hebung und Ruhe, außen der Ergänzungsbogen $\varphi_\mathrm{E}$

### Ergänzungsbogen des Pendels

(5.21) MEISTER

$$\varphi_{\mathrm{E}} = A - \frac{\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}}{2}$$

Der Anker macht jede Bewegung des Pendels mit. In der Mitte des Ausschlags liegen Hebung und Ruhe, zusammen $\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}$ breit. Was das Pendel auf jeder Seite darüber hinaus schwingt, ist der Ergänzungsbogen. In ihm gleitet der Zahn auf der Ruhefläche.

**Gilt:** Anker mittig eingestellt (gleichmäßiger Abfall), Ankergabel ohne Spiel. Das Pendel muss weiter als $\frac{1}{2}(\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}})$ ausschlagen, sonst fällt kein Zahn ab und die Uhr bleibt stehen.

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_{\mathrm{E}}$ | Ergänzungsbogen (auf jeder Seite) | ° |
| $A$ | Amplitude (Ausschlag des Pendels, von der Mitte bis zum Umkehrpunkt) | ° |
| $\beta_{\mathrm{H}}$ | Hebung am Anker | ° |
| $\beta_{\mathrm{R}}$ | Ruhe (am Anker) | ° |

**Gut zu wissen:** Richtwerte für Grahamhemmungen an Sekundenpendeln: Hebung am Anker 1° bis 2°, Ruhe 0,5° bis 1°. Ein großer Ergänzungsbogen kostet Reibung auf den Ruheflächen.

BEISPIEL Ein Pendel schlägt 1,75° nach jeder Seite aus. Der Graham-Anker hat 1,5° Hebung und 0,5° Ruhe. Wie groß ist der Ergänzungsbogen?

Gegeben: $A = 1{,}75°;\quad \beta_{\mathrm{H}} = 1{,}5°;\quad \beta_{\mathrm{R}} = 0{,}5°$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{E}} &= A - \frac{\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}}{2} \\ &= 1{,}75° - \frac{1{,}5° + 0{,}5°}{2} \\ &= 0{,}75°\end{aligned}$$

Auf jeder Seite schwingt das Pendel 0,75° über Hebung und Ruhe hinaus. Diese Reserve fängt Schwankungen des Antriebs auf.

## 5.6 Weitere Hemmungen

Für die übrigen Hemmungen genügen wenige Kerngrößen. Teilung und Schlagzahl werden bei allen nach Abschnitt 5.1 gerechnet; die Tabelle zeigt, worin sich die Bauarten unterscheiden.

### Hemmungen im Überblick

| Hemmung | Bauart | Antriebe je Schwingung | Schritt des Rades je Antrieb |
|---|---|---|---|
| Schweizer Ankerhemmung | frei | 2 | halbe Teilung |
| Stiftankerhemmung | frei | 2 | halbe Teilung |
| Chronometerhemmung | frei | 1 | ganze Teilung |
| Zylinderhemmung | ruhend | 2 | halbe Teilung |
| Spindelhemmung | rückführend | 2 | halbe Teilung |
| Grahamhemmung | ruhend | 2 | halbe Teilung |
| Stiftenhemmung der Großuhr | ruhend | 2 | halbe Teilung |
| Hakenhemmung | rückführend | 2 | halbe Teilung |

Frei: Der Gangregler schwingt außerhalb der Hebung ohne Berührung mit der Hemmung. Ruhend: Ein Zahn liegt während des Ergänzungsbogens am Gangregler oder Anker an, das Rad steht. Rückführend: Das Rad wird dabei ein Stück zurückgedreht.

Die Chronometerhemmung treibt die Unruh nur in einer Schwingungsrichtung an, dafür über die ganze Teilung des Rades. In der Gegenrichtung geht der Auslösestein an der Goldfeder vorbei, ohne das Rad freizugeben. Für die Schlagzahl gilt trotzdem Formel (5.2), denn auch hier geht je Schwingung ein Zahn durch.

Bei der Zylinderhemmung arbeitet das Rad ohne Anker direkt auf die Unruhwelle, einen aufgeschnittenen Hohlzylinder. Der Zahn ruht abwechselnd außen und innen auf der Zylinderwand; die Unruh schwingt nie frei.

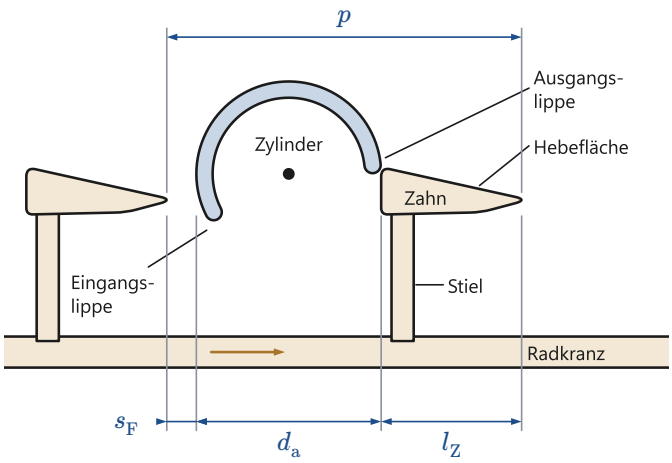



**Abb. 5.12** Zylinderhemmung mit gestrecktem Teilkreis in dem Augenblick, in dem der rechte Zahn den Zylinder verlässt: Die Teilung $p$ setzt sich aus Fall, Zylinderdurchmesser und Zahnlänge zusammen

## Zylinderhemmung: Teilung, Zahnlänge und Zylinder

(5.22) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} \approx l_Z + d_a + s_F$$

UMGESTELLT $$d_a \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} - l_Z - s_F$$

Links steht die Teilung $p$ des Rades am Umfang. Zwischen zwei Zähnen muss der Zylinder mit seinem Außendurchmesser Platz finden, dazu der äußere Fall. Im Zylinder muss der Zahn Platz finden: Der Innendurchmesser ist um den inneren Fall größer als die Zahnlänge.

**Gilt:** Teilkreis als gerade Strecke betrachtet (Bogen statt Sehne).

| | | |
|---|---|---|
| $R$ | Radius (des Hemmungsrads; Zylinderrad, bis zu den Zahnspitzen) | mm |
| $z$ | Zähnezahl (des Hemmungsrads) | 1 |
| $l_Z$ | Länge eines Zahns | mm |
| $d_a$ | Außendurchmesser des Zylinders | mm |
| $s_F$ | Fall als Weg (äußerer Fall) | mm |

BEISPIEL Ein Zylinderrad mit 15 Zähnen hat 2,50 mm Radius, die Zähne sind 0,45 mm lang, der äußere Fall soll 0,05 mm betragen. Welchen Außendurchmesser darf der Zylinder haben?

Gegeben: $R = 2{,}50\,\text{mm}$; $z = 15$; $l_Z = 0{,}45\,\text{mm}$; $s_F = 0{,}05\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} d_a &\approx \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} - l_Z - s_F \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}50\,\text{mm}}{15} - 0{,}45\,\text{mm} - 0{,}05\,\text{mm} \\ &= 1{,}047\,\text{mm} - 0{,}45\,\text{mm} - 0{,}05\,\text{mm} \\ &\approx 0{,}55\,\text{mm} \end{aligned}$$

Der Zylinder darf außen 0,55 mm messen. Bei 0,04 mm Wandstärke bleiben innen 0,47 mm, also 0,02 mm innerer Fall.

# 6 Gangkontrolle und Messen

Ob eine Uhr gut geht, entscheidet die Messung. Zwei Begriffe tragen das ganze Kapitel: Der Stand sagt, um wie viel die Uhr von der richtigen Zeit abweicht; der Gang sagt, wie schnell sich der Stand ändert. Den Stand liest man ab, den Gang rechnet man daraus aus oder misst ihn in weniger als einer Minute auf der Zeitwaage.

Die Zeitwaage liefert außerdem Amplitude und Abfallfehler. Gemessen wird in mehreren Lagen und bei verschiedenem Aufzugszustand, weil erst die Unterschiede zeigen, wo ein Fehler sitzt. In diesem Kapitel steht $S$ für den Stand und $D$ für die Differenz hängend–flach.

## 6.1 Stand und Gang

Der Stand ist eine Zeitspanne in Sekunden, der Gang eine Standänderung je Tag. Für beide gilt dieselbe Vorzeichenregel: Plus heißt, die Uhr ist voraus oder geht vor.

### Stand

(6.1) GESELLE

$$S = t_\mathrm{U} - t_\mathrm{N}$$

Der Stand ist die Anzeige der Uhr minus die richtige Zeit. Als Normal dient eine Funkuhr oder ein Zeitzeichen.

**Gilt:** beide Zeiten im selben Augenblick abgelesen.

| | | |
|---|---|---|
| $S$ | Stand (+ heißt: Uhr ist voraus) | s |
| $t_\mathrm{U}$ | Anzeige der Uhr | s |
| $t_\mathrm{N}$ | Normalzeit (richtige Zeit im selben Augenblick) | s |

BEISPIEL Beim Zeitzeichen zur vollen Minute steht der Sekundenzeiger der Uhr schon auf 12 s.

Gegeben: $t_\mathrm{U} = 12\,\mathrm{s}$; $t_\mathrm{N} = 0\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} S &= t_\mathrm{U} - t_\mathrm{N} \\ &= 12\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s} \\ &= 12\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die Uhr ist 12 s voraus, ihr Stand ist +12 s.

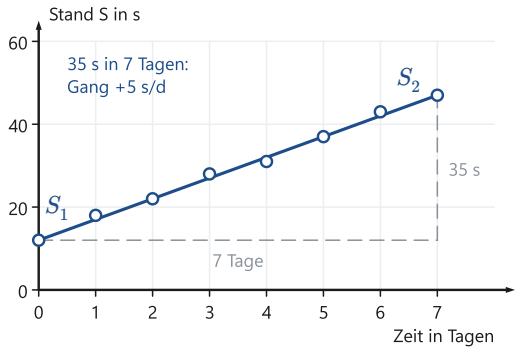



**Abb. 6.1** Stand über der Zeit: Der Gang ist die Steigung der Linie durch die abgelesenen Stände

## Gang aus zwei Ständen

(6.2) GESELLE

$$G = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

Der Gang ist die Standänderung je Tag. Im Stand-Zeit-Diagramm ist er die Steigung der Linie.

**Gilt:** mittlerer Gang zwischen den beiden Ablesungen; die Uhr wird dazwischen nicht gestellt.

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $S_2$ | Stand bei der zweiten Ablesung | $\mathrm{s}$ |
| $S_1$ | Stand bei der ersten Ablesung | $\mathrm{s}$ |
| $t_2$ | Zeitpunkt der zweiten Ablesung | $\mathrm{d}$ |
| $t_1$ | Zeitpunkt der ersten Ablesung | $\mathrm{d}$ |

**Gut zu wissen:** Je länger die Zeitspanne, desto genauer der Gang: Der Ablesefehler verteilt sich auf mehr Tage (Abschnitt 6.7).

BEISPIEL Am Tag 0 ist die Uhr 12 s voraus, am Tag 7 sind es 47 s. Welchen Gang hat sie?

Gegeben: $S_2 = 47\,\mathrm{s}$; $S_1 = 12\,\mathrm{s}$; $t_2 = 7\,\mathrm{d}$; $t_1 = 0\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{47\,\mathrm{s} - 12\,\mathrm{s}}{7\,\mathrm{d} - 0\,\mathrm{d}} \\ &= 5{,}0\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 5 s am Tag vor.

## Standänderung in einer Laufzeit

(6.3) GESELLE

$$\Delta S = G \cdot t$$

UMGESTELLT $t = \frac{\Delta S}{G}$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta S$ | Standänderung (+ heißt: Uhr hat gewonnen) | $\mathrm{s}$ |
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $t$ | Zeit (Laufzeit) | $\mathrm{d}$ |

Bei gleichbleibendem Gang wächst der Stand gleichmäßig. So rechnet man einen Gang auf den Monat oder das Jahr hoch, oder umgekehrt eine Angabe in Sekunden je Monat auf den Tag zurück.

**Gilt:** gleichbleibender Gang über die ganze Laufzeit.

BEISPIEL Eine Quarzuhr geht 0,5 s am Tag vor. Wie viel gewinnt sie in einem Monat mit 30 Tagen?

Gegeben: $G = 0{,}5\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $t = 30\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} \Delta S &= G \cdot t \\ &= 0{,}5\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \cdot 30\,\mathrm{d} \\ &= 15\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

15 s im Monat, ein üblicher Wert für eine einfache Quarzuhr. Im Jahr wären es rund 3 min.

## Mittlerer Gang

(6.4) GESELLE

$$\bar{G} = \frac{\sum G_i}{n}$$

Über mehrere Tage ist der mittlere tägliche Gang zugleich die gesamte Standänderung geteilt durch die Zahl der Tage. Über mehrere Lagen gemittelt sagt er, wie die Uhr reguliert ist.

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{G}$ | mittlerer Gang (über Tage oder Lagen) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\sum G_i$ | Summe der Einzelgänge, mit Vorzeichen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $n$ | Anzahl (der Einzelgänge) | 1 |

**Gilt:** alle Einzelgänge über gleich lange Zeiten gemessen; Vorzeichen beachten.

BEISPIEL An fünf Tagen werden die Gänge +6, +4, +7, +3 und +5 Sekunden je Tag bestimmt. Die Summe ist +25 Sekunden je Tag.

Gegeben: $\sum G_i = 25\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $n = 5$

$$\bar{G} = \frac{\sum G_i}{n} = \frac{25\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{5} = 5{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Im Mittel +5 s am Tag. In den fünf Tagen hat die Uhr 25 s gewonnen.

## Gang umrechnen

| Gang in $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Sekunden im Monat (30 Tage) | Sekunden im Jahr (365 Tage) | ppm |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 3 | 36,5 | 1,16 |
| 0,5 | 15 | 182,5 | 5,79 |
| 1 | 30 | 365 | 11,6 |
| 5 | 150 | 1825 | 57,9 |
| 10 | 300 | 3650 | 116 |
| 30 | 900 | 10 950 | 347 |

ppm heißt Millionstel. 1 s am Tag ist ein Fehler von 1 zu 86 400, also 11,6 ppm (Abschnitt XL 1.1).

## Gang aus der Abweichung der Schlagzahl

(6.5) GESELLE

$$G = \frac{n_{\text{ist}} - n_{\text{soll}}}{n_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Jede Uhr zählt Schwingungen. Schwingt der Gangregler um einen Bruchteil zu schnell, geht die Uhr um denselben Bruchteil vor. Mit Frequenzen statt Schlagzahlen steht die Formel in Abschnitt 3.4, für den Quarz in Abschnitt 7.2.

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $n_{\text{ist}}$ | gemessene Schlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |
| $n_{\text{soll}}$ | Sollschlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ |

**Gilt:** Schlagzahl über die Messzeit gemittelt.

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde macht in einer Stunde 28 803 Halbschwingungen.

Gegeben: $n_{\text{ist}} = 28\,803\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $n_{\text{soll}} = 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

$$G = \frac{n_{\text{ist}} - n_{\text{soll}}}{n_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} = \frac{28\,803\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} - 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} = 9{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Uhr geht 9 s am Tag vor. Drei Schläge zu viel in der Stunde sind auf dem Zifferblatt drei Achtelsekunden, am Tag 24-mal so viel.

**Merksatz:** Der Stand ist ein Zustand, der Gang eine Änderung. Plus heißt bei beiden: Die Uhr ist vorn.

## 6.2 Zeitwaage

Die Zeitwaage hört die Schläge der Uhr mit einem Mikrofon ab und vergleicht ihre Folge mit einer Quarzfrequenz. Aus einer Messzeit von weniger als einer Minute berechnet sie Gang, Abfallfehler und Amplitude. Alle drei Werte folgen aus gemessenen Zeiten.

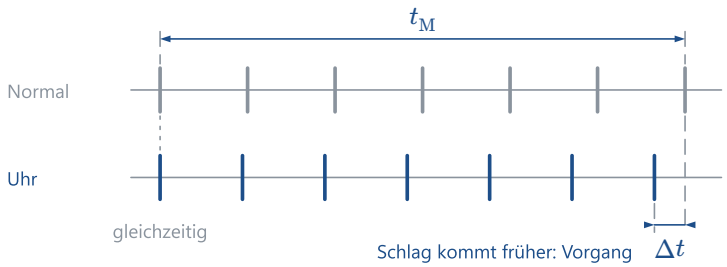



**Abb. 6.2** Prinzip der Zeitwaage: In der Messzeit $t_\mathrm{M}$ verschieben sich die Schläge der Uhr um $\Delta t$ gegen die Normalfrequenz

### Gang aus der Zeitverschiebung der Schläge

(6.6) MEISTER

$$G = \frac{\Delta t}{t_\mathrm{M}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta t = \dfrac{G \cdot t_\mathrm{M}}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta t$ | Zeitverschiebung der Schläge gegen die Normalfrequenz während der Messzeit (+ heißt: Schläge kommen früher) | $\mathrm{ms}$ |
| $t_\mathrm{M}$ | Messzeit | $\mathrm{s}$ |

Kommt jeder Schlag ein wenig früher, als die Normalfrequenz es vorgibt, summiert sich der Vorsprung. Aus Vorsprung und Messzeit folgt der Gang. Im Diagramm der Zeitwaage ist er die Steigung der Punktlinie.

**Gilt:** gleichmäßiger Gang während der Messzeit; über Tick und Tack gemittelt, damit der Abfallfehler nicht in den Gang eingeht.

**Aber Vorsicht:** Der Abstand der Schläge schwankt von Schlag zu Schlag, vor allem durch die Zähne des Hemmungsrads und die Eingriffe des Räderwerks. Wenige Sekunden reichen deshalb nicht für eine Aussage auf 1 s am Tag; üblich sind 10 s bis 60 s Messzeit, bei unruhigem Bild mehr.

BEISPIEL In 30 s Messzeit rücken die Schläge einer Uhr um 2,0 ms gegen die Normalfrequenz vor.

Gegeben: $\Delta t = 2{,}0\,\mathrm{ms}; \quad t_\mathrm{M} = 30\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\Delta t}{t_\mathrm{M}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{2{,}0\,\mathrm{ms}}{30\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 5{,}76\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 5,76 s am Tag vor. Die Zeitwaage zeigt gerundet +5,8 an.

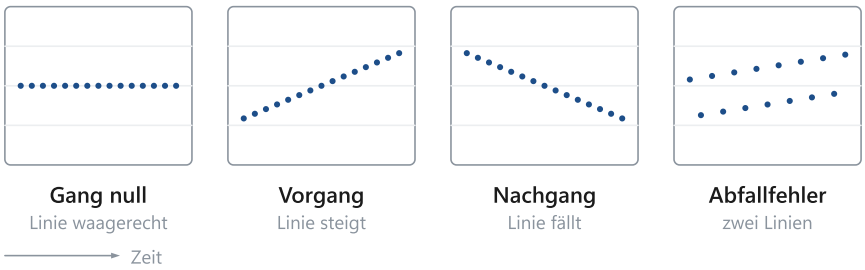



**Abb. 6.3** Diagramm der Zeitwaage: Die Steigung der Punktlinie zeigt den Gang, der Abstand zweier Linien den Abfallfehler

## Zeitverschiebung der Schläge bei 1 $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ Gang

| Messzeit | Zeitverschiebung |
|---|---|
| 2 s | 23 µs |
| 4 s | 46 µs |
| 10 s | 116 µs |
| 30 s | 347 µs |
| 60 s | 694 µs |

Zum Vergleich: Bei 28 800 Halbschwingungen je Stunde liegen zwei Schläge 125 000 µs auseinander.

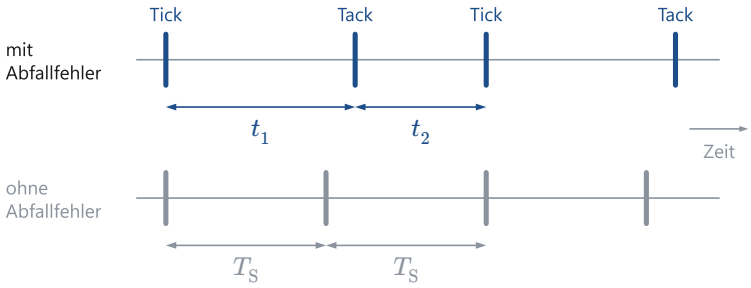



**Abb. 6.4** Abfallfehler: Von Tick bis Tack vergeht mehr Zeit als von Tack bis Tick; $T_S$ ist die Schlagdauer ohne Abfallfehler

## Abfallfehler

(6.7) GESELLE

$$t_A = \frac{|t_1 - t_2|}{2}$$

Steht die Unruh in Ruhe nicht genau in der Mitte der Hemmung, folgen Tick und Tack in ungleichen Abständen. Der Abfallfehler ist die Abweichung jedes Abstands vom Mittel, also der halbe Unterschied der beiden Abstände. Wie der Abfallfehler an der Hemmung entsteht, zeigt Abschnitt 5.4.

**Gilt:** Zeiten jeweils vom ersten Geräusch eines Schlags bis zum ersten Geräusch des nächsten; Anzeige als Betrag.

| | | |
|---|---|---|
| $t_A$ | Abfallfehler | ms |
| $t_1$ | Dauer der einen Halbschwingung (Tick bis Tack) | ms |
| $t_2$ | Dauer der folgenden Halbschwingung (Tack bis Tick) | ms |

**Gut zu wissen:** Richtwerte: Die Werkhersteller lassen bei voll aufgezogenem Werk in der Lage Zifferblatt oben meist höchstens 0,6 ms bis 0,8 ms zu (ETA 2892A2 und ETA 7750: 0,6 ms; Sellita SW200 je nach Qualitätsstufe 0,8 ms oder 0,6 ms). Ab etwa 1 ms sollte der Abfall in jedem Fall berichtigt werden. Maßgebend ist die Angabe des Werkherstellers. Ein großer Abfallfehler erschwert das selbstständige Anlaufen der Uhr.

BEISPIEL Bei einem Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde misst die Zeitwaage von Tick bis Tack 125,6 ms und von Tack bis Tick 124,4 ms.

Gegeben: $t_1 = 125{,}6\,\text{ms}$; $t_2 = 124{,}4\,\text{ms}$

$$t_A = \frac{|t_1 - t_2|}{2} = \frac{|125{,}6\,\text{ms} - 124{,}4\,\text{ms}|}{2} = 0{,}6\,\text{ms}$$

0,6 ms: Der eine Abstand ist 0,6 ms länger, der andere 0,6 ms kürzer als die Sollschlagdauer von 125 ms. Im Diagramm laufen zwei Linien nebeneinander.

## Abfallfehler als Winkel

(6.8) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\varepsilon \approx \pi \cdot f \cdot A \cdot t_A$$

Derselbe Versatz der Ruhelage zeigt sich bei kleiner Amplitude als größerer Abfallfehler in Millisekunden, weil die Unruh dann langsamer durch die Mitte läuft. Abfallfehler vergleicht man deshalb bei gleicher Amplitude.

**Gilt:** Versatz klein gegen die Amplitude; sinusförmige Schwingung.

| | | |
|---|---|---|
| $\varepsilon$ | Winkel (zwischen der Ruhelage der Unruh und der Mitte der Hemmung) | ° |
| $f$ | Frequenz (der Unruh; volle Schwingungen je Sekunde; 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 4 Hz) | Hz |
| $A$ | Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt) | ° |
| $t_A$ | Abfallfehler | ms |

BEISPIEL Eine Uhr mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde zeigt bei 270° Amplitude 0,6 ms Abfallfehler.

Gegeben: $f = 4\,\text{Hz}$; $A = 270°$; $t_A = 0{,}6\,\text{ms}$

$$\varepsilon \approx \pi \cdot f \cdot A \cdot t_A = \pi \cdot 4\,\text{Hz} \cdot 270° \cdot 0{,}6\,\text{ms} \approx 2{,}0°$$

Die Ruhelage der Unruh liegt rund 2° neben der Mitte. Um diesen Winkel muss die Spiralrolle oder der bewegliche Klötzchenträger gedreht werden. Bei 180° Amplitude zeigte dieselbe Uhr 0,9 ms.

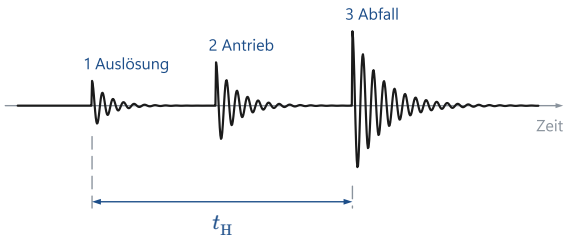



**Abb. 6.5** Geräusch eines Schlags der Ankerhemmung: Die Hebungszeit $t_H$ reicht vom ersten bis zum dritten Impuls

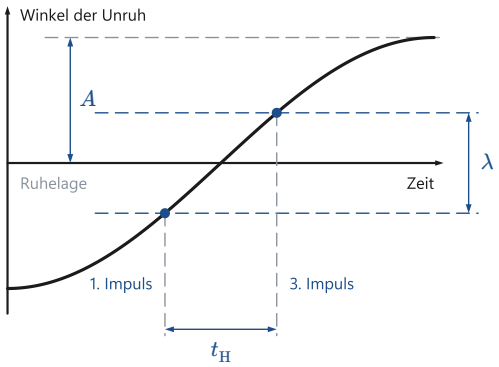



**Abb. 6.6** Die Unruh durchläuft den Hebungswinkel $\lambda$ beiderseits der Ruhelage in der Hebungszeit $t_H$ (Winkel vergrößert gezeichnet)

## Amplitude aus Hebungswinkel und Hebungszeit

(6.9) MEISTER

$$A = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot f \cdot t_H\right)}$$

UMGESTELLT $$t_H = \frac{\arcsin\left(\frac{\lambda}{2 \cdot A}\right)}{\pi \cdot f}$$

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt) | ° |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; Angabe des Herstellers, an der Zeitwaage eingestellt) | ° |
| $f$ | Frequenz (der Unruh; volle Schwingungen je Sekunde; 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 4 Hz) | $\mathrm{Hz}$ |
| $t_H$ | Hebungszeit (vom ersten bis zum dritten Geräusch eines Schlags) | $\mathrm{ms}$ |

Die Unruh durchläuft den Hebungswinkel umso schneller, je größer ihre Amplitude ist. Die Zeitwaage misst die Hebungszeit zwischen dem ersten und dem dritten Geräusch eines Schlags und rechnet daraus die Amplitude.

**Gilt:** sinusförmige Schwingung, Hebungswinkel symmetrisch zur Ruhelage. Das Produkt $\pi \cdot f \cdot t_H$ ist ein Winkel im Bogenmaß; der Taschenrechner muss für den Sinus auf rad stehen.

**Gut zu wissen:** Herleitung: Die Unruh schwingt nach $\varphi = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$. Der Hebungswinkel liegt symmetrisch zur Ruhelage, also erreicht die Unruh den halben Hebungswinkel nach der halben Hebungszeit: $\frac{\lambda}{2} = A \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot t_H)$.

**Gut zu wissen:** Für übliche Amplituden genügt die Näherung $A \approx \frac{\lambda}{2\pi \cdot f \cdot t_H}$. Im Beispiel ergibt sie 268,7°, also 0,4° zu wenig.

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde hat 52° Hebungswinkel. Die Zeitwaage misst 7,7 ms Hebungszeit.

Gegeben: $\lambda = 52°$; $f = 4\,\mathrm{Hz}$; $t_H = 7{,}7\,\mathrm{ms}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot f \cdot t_H\right)} \\ &= \frac{52°}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot 4\,\mathrm{Hz} \cdot 7{,}7\,\mathrm{ms}\right)} \\ &= \frac{52°}{2 \cdot \sin(0{,}0968)} \\ &\approx 269° \end{aligned}$$

Die Unruh schwingt mit rund 269°. Bei 300° wäre die Hebungszeit auf 6,9 ms geschrumpft.

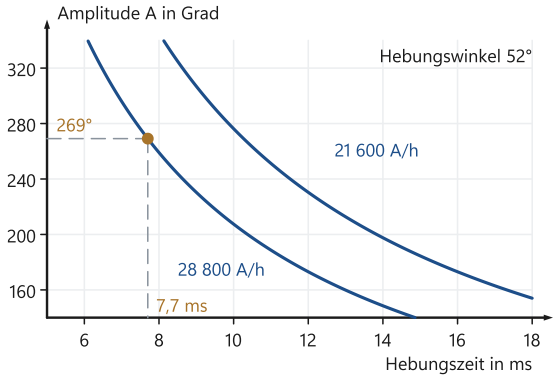



**Abb. 6.7** Amplitude über der Hebungszeit bei 52° Hebungswinkel: Je kürzer die Hebungszeit, desto größer die Amplitude

### Hebungszeit in ms bei 52° Hebungswinkel

| Amplitude | 28 800 A/h (4 Hz) | 21 600 A/h (3 Hz) | 18 000 A/h (2,5 Hz) |
|---|---|---|---|
| 200° | 10,4 | 13,8 | 16,6 |
| 220° | 9,4 | 12,6 | 15,1 |
| 240° | 8,6 | 11,5 | 13,8 |
| 260° | 8,0 | 10,6 | 12,8 |
| 280° | 7,4 | 9,9 | 11,8 |
| 300° | 6,9 | 9,2 | 11,0 |
| 320° | 6,5 | 8,6 | 10,4 |

Berechnet mit der umgestellten Formel. Zwischen 280° und 300° ändert sich die Hebungszeit bei 4 Hz nur um 0,5 ms: Die Zeitwaage muss sie auf Hundertstel Millisekunden genau messen.

### Amplitude bei falsch eingestelltem Hebungswinkel

(6.10) MEISTER

$$A = \frac{A_Z \cdot \lambda}{\lambda_Z}$$

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | Amplitude (wirklicher Wert) | ° |
| $A_Z$ | von der Zeitwaage angezeigte Amplitude | ° |
| $\lambda$ | Hebungswinkel (der Unruh; wirklicher Wert des Werks) | ° |
| $\lambda_Z$ | an der Zeitwaage eingestellter Hebungswinkel | ° |

Die Zeitwaage misst nur die Hebungszeit; den Hebungswinkel muss man ihr sagen. Ist er falsch eingestellt, ist die angezeigte Amplitude im selben Verhältnis falsch: 4 % zu viel Hebungswinkel ergeben 4 % zu viel Amplitude. Für die Fehler gilt $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$.

**Gilt:** folgt aus der Amplitudenformel: Bei gleicher Hebungszeit ist die Amplitude proportional zum Hebungswinkel.

**Aber Vorsicht:** Bei unbekanntem Hebungswinkel die Amplitude an der Unruh prüfen. Eine Unruh mit zwei Schenkeln zeigt bei 180° Amplitude in den Umkehrpunkten dasselbe Bild wie in der Ruhelage; bei 270° stehen die Schenkel in beiden Umkehrpunkten gleich, quer zur Ruhelage. Den Hebungswinkel an der Zeitwaage so einstellen, dass die Anzeige dazu passt.

BEISPIEL Die Zeitwaage steht auf 52° und zeigt 280°. Das Werk hat aber 50° Hebungswinkel.

Gegeben: $A_Z = 280°$; $\lambda = 50°$; $\lambda_Z = 52°$

$$A = \frac{A_Z \cdot \lambda}{\lambda_Z} = \frac{280° \cdot 50°}{52°} \approx 269°$$

Die Unruh schwingt nur mit rund 269°. Jedes Grad Fehler im Hebungswinkel macht hier gut 5° in der Amplitude aus.

### Übliche Hebungswinkel (Richtwerte)

| Hemmung und Bauzeit | Hebungswinkel der Unruh |
|---|---|
| Schweizer Ankerhemmung, neuere Armbanduhrwerke | meist 49° … 53° |
| Schweizer Ankerhemmung, ältere Armbanduhr- und Taschenuhrwerke | häufig kleiner, etwa 38° … 46° |
| Co-Axial-Hemmung | rund 30° … 38° |

Der Hebungswinkel ist eine Konstruktionsgröße des Kalibers. Maßgebend ist das Datenblatt des Herstellers; fehlt es, hilft die Sichtprobe an der Unruh. Beispiele: ETA 2824-2 50°, ETA 2892A2 51°, ETA 7750 49°, Sellita SW200 50°, ETA 6497-1 44°.

**Merksatz:** Die Zeitwaage misst Zeiten. Gang, Abfallfehler und Amplitude sind daraus gerechnet, und die Amplitude stimmt nur mit dem richtigen Hebungswinkel.

## 6.3 Lagen und Kennzahlen

Eine Uhr geht nicht in jeder Lage gleich: Lagerreibung, Schwerpunkt der Unruh und Spirale wirken je nach Lage verschieden. Geprüft wird deshalb in bis zu sechs Lagen, einmal voll aufgezogen und einmal nach 24 Stunden Lauf.

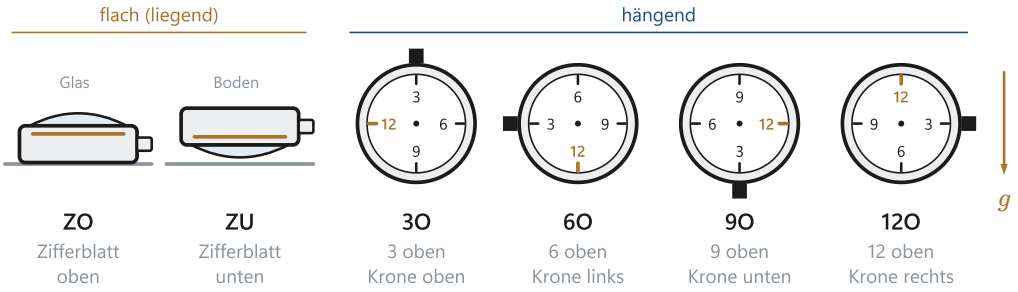



**Abb. 6.8** Die sechs Prüflagen einer Armbanduhr mit der Krone bei der 3

### Die sechs Prüflagen und ihre Kurzzeichen

| Lage | deutsch | international | Krone der Armbanduhr |
|---|---|---|---|
| Zifferblatt oben | ZO | CH | liegend |
| Zifferblatt unten | ZU | FH (auch CB) | liegend |
| 3 oben | 3O | 3H | oben |
| 6 oben | 6O | 6H | links |
| 9 oben | 9O | 9H | unten |
| 12 oben | 12O | 12H | rechts |

Die Kurzzeichen nennen, was oben ist. International sind die französischen Zeichen üblich: H für haut (oben), C für cadran (Zifferblatt), F für fond (Boden), B für bas (unten). Englisch heißen die flachen Lagen DU (dial up) und DD (dial down). Die Angaben zur Krone gelten für Armbanduhren mit der Krone bei der 3; bei Taschenuhren sitzt sie bei der 12.

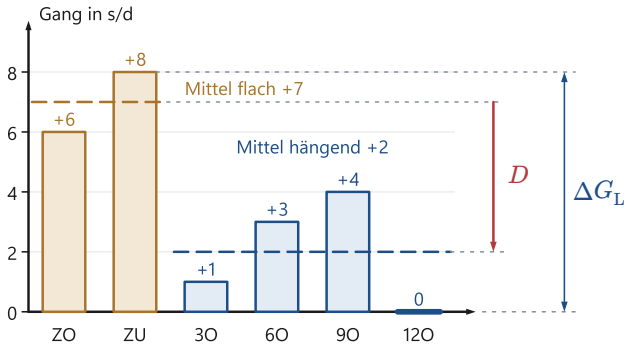



**Abb. 6.9** Gänge in sechs Lagen: größte Lagendifferenz $\Delta G_\mathrm{L}$ und Differenz hängend–flach $D$

## Größte Lagendifferenz

(6.11) GESELLE

$$\Delta G_\mathrm{L} = G_\mathrm{max} - G_\mathrm{min}$$

Die größte Lagendifferenz ist das einfachste Maß für die Güte der Reglage: Je kleiner sie ist, desto weniger hängt der Gang davon ab, wie die Uhr getragen und abgelegt wird.

**Gilt:** alle Lagen bei gleichem Aufzugszustand und gleicher Temperatur gemessen.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G_\mathrm{L}$ | größte Lagendifferenz | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_\mathrm{max}$ | größter Gang aller Lagen (mit Vorzeichen) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_\mathrm{min}$ | kleinster Gang aller Lagen (mit Vorzeichen) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

BEISPIEL Eine Uhr zeigt voll aufgezogen: ZO +6, ZU +8, 3O +1, 6O +3, 9O +4 und 12O 0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $G_\mathrm{max} = 8\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_\mathrm{min} = 0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G_\mathrm{L} &= G_\mathrm{max} - G_\mathrm{min}\\ &= 8\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\\ &= 8\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

8 s am Tag zwischen der schnellsten Lage (Zifferblatt unten) und der langsamsten (12 oben). Der mittlere Gang der sechs Lagen ist +3,7 s am Tag.

### Differenz hängend–flach

(6.12) MEISTER

$$D = G_{\mathrm{h}} - G_{\mathrm{f}}$$

Die hängenden Lagen werden gemittelt und mit dem Mittel der flachen Lagen verglichen. Ein negatives Ergebnis heißt: Die Uhr geht hängend langsamer als flach.

**Gilt:** gleicher Aufzugszustand in allen Lagen. Die Chronometerprüfung bildet $D$ nur aus zwei Lagen, 6 oben und Zifferblatt oben (Abschnitt 6.4).

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | Differenz hängend–flach (+ heißt: Gang hängend größer als flach) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_{\mathrm{h}}$ | mittlerer Gang der hängenden Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_{\mathrm{f}}$ | mittlerer Gang der flachen Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

**Gut zu wissen:** Im Mittel der vier hängenden Lagen hebt sich der Einfluss einer Unwucht der Unruh weitgehend auf. Was bleibt, kommt von der kleineren Amplitude und der anderen Lagerung der Zapfen. Die Unwucht zeigt sich in den Unterschieden der hängenden Lagen untereinander (Abschnitt 3.3).

BEISPIEL Die Uhr aus dem Beispiel davor: Mittel der vier hängenden Lagen +2,0, Mittel der beiden flachen Lagen +7,0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $G_{\mathrm{h}} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_{\mathrm{f}} = 7{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} D &= G_{\mathrm{h}} - G_{\mathrm{f}} \\ &= 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 7{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -5{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Hängend geht die Uhr 5 s am Tag langsamer als flach. Hängend ist die Amplitude kleiner; die Uhr verliert also bei kleiner Amplitude, ein Zeichen für einen Isochronismusfehler (Abschnitt 3.7).

### Was Lagenunterschiede zeigen (Richtschnur für die Fehlersuche)

| Beobachtung | häufige Ursache |
|---|---|
| Zifferblatt oben und unten verschieden | Zapfenenden oder Decksteine, Öl, Spirale liegt nicht flach oder streift |
| hängend langsamer oder schneller als flach | Isochronismusfehler: Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften, Form der Spirale, Hemmung |
| hängende Lagen untereinander verschieden | Unwucht der Unruh, Spirale nicht zentrisch |
| Amplitude hängend viel kleiner als flach | Reibung an den Unruhzapfen: Zapfen, Lochsteine, Öl |

Die Tabelle gibt Hinweise, keine sicheren Diagnosen; oft wirken mehrere Ursachen zusammen.

### Gang im Tragen aus zwei Lagengruppen

(6.13) VERTIEFUNG

$$G_{\mathrm{T}} = a \cdot G_{\mathrm{f}} + (1 - a) \cdot G_{\mathrm{h}}$$

Am Arm und auf dem Nachttisch wechseln die Lagen. Der Gang im Tragen liegt zwischen dem Mittel flach und dem Mittel hängend, je nach Zeitanteil.

**Gilt:** vereinfachtes Modell mit zwei Lagengruppen; Temperatur am Arm, Bewegung und Aufzugszustand sind nicht berücksichtigt.

| | | |
|---|---|---|
| $G_{\mathrm{T}}$ | erwarteter Gang im Tragen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $a$ | Zeitanteil der flachen Lagen | 1 |
| $G_{\mathrm{f}}$ | mittlerer Gang der flachen Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_{\mathrm{h}}$ | mittlerer Gang der hängenden Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

BEISPIEL Die Uhr aus den Beispielen davor liegt nachts und zeitweise am Tag flach, zusammen 40 % der Zeit.

Gegeben: $a = 0{,}4$; $G_{\mathrm{f}} = 7{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_{\mathrm{h}} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{T}} &= a \cdot G_{\mathrm{f}} + (1 - a) \cdot G_{\mathrm{h}} \\ &= 0{,}4 \cdot 7{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + (1 - 0{,}4) \cdot 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 4{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Rund +4 s am Tag. Wer die Uhr nachts flach ablegt, lässt sie hier schneller gehen; hängend abgelegt geht sie langsamer.

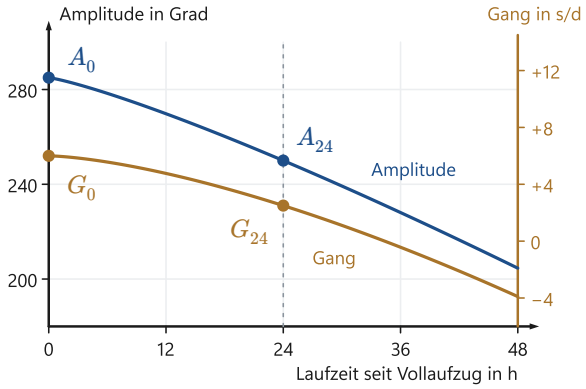



**Abb. 6.10** Amplitude und Gang über der Laufzeit (Beispiel): Aus den Werten bei 0 h und 24 h folgen Amplitudenabfall und Isochronismusfehler

## Isochronismusfehler aus 0 h und 24 h

(6.14) MEISTER

$$\Delta G = G_{24} - G_0$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Isochronismusfehler (+ heißt: Uhr wird mit ablaufender Feder schneller) | $\frac{\text{s}}{\text{d}}$ |
| $G_{24}$ | Gang nach 24 Stunden Lauf | $\frac{\text{s}}{\text{d}}$ |
| $G_0$ | Gang voll aufgezogen | $\frac{\text{s}}{\text{d}}$ |

Mit dem Ablaufen der Zugfeder sinkt die Amplitude. Ändert sich dabei der Gang, ist der Gangregler nicht isochron. Die Formel ist dieselbe wie in Abschnitt 3.7, hier mit den beiden Messzeitpunkten der Werkstatt.

**Gilt:** gleiche Lage und gleiche Temperatur bei beiden Messungen.

BEISPIEL Eine Uhr geht mit Zifferblatt oben voll aufgezogen 6,0 s am Tag vor, nach 24 Stunden Lauf in derselben Lage 2,5 s am Tag.

Gegeben: $G_{24} = 2{,}5\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$; $G_0 = 6{,}0\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G &= G_{24} - G_0 \\ &= 2{,}5\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} - 6{,}0\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= -3{,}5\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr ist nach 24 Stunden um 3,5 s am Tag langsamer geworden. Wird sie täglich aufgezogen, liegt ihr Gang zwischen beiden Werten.

## Amplitudenabfall in 24 Stunden

(6.15) GESELLE

$$\Delta A = A_0 - A_{24}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta A$ | Amplitudenabfall | ° |
| $A_0$ | Amplitude voll aufgezogen | ° |
| $A_{24}$ | Amplitude nach 24 Stunden Lauf | ° |

Der Amplitudenabfall zeigt, wie gleichmäßig Zugfeder und Räderwerk die Kraft über den Tag liefern.

**Gilt:** gleiche Lage bei beiden Messungen, richtig eingestellter Hebungswinkel.

BEISPIEL Mit Zifferblatt oben schwingt die Unruh voll aufgezogen mit 285°, nach 24 Stunden mit 250°.

Gegeben: $A_0 = 285°$; $A_{24} = 250°$

$$\begin{aligned}\Delta A &= A_0 - A_{24} \\ &= 285° - 250° \\ &= 35°\end{aligned}$$

35° in 24 Stunden. Wichtiger als der Abfall selbst ist, dass die Amplitude nach 24 Stunden auch in den hängenden Lagen noch ausreicht; die Werkhersteller nennen dafür Mindestwerte, häufig 190° bis 200° in der Lage 6 oben (ETA 2892A2 und ETA 7750: 200°).

**Merksatz:** Flach gegen hängend zeigt den Einfluss der Amplitude, hängend gegen hängend die Unwucht, voll aufgezogen gegen 24 Stunden den Isochronismus.

## 6.4 Chronometerprüfung

Chronometer heißt nach ISO 3159 eine Uhr, deren Werk eine neutrale Stelle über mehrere Tage in verschiedenen Lagen und bei verschiedenen Temperaturen geprüft hat; in der Schweiz ist das die COSC. Die Prüfung dauert 15 Tage, mit fünf Lagen und drei Temperaturen. Aus den 15 Tagesgängen werden sieben Kennzahlen berechnet. Andere Prüfungen, etwa die der METAS oder nach DIN 8319, gelten der fertigen Uhr und verlangen zum Teil mehr.




**Abb. 6.11** Prüfprogramm der Chronometerprüfung nach ISO 3159: Lage und Temperatur an den 15 Prüftagen

### Die sieben Kennzahlen der Chronometerprüfung nach ISO 3159 (Uhren über 20 mm Durchmesser)

| Nr. | Kennzahl | Berechnung aus den Tagesgängen $G_1$ bis $G_{15}$ | Grenzwert nach ISO 3159 in $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | mittlerer täglicher Gang | $\bar{G} = \frac{1}{10} \cdot (G_1 + G_2 + \cdots + G_{10})$ | −4 … +6 |
| 2 | mittlere Gangabweichung | $\frac{1}{5} \cdot (\lvert G_2 - G_1\rvert + \lvert G_4 - G_3\rvert + \cdots + \lvert G_{10} - G_9\rvert)$ | höchstens 2 |
| 3 | größte Gangabweichung | größter der fünf Beträge aus Zeile 2 | höchstens 5 |
| 4 | Differenz hängend–flach $D$ | $\frac{1}{2} \cdot (G_1 + G_2) - \frac{1}{2} \cdot (G_9 + G_{10})$ | −6 … +8 |
| 5 | größte Differenz zum mittleren Gang | größter der zehn Beträge $\lvert G_i - \bar{G}\rvert$ der Tage 1 bis 10 | höchstens 10 |
| 6 | Temperaturkoeffizient $C$ | $\frac{1}{30\,\mathrm{K}} \cdot (G_{13} - G_{11})$ | ±0,6 je K |
| 7 | Gangwiederaufnahme | $G_{15} - \frac{1}{2} \cdot (G_1 + G_2)$ | ±5 |

Jede der sieben Grenzen muss eingehalten sein. Für Uhren bis 20 mm Durchmesser lässt die Norm etwas weitere Grenzen zu. Die Tagesgänge schreibt die Norm $M_i$; hier stehen sie wie im ganzen Buch als $G_i$.

## Mittlere Gangabweichung

(6.16) MEISTER

$$\overline{\Delta G} = \frac{\sum |G_{2k} - G_{2k-1}|}{5}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{\Delta G}$ | mittlere Gangabweichung | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\sum \lvert G_{2k} - G_{2k-1}\rvert$ | Summe der fünf Beträge: Unterschied der beiden Tagesgänge je Lage | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

In jeder der fünf Lagen wird an zwei Tagen hintereinander gemessen. Die Kennzahl sagt, wie gut die Uhr ihren Gang von einem Tag zum nächsten wiederholt.

**Gilt:** nach ISO 3159: Tage 1 bis 10 bei 23 °C; Grenzwert 2 s am Tag (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL In den fünf Lagen unterscheiden sich die beiden Tagesgänge um 1,0, 0,8, 2,1, 0,7 und 1,4 Sekunden je Tag. Die Summe ist 6,0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $\sum |G_{2k} - G_{2k-1}| = 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\overline{\Delta G} &= \frac{\sum |G_{2k} - G_{2k-1}|}{5} \\ &= \frac{6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{5} \\ &= 1{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

1,2 s am Tag, der Grenzwert von 2 s am Tag ist eingehalten. Auch der größte Einzelwert, 2,1 s am Tag, liegt unter seiner Grenze von 5 s am Tag.

## Temperaturkoeffizient in der Chronometerprüfung

(6.17) MEISTER

$$C = \frac{G_{38} - G_8}{30\,\mathrm{K}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $C$ | Temperaturkoeffizient des Gangs | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}$ |
| $G_{38}$ | Gang bei 38 °C (Tag 13) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_8$ | Gang bei 8 °C (Tag 11) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

Beide Gänge werden in derselben Lage gemessen, mit dem Zifferblatt oben. Die allgemeine Form für beliebige Prüftemperaturen steht in Abschnitt 3.5.

**Gilt:** nach ISO 3159: Grenzwert ±0,6 s am Tag je Kelvin (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL Eine Uhr geht bei 8 °C um 2,4 s am Tag vor und bei 38 °C um 7,2 s am Tag.

Gegeben: $G_{38} = 7{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $\quad G_8 = 2{,}4\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}C &= \frac{G_{38} - G_8}{30\,\mathrm{K}} \\ &= \frac{7{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 2{,}4\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{30\,\mathrm{K}} \\ &= 0{,}16\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}\end{aligned}$$

+0,16 s am Tag je Kelvin: Die Uhr wird in der Wärme schneller. Der Grenzwert von 0,6 ist klar eingehalten.

### Gangwiederaufnahme

(6.18) MEISTER

$$\Delta G_{\mathrm{W}} = G_{15} - \frac{G_1 + G_2}{2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G_{\mathrm{W}}$ | Gangwiederaufnahme | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_{15}$ | Gang am letzten Prüftag | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_1$ | Gang am ersten Prüftag | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $G_2$ | Gang am zweiten Prüftag | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |

Am letzten Tag liegt die Uhr wieder in der Lage der ersten beiden Tage. Die Kennzahl zeigt, ob die Uhr nach zwei Wochen Prüfung mit Kälte und Wärme zu ihrem Anfangsgang zurückfindet.

**Gilt:** nach ISO 3159: Lage 6 oben bei 23 °C; Grenzwert ±5 s am Tag (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL Die Uhr aus dem Beispiel zur mittleren Gangabweichung geht an den ersten beiden Tagen 3,0 und 4,0 s am Tag vor, am letzten Tag 4,5 s am Tag.

Gegeben: $G_{15} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 3{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_2 = 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G_{\mathrm{W}} &= G_{15} - \frac{G_1 + G_2}{2} \\ &= 4{,}5\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - \frac{3{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{2} \\ &= 1{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

+1,0 s am Tag, weit innerhalb der Grenze von ±5 s am Tag. Die Uhr hat ihren Anfangsgang fast wieder erreicht.

**Merksatz:** Chronometer heißt: 15 Tage geprüft, in fünf Lagen und bei drei Temperaturen, im Mittel zwischen −4 und +6 s am Tag.

## 6.5 Wasserdichtheit und Druck

Wasser drückt mit jedem Meter Tiefe stärker auf Glas, Boden und Dichtungen. Die Druckangabe auf einer Uhr nennt den Prüfüberdruck. Er gilt für die neue Uhr und für ruhenden Druck, in Wasser oder in Luft. Die Anforderungen an wasserdichte Uhren stehen in ISO 22810.

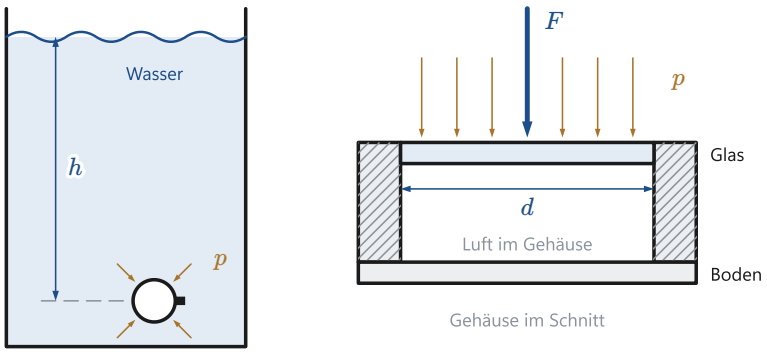



**Abb. 6.12** Links: Der Wasserdruck wächst mit der Tiefe $h$. Rechts: Der Druck $p$ belastet das Glas vom Durchmesser $d$ mit der Kraft $F$

## Druck einer Wassersäule

(6.19) GESELLE

$$p = \varrho \cdot g \cdot h$$

UMGESTELLT $h = \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$

Der Druck wächst gleichmäßig mit der Tiefe, in Süßwasser um knapp 1 bar je 10 m.

**Gilt:** ruhendes Wasser. Süßwasser hat $1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, Meerwasser rund $1025\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | Druck (Überdruck gegenüber der Wasseroberfläche) | $\mathrm{bar}$ |
| $\varrho$ | Dichte (des Wassers) | $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $h$ | Höhe (der Wassersäule über der Uhr, also die Tauchtiefe) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Welcher Überdruck herrscht in 100 m Tiefe in Süßwasser?

Gegeben: $\varrho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 100\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} p &= \varrho \cdot g \cdot h \\ &= 1000\ \tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\,\mathrm{m} \\ &= 981\,000\,\mathrm{Pa} \\ &= 9{,}81\,\mathrm{bar} \end{aligned}$$

9,81 bar, gerundet 10 bar. Daher die Faustregel: 10 m Wassersäule entsprechen 1 bar.

## Druckkraft auf Glas oder Boden

(6.20) GESELLE

$$F = \frac{p \cdot \pi \cdot d^2}{4}$$

Die Kraft ist Druck mal Fläche (Abschnitt XL 2.2), hier mit der Kreisfläche ausgeschrieben. Sie wächst mit dem Quadrat des Durchmessers: Große Uhren brauchen dickere Gläser und steifere Böden.

**Gilt:** Druck gleichmäßig auf einer Kreisfläche; $1\,\mathrm{bar} = 0{,}1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.

| | | |
|---|---|---|
| $F$ | Kraft (auf die gedrückte Fläche) | $\mathrm{N}$ |
| $p$ | Druck (Überdruck außen gegenüber innen) | $\mathrm{bar}$ |
| $d$ | Durchmesser (der gedrückten Fläche, hier des Glases) | $\mathrm{mm}$ |

BEISPIEL Eine Taucheruhr wird mit 30 bar geprüft. Das Glas hat 28 mm Durchmesser. Mit welcher Kraft wird es belastet?

Gegeben: $p = 30\,\mathrm{bar}$; $d = 28\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} F &= \frac{p \cdot \pi \cdot d^2}{4} \\ &= \frac{30\,\mathrm{bar} \cdot \pi \cdot (28\,\mathrm{mm})^2}{4} \\ &= 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot 784\,\mathrm{mm}^2}{4} \\ &\approx 1847\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Rund 1850 N, so viel wie die Gewichtskraft von 188 kg. Diese Kraft presst das Glas in seine Dichtung und wölbt es nach innen. Das Beispiel für 10 bar steht bei Formel (XL 2.11).

Geprüft wird meist trocken: Das Prüfgerät setzt die Uhr in einer Kammer unter Überdruck oder Unterdruck und tastet ab, wie sich das Gehäuse verformt. Ein dichtes Gehäuse wird zusammengedrückt oder gewölbt und bleibt so, solange der Druck ansteht. Ist es undicht, gleicht sich der Druck innen und außen aus und die Verformung geht zurück. Bei der Nassprüfung steht die Uhr zuerst über dem Wasser unter Druck, wird dann eingetaucht und der Druck abgelassen; aus einer undichten Uhr steigen Luftblasen auf.

### Staudruck bei Bewegung im Wasser

(6.21) VERTIEFUNG

$$p_{\text{dyn}} = \frac{\varrho \cdot v^2}{2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $p_{\text{dyn}}$ | Staudruck (zusätzlicher Druck durch die Anströmung) | $\text{bar}$ |
| $\varrho$ | Dichte (des Wassers) | $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| $v$ | Geschwindigkeit (der Uhr gegenüber dem Wasser) | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

Bewegt sich die Uhr durch das Wasser, kommt zum Druck der Tiefe der Staudruck hinzu. Er bleibt klein.

**Gilt:** gleichmäßige Anströmung; das Wasser wird an der Uhr ganz abgebremst. Das ist der größte Druck, den eine gleichmäßige Bewegung erzeugt; der Schlag beim Aufprall auf die Wasseroberfläche ist damit nicht erfasst.

BEISPIEL Bei einer sehr schnellen Armbewegung fährt das Handgelenk mit 5 m in der Sekunde durch das Wasser.

Gegeben: $\varrho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $v = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned} p_{\text{dyn}} &= \frac{\varrho \cdot v^2}{2} \\ &= \frac{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \\ &= 12\,500\ \text{Pa} \\ &= 0{,}125\ \text{bar} \end{aligned}$$

0,125 bar, so viel wie 1,3 m mehr Tiefe. Schwimmbewegungen erhöhen den Druck also kaum. Wird eine Uhr im Wasser undicht, liegt das meist an gealterten Dichtungen, an Temperaturwechseln oder an Krone und Drückern, die unter Wasser betätigt wurden.

**Merksatz:** 10 m Wassersäule sind rund 1 bar. Die Kraft auf das Glas ist Druck mal Fläche.

## 6.6 Magnetismus und Stoß

Magnetfelder und Stöße sind die häufigsten Störungen im Alltag. Normen legen fest, was eine Uhr aushalten muss, um antimagnetisch oder stoßgesichert zu heißen: ISO 764 verlangt ein Feld von $4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$, ISO 1413 einen Stoß wie beim Fall aus 1 m Höhe.

### Flussdichte und Feldstärke in Luft

(6.22) MEISTER

$$B = \mu_0 \cdot H$$

| | | |
|---|---|---|
| $B$ | magnetische Flussdichte ($1\ \frac{\text{V·s}}{\text{m}^2} = 1\,\text{T} = 10\,000\,\text{G}$) | $\frac{\text{V·s}}{\text{m}^2}$ |
| $\mu_0$ | magnetische Feldkonstante | $\frac{\text{V·s}}{\text{A·m}}$ |
| $H$ | magnetische Feldstärke | $\frac{\text{A}}{\text{m}}$ |

Die Normen nennen die Feldstärke $H$, Magnete und Messgeräte meist die Flussdichte $B$ in Millitesla oder Gauss. In Luft sind beide fest verknüpft: 1 mT entspricht $796\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und 10 Gauss.

**Gilt:** in Luft und in nicht magnetischen Stoffen.

BEISPIEL Welcher Flussdichte entspricht die Feldstärke von $4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$, die eine antimagnetische Uhr nach ISO 764 aushalten muss?

Gegeben: $\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{V·s}}{\text{A·m}}$; $H = 4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \cdot H \\ &= 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{V·s}}{\text{A·m}} \cdot 4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ &\approx 6{,}03 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{V·s}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

6,03 mT oder 60 Gauss. Ein kleiner Dauermagnet, etwa im Verschluss einer Tasche oder in einem Lautsprecher, ist an seiner Oberfläche um ein Vielfaches stärker.

### Magnetfelder in Luft umrechnen

| Feldstärke in $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ | Flussdichte in mT | Flussdichte in Gauss | Beispiel |
|---|---|---|---|
| 40 | 0,05 | 0,5 | Magnetfeld der Erde (Größenordnung) |
| 796 | 1 | 10 | Umrechnungswert |
| 4800 | 6,03 | 60,3 | Prüffeld für antimagnetische Uhren nach ISO 764 |
| 79 600 | 100 | 1000 | dicht an kleinen Dauermagneten (Größenordnung) |

Gauss ist eine ältere Einheit: 1 G = 0,1 mT. Die Beispiele außer dem Normwert sind Größenordnungen.

### Aufprallgeschwindigkeit beim Fall

(6.23) MEISTER

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Die Stoßprüfung nach ISO 1413 bildet den Fall einer Uhr aus 1 m Höhe auf einen Holzboden nach. Die Formel liefert die Geschwindigkeit, mit der die Uhr aufkommt.

**Gilt:** freier Fall ohne Luftwiderstand.

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | Geschwindigkeit (beim Aufprall) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| $h$ | Höhe (Fallhöhe) | $\mathrm{m}$ |

BEISPIEL Eine Uhr fällt vom Werktisch 1 m tief auf den Boden.

Gegeben: $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 1\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m}} \\ &\approx 4{,}43\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

$4{,}43\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind rund 16 km in der Stunde. Mit dieser Geschwindigkeit trifft bei der Stoßprüfung der Hammer auf die Uhr.

## 6.7 Ablesefehler und Streuung

Jede Messung streut. Mittelwert, Spannweite und Standardabweichung einer Messreihe stehen in Abschnitt XL 12.1; das Beispiel dort ist eine Reihe von Gangwerten. Für die Zeitwaage heißt das zum Beispiel: Streuen zehn Messungen derselben Lage mit einer Standardabweichung von 0,6 s am Tag, ist ihr Mittelwert nach Formel (XL 12.4) auf rund 0,2 s am Tag sicher. Beim Gang aus zwei abgelesenen Ständen kommt der Ablesefehler hinzu.

### Fehler des Gangs durch das Ablesen

(6.24) MEISTER

$$u_G = \frac{2 \cdot u_S}{t}$$

In den Gang gehen zwei Ablesungen ein. Im ungünstigsten Fall addieren sich ihre Fehler; geteilt durch die Laufzeit ergibt das den größten Fehler des Gangs.

**Gilt:** Größtfehler; die Uhr läuft zwischen den Ablesungen ungestört.

| | | |
|---|---|---|
| $u_G$ | größter Fehler des Gangs durch das Ablesen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $u_S$ | größter Ablesefehler eines Standes | $\mathrm{s}$ |
| $t$ | Zeit (Laufzeit zwischen den beiden Ablesungen) | $\mathrm{d}$ |

BEISPIEL Der Stand lässt sich am Sekundenzeiger auf 0,5 s genau ablesen. Zwischen den beiden Ablesungen liegen 10 Tage.

Gegeben: $u_S = 0{,}5\,\mathrm{s}$; $t = 10\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} u_G &= \frac{2 \cdot u_S}{t} \\ &= \frac{2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{s}}{10\,\mathrm{d}} \\ &= 0{,}10\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Nach zehn Tagen ist der Gang auf 0,1 s am Tag sicher, nach einem Tag nur auf 1 s am Tag. Wer schneller ein genaues Ergebnis braucht, nimmt die Zeitwaage.

**Merksatz:** Länger messen bringt mehr als genauer ablesen: Die doppelte Laufzeit halbiert den Ablesefehler im Gang.

# 7 Quarzuhr und Batterie

Die Quarzuhr ersetzt Zugfeder, Hemmung und Unruh durch Batterie, Schaltkreis und Quarz. Wer sie prüfen und reparieren will, braucht nur wenig Elektrotechnik: das Ohmsche Gesetz, Leistung und Ladung, dazu das Verhalten von Batterie, Kondensator und Spule.

Darauf bauen die Formeln der Uhr selbst auf: Laufzeit der Batterie, Frequenzteilung, Gang und Temperaturverhalten des Quarzes, Stromaufnahme des Schrittmotors. In diesem Kapitel steht $U$ für die Spannung, $A$ für den Leiterquerschnitt, $P$ für die Leistung und $C$ für die Kapazität.

## 7.1 Batterie

Die Kapazität einer Batterie ist die Ladung, die sich ihr entnehmen lässt, angegeben in Milliamperestunden (mAh). Sie hat mit der Kapazität des Kondensators nur den Namen gemeinsam. Zusammen mit der Stromaufnahme des Werks ergibt sie die Laufzeit.

### Laufzeit aus Kapazität und Stromaufnahme

(7.1) GESELLE

$$t = \frac{C_\mathrm{N}}{I}$$

UMGESTELLT $I = \dfrac{C_\mathrm{N}}{t}$

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | Zeit (Laufzeit der Batterie) | $\mathrm{h}$ |
| $C_\mathrm{N}$ | Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung) | $\mathrm{mAh}$ |
| $I$ | Stromstärke (mittlere Stromaufnahme des Werks) | $\mathrm{mA}$ |

Kapazität durch Strom ergibt die Laufzeit. Umgekehrt zeigt die Formel, welche Stromaufnahme ein Werk höchstens haben darf, damit die Batterie die versprochene Zeit hält.

**Gilt:** gleichbleibende mittlere Stromaufnahme; Selbstentladung nicht berücksichtigt. Einheiten passend einsetzen: mAh und mA ergeben Stunden.

BEISPIEL Eine Zelle SR626SW hat 28 mAh. Das Werk nimmt im Mittel 1,2 µA auf. Wie lange läuft die Uhr?

Gegeben: $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$; $I = 1{,}2\,\mu\mathrm{A}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{C_\mathrm{N}}{I} \\ &= \frac{28\,\mathrm{mAh}}{1{,}2\,\mu\mathrm{A}} \\ &= 23\,333\,\mathrm{h} \\ &\approx 2{,}66\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Rund 23 300 Stunden, das sind gut zweieinhalb Jahre. Nimmt das Werk durch Verschmutzung 3 µA auf, ist die Zelle schon nach einem Jahr leer.

## Energieinhalt der Batterie

(7.2) NÄHERUNG MEISTER

$$W \approx U_\mathrm{N} \cdot C_\mathrm{N}$$

Nennspannung mal Kapazität ergibt die gespeicherte Energie, meist in Milliwattstunden. Mit ihr lassen sich Zellen verschiedener Spannung vergleichen.

**Gilt:** Spannung über die Entladung annähernd konstant, wie bei Silberoxid- und Lithiumzellen.

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Energie (in der Batterie gespeichert) | $\mathrm{J}$ |
| $U_\mathrm{N}$ | Nennspannung der Batterie | $\mathrm{V}$ |
| $C_\mathrm{N}$ | Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung) | $\mathrm{mAh}$ |

BEISPIEL Welche Energie enthält eine Silberoxidzelle mit 1,55 V und 28 mAh?

Gegeben: $U_\mathrm{N} = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$

$$\begin{aligned} W &\approx U_\mathrm{N} \cdot C_\mathrm{N} \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 28\,\mathrm{mAh} \\ &= 43{,}4\,\mathrm{mWh} \end{aligned}$$

43,4 mWh, das sind rund 156 J. Eine voll aufgezogene Zugfeder einer Armbanduhr speichert weniger als 1 J (Kapitel 1).

## Laufzeit mit Selbstentladung

(7.3) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$t \approx \frac{C_\mathrm{N}}{I + s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}}$$

Jede Zelle verliert auch ohne Verbraucher langsam Ladung. Die Selbstentladung wirkt wie ein kleiner zusätzlicher Strom $s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}$ neben der Stromaufnahme des Werks.

**Gilt:** Selbstentladung als gleichbleibender Verlust gerechnet. Richtwert für Silberoxidzellen bei Raumtemperatur: wenige Prozent je Jahr, in der Wärme deutlich mehr.

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | Zeit (Laufzeit der Batterie) | $\mathrm{h}$ |
| $C_\mathrm{N}$ | Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung) | $\mathrm{mAh}$ |
| $I$ | Stromstärke (mittlere Stromaufnahme des Werks) | $\mathrm{mA}$ |
| $s_\mathrm{E}$ | Selbstentladung (Anteil der Nennkapazität, der je Zeit verloren geht) | $\frac{\%}{\mathrm{a}}$ |

BEISPIEL Wie lange läuft die Uhr aus dem Beispiel zur Laufzeit (28 mAh, 1,2 µA), wenn die Zelle zusätzlich 4 % ihrer Kapazität je Jahr durch Selbstentladung verliert?

Gegeben: $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$; $I = 1{,}2\,\mu\mathrm{A}$; $s_\mathrm{E} = 4\,\frac{\%}{\mathrm{a}}$

$$\begin{aligned} t &\approx \frac{C_\mathrm{N}}{I + s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}} \\ &= \frac{28\,\mathrm{mAh}}{1{,}2\,\mu\mathrm{A} + 4\,\frac{\%}{\mathrm{a}} \cdot 28\,\mathrm{mAh}} \\ &\approx 2{,}41\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Rund 2,4 Jahre statt 2,7 Jahre. Je kleiner die Stromaufnahme des Werks, desto stärker zählt die Selbstentladung.

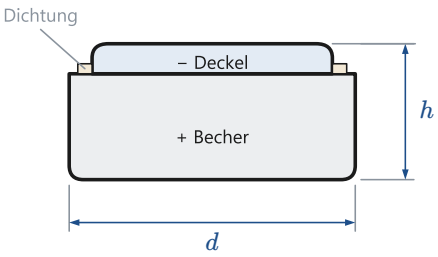



**Abb. 7.1** Knopfzelle: Der Becher ist der Pluspol, der Deckel der Minuspol; Durchmesser $d$ und Höhe $h$ stecken in der Bezeichnung

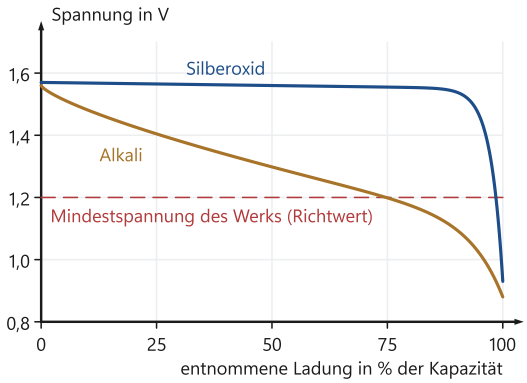



**Abb. 7.2** Entladekurven im Prinzip: Die Silberoxidzelle hält ihre Spannung bis kurz vor dem Ende, die Alkalizelle fällt stetig ab

## Batteriesysteme für Uhren

| System | Kennbuchstaben | Nennspannung | Verhalten beim Entladen | Verwendung |
|---|---|---|---|---|
| Silberoxid | SR | 1,55 V | Spannung bleibt bis kurz vor dem Ende fast gleich | Standard für Quarz-Armbanduhren |
| Alkali-Mangan | LR | 1,5 V | Spannung fällt von Anfang an stetig | preiswerter Ersatz, Großuhren, Wecker |
| Lithium-Mangandioxid | CR | 3 V | Spannung bleibt lange fast gleich | Uhren mit hohem Strombedarf, lange Laufzeit |

Eine Alkalizelle gleicher Größe passt mechanisch, hat aber weniger Kapazität und eine fallende Spannung. In die Armbanduhr gehört die Silberoxidzelle.

## Bezeichnung von Knopfzellen nach IEC

| Teil der Bezeichnung | Bedeutung | Beispiel SR626SW |
|---|---|---|
| erster Buchstabe | elektrochemisches System: S Silberoxid, L Alkali-Mangan, C Lithium-Mangandioxid | S: Silberoxid |
| zweiter Buchstabe | Bauform: R rund | R: runde Zelle |
| erste Ziffer oder die ersten beiden Ziffern | Durchmesser in mm, abgerundet auf ganze Millimeter | 6: Durchmesser 6,8 mm |
| letzte beiden Ziffern | Höhe in Zehntelmillimetern | 26: Höhe 2,6 mm |
| Zusatz der Hersteller | SW: für kleine Dauerströme (Analoguhren); W: für hohe Stromspitzen (Licht, Alarm) | SW: für kleine Ströme |

Eine CR2032 ist demnach eine runde Lithiumzelle mit 20 mm Durchmesser und 3,2 mm Höhe. Ältere Bezeichnungen wie SR44 sind fortlaufende Nummern ohne Maßangabe.

### Gängige Silberoxid-Knopfzellen (1,55 V)

| Bezeichnung | Handelsnummer | Durchmesser in mm | Höhe in mm | Kapazität in mAh (typisch) |
|---|---|---|---|---|
| SR521SW | 379 | 5,8 | 2,15 | 14 bis 16 |
| SR616SW | 321 | 6,8 | 1,65 | 14 bis 16 |
| SR621SW | 364 | 6,8 | 2,15 | 19 bis 23 |
| SR626SW | 377 | 6,8 | 2,6 | 24 bis 28 |
| SR721SW | 362 | 7,9 | 2,1 | 21 bis 25 |
| SR920SW | 371 | 9,5 | 2,05 | 35 bis 40 |
| SR927SW | 395 | 9,5 | 2,7 | 50 bis 55 |
| SR1130SW | 390 | 11,6 | 3,05 | 60 bis 85 |
| SR44W | 357 | 11,6 | 5,4 | 150 bis 180 |

Die Kapazität hängt vom Hersteller ab; maßgeblich ist das Datenblatt der Zelle.

## 7.2 Quarz und Frequenzteiler

Der Gangregler der Quarzuhr ist ein winziger Quarzkristall in Form einer Stimmgabel. Er schwingt mit 32 768 Hz, das sind $2^{15}$ Schwingungen je Sekunde. Ein Teiler halbiert diese Frequenz 15-mal und erhält so genau einen Impuls je Sekunde.

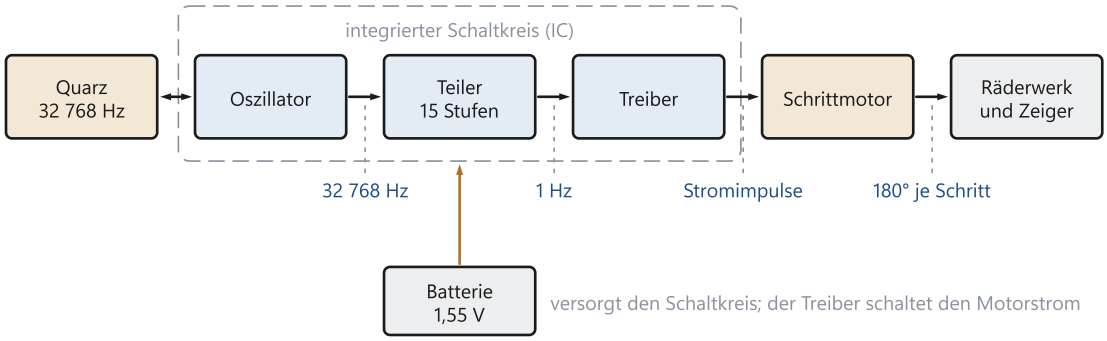



**Abb. 7.3** Blockschaltbild der analogen Quarzuhr

### Frequenzteiler

(7.4) GESELLE

$$f_{\text{aus}} = \frac{f}{2^n}$$

Jede Stufe ist eine Kippschaltung, die bei jedem zweiten Eingangsimpuls einen Ausgangsimpuls abgibt. Darum wählt man als Quarzfrequenz eine Zweierpotenz.

| | | |
|---|---|---|
| $f_{\text{aus}}$ | Frequenz am Ausgang des Teilers | $\mathrm{Hz}$ |
| $f$ | Frequenz (des Quarzes) | $\mathrm{Hz}$ |
| $n$ | Anzahl (der Teilerstufen; jede halbiert die Frequenz) | 1 |

BEISPIEL Welche Frequenz liefert ein Teiler mit 15 Stufen aus der Quarzfrequenz 32 768 Hz?

Gegeben: $f = 32\,768\,\mathrm{Hz}$; $n = 15$

$$\begin{aligned} f_{\text{aus}} &= \frac{f}{2^n} \\ &= \frac{32\,768\,\mathrm{Hz}}{2^{15}} \\ &= 1\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Genau 1 Hz: ein Impuls je Sekunde für den Schrittmotor.

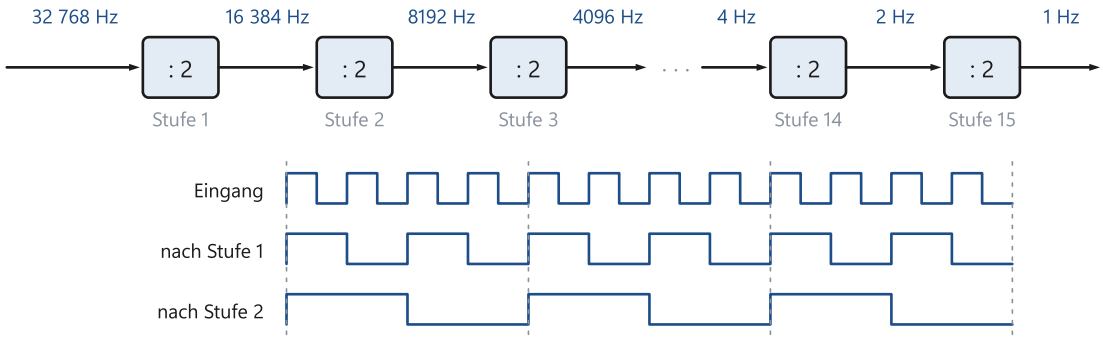



**Abb. 7.4** Teilerkette: Jede Stufe halbiert die Frequenz; nach 15 Stufen bleibt 1 Hz

## Gang der Quarzuhr aus der Frequenzabweichung

(7.5) GESELLE

$$G = \frac{\Delta f}{f} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\Delta f$ | Frequenzabweichung (+ heißt: Quarz schwingt zu schnell) | $\mathrm{Hz}$ |
| $f$ | Frequenz (Sollfrequenz des Quarzes) | $\mathrm{Hz}$ |

Schwingt der Quarz zu schnell, geht die Uhr im selben Verhältnis vor. Relative Abweichungen gibt man in Millionsteln an (ppm, Kapitel XL 1). Für die Unruh steht dieselbe Formel in Abschnitt 3.4.

**Gilt:** die Uhr zählt jede Quarzschwingung (keine Inhibition).

**Gut zu wissen:** 1 ppm entspricht 0,0864 $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$, rund 2,6 s im Monat und rund 31,5 s im Jahr.

BEISPIEL Ein Quarz schwingt mit 32 768,2 Hz statt 32 768 Hz, also 0,2 Hz zu schnell. Welchen Gang hat die Uhr?

Gegeben: $\Delta f = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$; $f = 32\,768\,\mathrm{Hz}$

$$G = \frac{\Delta f}{f} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$
$$= \frac{0{,}2\,\mathrm{Hz}}{32\,768\,\mathrm{Hz}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$
$$\approx 0{,}53\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Uhr geht 0,53 s am Tag vor, das sind rund 16 s im Monat. Die Abweichung beträgt 6,1 ppm.

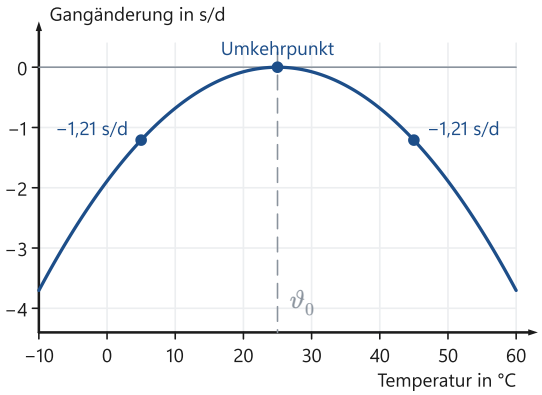



**Abb. 7.5** Temperaturgang des Stimmgabelquarzes, gerechnet mit $\beta = 0{,}035\ \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K}^2}$ und Umkehrpunkt 25 °C

## Temperaturgang des Stimmgabelquarzes

(7.6) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\beta \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Frequenz des Stimmgabelquarzes ist am Umkehrpunkt am höchsten und fällt nach beiden Seiten mit dem Quadrat des Temperaturabstands. Die Uhr wird also in der Kälte wie in der Hitze langsamer als am Umkehrpunkt, nie schneller.

**Gilt:** Stimmgabelquarze mit 32 768 Hz; Koeffizient und Umkehrpunkt streuen von Quarz zu Quarz, maßgeblich ist das Datenblatt.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (gegenüber dem Gang am Umkehrpunkt; − heißt: Uhr wird langsamer) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $\beta$ | Temperaturkoeffizient des Quarzes (Richtwert 0,03 bis 0,04 ppm je Kelvin zum Quadrat) | $\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$ |
| $\vartheta$ | Temperatur (des Quarzes) | $^\circ\mathrm{C}$ |
| $\vartheta_0$ | Temperatur des Umkehrpunkts (rund 25 °C) | $^\circ\mathrm{C}$ |

**Gut zu wissen:** Dazu kommt die Alterung: Im ersten Jahr ändert sich die Frequenz eines Quarzes um wenige ppm, danach immer langsamer. Thermokompensierte Werke messen die Temperatur und gleichen die Parabel rechnerisch aus.

BEISPIEL Eine Quarzuhr liegt im Winter bei 5 °C im Auto. Um wie viel ändert sich ihr Gang gegenüber 25 °C, wenn der Koeffizient 0,035 ppm je Kelvin zum Quadrat beträgt?

Gegeben: $\beta = 0{,}035\ \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$; $\vartheta = 5^\circ\mathrm{C}$; $\vartheta_0 = 25^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\beta \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -0{,}035\ \tfrac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}} \cdot (5^\circ\mathrm{C} - 25^\circ\mathrm{C})^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -1{,}21\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 1,2 s am Tag langsamer. Am Arm bleibt der Quarz nahe am Umkehrpunkt; eine getragene Uhr geht deshalb gleichmäßiger als eine abgelegte.

## Inhibition: Gangkorrektur durch ausgeblendete Impulse

(7.7) MEISTER

$$\Delta G = -\frac{N}{f \cdot t_\mathrm{I}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Werke ohne Trimmer gleichen den Gang digital ab. Der Quarz ist absichtlich etwas zu schnell; der Schaltkreis lässt in jeder Inhibitionsperiode eine gespeicherte Zahl von Impulsen aus und bremst die Uhr damit auf den Sollgang.

**Gilt:** Inhibitionsperiode je nach Schaltkreis meist 60 s, bei manchen Werken 10 s, bei thermokompensierten Werken auch mehrere Minuten (ETA 252.511: 8 min); Herstellerangabe beachten.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta G$ | Gangänderung (durch die Inhibition; − heißt: Uhr wird langsamer) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $N$ | Anzahl (der je Inhibitionsperiode ausgeblendeten Impulse) | 1 |
| $f$ | Frequenz (der Impulse an der Stelle des Teilers, an der ausgeblendet wird) | $\mathrm{Hz}$ |
| $t_\mathrm{I}$ | Inhibitionsperiode | $\mathrm{s}$ |

**Aber Vorsicht:** Zwischen den Korrekturen läuft die Uhr mit der unkorrigierten Quarzfrequenz. Der Gang muss deshalb über eine ganze Inhibitionsperiode oder ein Vielfaches davon gemessen werden, am Motorimpuls und nicht an der Quarzfrequenz. Sonst zeigt das Prüfgerät ein scheinbares Vorgehen.

BEISPIEL Ein Schaltkreis blendet alle 60 s einen Impuls der Quarzfrequenz 32 768 Hz aus. Wie groß ist dieser kleinste Korrekturschritt?

Gegeben: $N = 1$; $f = 32\,768\,\mathrm{Hz}$; $t_\mathrm{I} = 60\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\frac{N}{f \cdot t_\mathrm{I}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{1}{32\,768\,\mathrm{Hz} \cdot 60\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -0{,}044\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Jeder ausgeblendete Impuls macht die Uhr um 0,044 s am Tag langsamer, das sind 0,51 ppm. Ein Quarz, der 5 ppm zu schnell schwingt, braucht also rund 10 ausgeblendete Impulse je Minute.

**Merksatz:** Der Uhrenquarz schwingt mit 32 768 Hz. 15 Teilerstufen machen daraus den Sekundentakt. 1 ppm sind rund 2,6 s im Monat.

## 7.3 Schrittmotor

Der Schrittmotor nach Lavet besteht aus Spule, Stator und einem Rotor mit zweipoligem Dauermagnet. Jeder Stromimpuls dreht den Rotor um eine halbe Umdrehung weiter. Der nächste Impuls muss umgekehrt gepolt sein, sonst bleibt der Rotor stehen. Zwischen den Impulsen halten ihn die Rastkerben des Stators ohne Strom in seiner Lage.

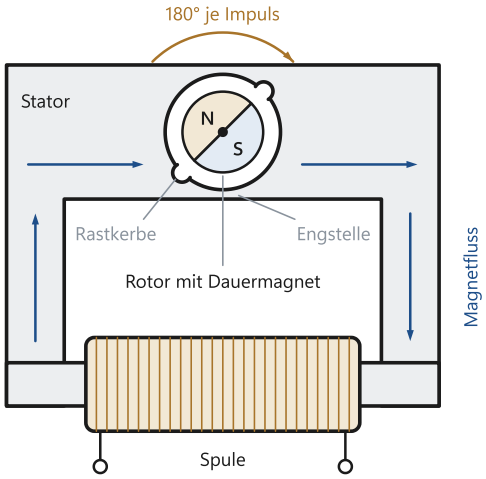



**Abb. 7.6** Lavet-Schrittmotor im Prinzip: Die Engstellen des Stators sind magnetisch gesättigt, der Fluss der Spule geht deshalb durch den Rotor und dreht ihn um 180° in die nächste Rastlage

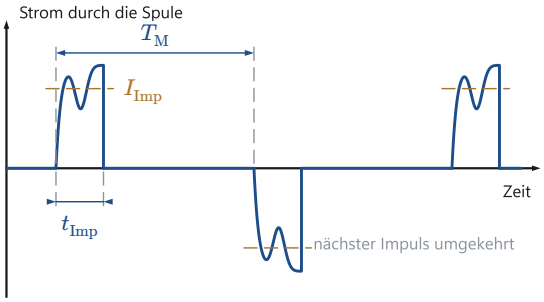



**Abb. 7.7** Motorstrom: kurze Impulse der Dauer $t_{Imp}$ im Abstand $T_M$ mit wechselnder Richtung (Impulsbreite stark übertrieben)

### Drehzahl des Rotors

(7.8) GESELLE

$$n_R = \frac{f_M \cdot \varphi_S}{360°}$$

Bei einem Impuls je Sekunde und einer halben Umdrehung je Schritt dreht sich der Rotor in zwei Sekunden einmal.

| | | |
|---|---|---|
| $n_R$ | Drehzahl (des Rotors) | $\frac{1}{min}$ |
| $f_M$ | Frequenz der Motorimpulse (Schritte je Zeit) | Hz |
| $\varphi_S$ | Schrittwinkel des Rotors (beim Lavet-Motor 180°) | ° |

BEISPIEL Wie schnell dreht sich der Rotor eines Werks mit Sekundenzeiger, das jede Sekunde einen Schritt von 180° macht?

Gegeben: $f_M = 1\,\text{Hz}$; $\varphi_S = 180°$

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{f_M \cdot \varphi_S}{360°} \\ &= \frac{1\,\text{Hz} \cdot 180°}{360°} \\ &= 0{,}5\,\frac{1}{s} \cdot 60\,\frac{s}{min} \\ &= 30\,\frac{1}{min} \end{aligned}$$

30 Umdrehungen je Minute.

## Untersetzung vom Rotor zum Sekundenrad

(7.9) GESELLE

$$i_{\mathrm{U}} = \frac{n_{\mathrm{R}}}{n_{\mathrm{S}}}$$

Im Quarzwerk treibt der kleine Rotortrieb die Räder, das Räderwerk übersetzt ins Langsame. Die Übersetzung $i$ nach Kapitel 2 ist dann kleiner als 1. Anschaulicher ist ihr Kehrwert, die Untersetzung: Sie sagt, wie oft sich der Rotor für eine Umdrehung des Sekundenrads dreht. Sie ist das Produkt der Verhältnisse aus Zähnezahl des Rades und Zähnezahl des treibenden Triebes je Stufe.

| | | |
|---|---|---|
| $i_{\mathrm{U}}$ | Untersetzung (Drehzahl des treibenden Rotors durch Drehzahl des Sekundenrads; Kehrwert der Übersetzung $i$ aus Kapitel 2) | 1 |
| $n_{\mathrm{R}}$ | Drehzahl (des Rotors) | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |
| $n_{\mathrm{S}}$ | Drehzahl des Sekundenrads (eine Umdrehung je Minute) | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |

BEISPIEL Der Rotor macht 30 Umdrehungen je Minute, das Sekundenrad eine. Welche Untersetzung braucht das Räderwerk dazwischen?

Gegeben: $n_{\mathrm{R}} = 30\,\frac{1}{\mathrm{min}}$; $n_{\mathrm{S}} = 1\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{U}} &= \frac{n_{\mathrm{R}}}{n_{\mathrm{S}}} \\ &= \frac{30\,\frac{1}{\mathrm{min}}}{1\,\frac{1}{\mathrm{min}}} \\ &= 30 \end{aligned}$$

30, zum Beispiel in zwei Stufen mit 6 und 5: Der Sekundenzeiger rückt je Schritt um 6° weiter, eine Sekundenteilung.

## Mittlere Stromaufnahme des Werks

(7.10) MEISTER

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}}{T_{\mathrm{M}}} + I_{\mathrm{IC}}$$

Der Motor zieht nur während des kurzen Impulses Strom. Über die ganze Sekunde gemittelt bleibt davon der Bruchteil Impulsdauer durch Periodendauer; dazu kommt der kleine Dauerstrom des Schaltkreises.

**Gilt:** gleichmäßige Folge gleicher Impulse. Ein träges Messgerät oder eine Messung über mehrere Sekunden zeigt diesen Mittelwert.

| | | |
|---|---|---|
| $I_{\mathrm{m}}$ | mittlere Stromaufnahme des Werks | $\mu\mathrm{A}$ |
| $I_{\mathrm{Imp}}$ | Strom durch die Spule während des Impulses (Mittelwert über die Impulsdauer) | $\mathrm{mA}$ |
| $t_{\mathrm{Imp}}$ | Impulsdauer | $\mathrm{ms}$ |
| $T_{\mathrm{M}}$ | Periodendauer der Motorimpulse (bei Sekundenschritt 1 s) | $\mathrm{s}$ |
| $I_{\mathrm{IC}}$ | Stromaufnahme des Schaltkreises mit Oszillator | $\mu\mathrm{A}$ |

**Gut zu wissen:** Bei Werken mit Stoppschalter steht der Motor bei gezogener Krone, und es fließt nur der Strom des Schaltkreises. So lassen sich beide Anteile getrennt messen. Läuft das Räderwerk schwer, verlängern viele Schaltkreise den Impuls, und die Stromaufnahme steigt.

BEISPIEL Während des Impulses von 3,9 ms fließen im Mittel 0,24 mA. Der Schaltkreis braucht 0,15 µA. Wie groß ist die mittlere Stromaufnahme bei einem Schritt je Sekunde?

Gegeben: $I_{\mathrm{Imp}} = 0{,}24\,\mathrm{mA}$; $t_{\mathrm{Imp}} = 3{,}9\,\mathrm{ms}$; $T_{\mathrm{M}} = 1\,\mathrm{s}$; $I_{\mathrm{IC}} = 0{,}15\,\mu\mathrm{A}$

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{m}} &= \frac{I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}}{T_{\mathrm{M}}} + I_{\mathrm{IC}} \\ &= \frac{0{,}24\,\mathrm{mA} \cdot 3{,}9\,\mathrm{ms}}{1\,\mathrm{s}} + 0{,}15\,\mu\mathrm{A} \\ &= 1{,}09\,\mu\mathrm{A} \end{aligned}$$

Rund 1,1 µA, ein üblicher Wert für ein Dreizeigerwerk. Der Motor braucht davon gut 85 %.

### Energie eines Motorimpulses

(7.11) MEISTER

$$W = U \cdot I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}$$

So viel Energie entnimmt ein Schritt der Batterie. Nur ein Teil davon bewegt den Rotor und das Räderwerk, der Rest wird in der Spule zu Wärme.

**Gilt:** Spannung während des Impulses annähernd konstant.

| | | |
|---|---|---|
| $W$ | Arbeit (elektrische Arbeit je Impuls) | $\mathrm{J}$ |
| $U$ | Spannung (der Batterie unter Last) | $\mathrm{V}$ |
| $I_{\mathrm{Imp}}$ | Strom durch die Spule während des Impulses (Mittelwert über die Impulsdauer) | $\mathrm{mA}$ |
| $t_{\mathrm{Imp}}$ | Impulsdauer | $\mathrm{ms}$ |

BEISPIEL Welche Energie kostet ein Impuls von 3,9 ms Dauer mit im Mittel 0,24 mA an 1,55 V?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $I_{\mathrm{Imp}} = 0{,}24\,\mathrm{mA}$; $t_{\mathrm{Imp}} = 3{,}9\,\mathrm{ms}$

$$\begin{aligned} W &= U \cdot I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}} \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 0{,}24\,\mathrm{mA} \cdot 3{,}9\,\mathrm{ms} \\ &\approx 1{,}45\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 1,5 µJ je Schritt. An einem Tag mit 86 400 Schritten sind das 0,13 J.

## 7.4 Messen an der Quarzuhr

Mit wenigen Messungen lässt sich fast jeder Fehler einer Quarzuhr eingrenzen: Batterie, Stromaufnahme, untere Arbeitsspannung, Spule und Gang. Die Werte der Tabelle sind Richtwerte für Dreizeigerwerke. Verbindlich sind die Angaben in der technischen Unterlage des Kalibers.

### Prüfgrößen der analogen Quarzuhr (Richtwerte)

| Prüfgröße | Richtwert | Bedeutung |
|---|---|---|
| Batteriespannung ohne Last (Silberoxid) | 1,55 V bis 1,6 V | zeigt nur das System; sagt wenig über den Zustand der Zelle |
| Batteriespannung unter leichter Last (in der Uhr gemessen) | mindestens 1,5 V | darunter die Zelle ersetzen; an einem kräftigen Lastwiderstand des Prüfgeräts (einige hundert Ohm) darf die Spannung tiefer sinken, dort gilt die Skala des Geräts |
| Stromaufnahme des Werks | je nach Kaliber höchstens 0,7 µA bis 1,3 µA | ohne Batterie an 1,55 V gemessen; zu hoch: Räderwerk schwergängig, Verschmutzung, Feuchtigkeit oder Kurzschluss; Chronographen und Werke mit Zusatzfunktionen brauchen mehr, rund 3 µA bis 6,5 µA |
| Stromaufnahme bei gezogener Krone (Werke mit Stoppschalter) | höchstens 0,4 µA bis 0,5 µA | nur der Schaltkreis; zu hoch: Schaltkreis oder Leiterplatte fehlerhaft |
| untere Arbeitsspannung | höchstens 1,3 V | Speisespannung von 1,55 V absenken, bis das Werk stehen bleibt; bis 1,3 V muss es noch sicher jeden Schritt ausführen. Bleibt es früher stehen, läuft das Räderwerk zu schwer oder Motor oder Schaltkreis sind fehlerhaft |
| Spulenwiderstand | je nach Kaliber rund 0,8 kΩ bis 2,7 kΩ | kein Durchgang: Draht unterbrochen; deutlich zu klein: Windungsschluss. Mit kleiner Prüfspannung messen, höchstens 0,4 V, besser 0,2 V |
| Isolationswiderstand (Spule gegen Werkplatte) | kein Durchgang (Anzeige unendlich) | zeigt das Messgerät einen Widerstand: Feuchtigkeit, beschädigte Isolation |
| Gang | je nach Hersteller rund −10 s bis +20 s im Monat, das sind $-0{,}3\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ bis $+0{,}7\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | am Motorimpuls über die Inhibitionsperiode messen, meist 60 s (Abschnitt 7.2) |

Richtwerte aus Herstellerangaben, gemessen bei 20 °C bis 25 °C. Beispiele für die höchste zulässige Stromaufnahme: ETA 902.002 0,7 µA, Ronda 1005 0,95 µA, ETA F06.111 1,1 µA, ETA 255.411 1,2 µA, ETA 805.112 1,3 µA; Chronograph ETA G10.211 3,5 µA, mit laufender Stoppfunktion 6,5 µA. Beispiele für den Spulenwiderstand: ETA 805.112 0,8 kΩ bis 1,1 kΩ, ETA 255.411 1,3 kΩ bis 1,75 kΩ, Ronda 1005 2,5 kΩ bis 2,7 kΩ. Verbindlich sind Sollwerte und Prüfbedingungen in der technischen Unterlage des Kalibers.

**Merksatz:** Erst die Batterie unter Last, dann die Stromaufnahme, dann die untere Arbeitsspannung. Stimmen alle drei, liegt der Fehler selten an der Elektronik.

# 8 Zeit und Kalender

Unsere Uhren zeigen mittlere Sonnenzeit: einen gedachten, völlig gleichmäßigen Sonnentag von 86 400 s. Die wahre Sonne, die Sterne und der Mond halten sich nicht an dieses Maß. Für eine Sternzeituhr, einen ewigen Kalender, eine Äquationsanzeige oder eine Mondphase brauchen wir die Zahlen und Formeln dieses Kapitels.

Am Ende stehen die Skalen der Chronographen: Tachymeter, Telemeter und Pulsometer. In diesem Kapitel ist $E$ die Zeitgleichung, $\lambda$ die geographische Länge, $s$ ein Weg und $c$ die Schallgeschwindigkeit. Die Zähnezahlen für Kalender- und Mondwerke stehen in Kapitel 2.

## 8.1 Tag und Jahr

Ein Tag ist eine Erddrehung, aber gemessen woran? Gegenüber der Sonne dauert sie im Mittel 24 h, gegenüber den Sternen rund 4 min weniger. Der Grund: Die Erde zieht an einem Tag auf ihrer Bahn knapp 1° weiter und muss dieses Stück zusätzlich drehen, bis die Sonne wieder im Süden steht.

**Zeitmaße aus der Astronomie (Mittelwerte für die heutige Zeit)**

| Zeitmaß | Dauer | ausgeschrieben | Bezug |
|---|---|---|---|
| mittlerer Sonnentag | $86\,400\,\mathrm{s}$ | 24 h | Sonne im Süden bis Sonne im Süden, übers Jahr gemittelt |
| Sterntag | $86\,164{,}09\,\mathrm{s}$ | 23 h 56 min 4,09 s | eine Erddrehung gegenüber den Sternen |
| tropisches Jahr | $365{,}242\,19\,\mathrm{d}$ | 365 d 5 h 48 min 45 s | Frühlingsanfang bis Frühlingsanfang; Jahr der Jahreszeiten |
| siderisches Jahr | $365{,}256\,36\,\mathrm{d}$ | 365 d 6 h 9 min 10 s | ein Umlauf der Erde gegenüber den Sternen |
| synodischer Monat | $29{,}530\,59\,\mathrm{d}$ | 29 d 12 h 44 min 3 s | Neumond bis Neumond; Monat der Mondphasen |
| siderischer Monat | $27{,}321\,66\,\mathrm{d}$ | 27 d 7 h 43 min 11 s | ein Umlauf des Mondes gegenüber den Sternen |

Tage sind hier immer mittlere Sonnentage. Der Kalender richtet sich nach dem tropischen Jahr, die Mondphase nach dem synodischen Monat. Ein einzelner synodischer Monat weicht um bis zu etwa 7 h vom Mittel ab.

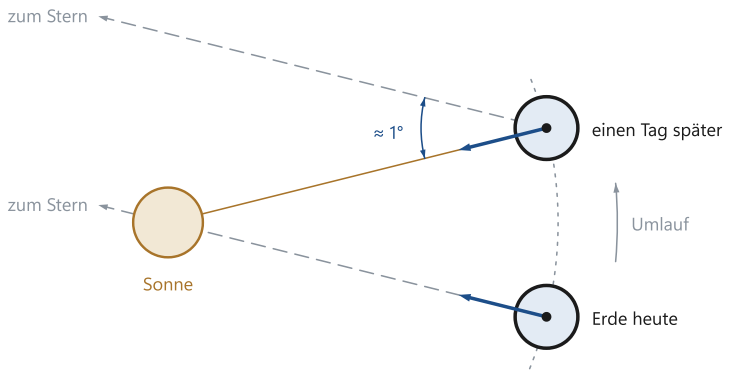



**Abb. 8.1** Sterntag und Sonnentag: Nach einer vollen Drehung gegenüber den Sternen (gestrichelte Richtung) muss die Erde noch knapp 1° weiterdrehen, bis die Sonne wieder im Süden steht (Winkel stark übertrieben)

## Sterntag aus Sonnentag und Jahr

(8.1) MEISTER

$$T_{\mathrm{St}} = \frac{T_{\mathrm{So}} \cdot T_{\mathrm{J}}}{T_{\mathrm{J}} + T_{\mathrm{So}}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $T_{\mathrm{St}}$ | Sterntag | $\mathrm{s}$ |
| $T_{\mathrm{So}}$ | mittlerer Sonnentag | $\mathrm{s}$ |
| $T_{\mathrm{J}}$ | tropisches Jahr | $\mathrm{d}$ |

In einem Jahr dreht sich die Erde gegenüber den Sternen genau einmal öfter als gegenüber der Sonne: 366,2422 Sterntage kommen auf 365,2422 Sonnentage. Daraus folgt die Länge des Sterntags.

**Gilt:** Mittelwerte für die heutige Zeit.

BEISPIEL Wie lang ist der Sterntag, wenn das tropische Jahr 365,2422 mittlere Sonnentage hat?

Gegeben: $T_{\mathrm{So}} = 1\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{J}} = 365{,}2422\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{St}} &= \frac{T_{\mathrm{So}} \cdot T_{\mathrm{J}}}{T_{\mathrm{J}} + T_{\mathrm{So}}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 365{,}2422\,\mathrm{d}}{365{,}2422\,\mathrm{d} + 1\,\mathrm{d}} \\ &= 0{,}997\,269\,6\,\mathrm{d} \\ &\approx 86\,164{,}1\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Der Sterntag dauert 23 h 56 min 4,1 s. Er ist 3 min 55,9 s kürzer als der mittlere Sonnentag.

## Gang einer Sternzeituhr gegen mittlere Zeit

(8.2) MEISTER

$$G = \frac{T_{\mathrm{So}} - T_{\mathrm{St}}}{T_{\mathrm{St}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Gang (+ heißt: Uhr geht vor) | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ |
| $T_{\mathrm{So}}$ | mittlerer Sonnentag | $\mathrm{s}$ |
| $T_{\mathrm{St}}$ | Sterntag | $\mathrm{s}$ |

Eine Sternzeituhr zählt Sterntage, ihr Tag ist also kürzer. An einer Uhr für mittlere Zeit gemessen geht sie jeden Tag knapp 4 min vor.

**Gut zu wissen:** Für die Pendeluhr heißt das: Das Sekundenpendel für Sternzeit ist rund 5,4 mm kürzer als das Sekundenpendel für mittlere Zeit (Kapitel 4).

BEISPIEL Eine Sternzeituhr wird an einer Funkuhr reguliert, die mittlere Zeit zeigt. Welchen Gang muss sie gegenüber der Funkuhr haben?

Gegeben: $T_{\mathrm{So}} = 86\,400\,\mathrm{s}$; $T_{\mathrm{St}} = 86\,164{,}09\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{T_{\mathrm{So}} - T_{\mathrm{St}}}{T_{\mathrm{St}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{86\,400\,\mathrm{s} - 86\,164{,}09\,\mathrm{s}}{86\,164{,}09\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 236{,}6\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Sternzeituhr muss am Tag 236,6 s vorgehen, das sind 3 min 56,6 s. In einem Jahr gewinnt sie genau einen Tag.

### Synodischer Monat aus dem Mondumlauf

(8.3) VERTIEFUNG

$$T_{\text{syn}} = \frac{T_{\text{sid}} \cdot T_{\text{E}}}{T_{\text{E}} - T_{\text{sid}}}$$

Während eines Mondumlaufs zieht die Erde auf ihrer Bahn weiter. Der Mond braucht deshalb gut zwei Tage länger, bis er wieder zwischen Erde und Sonne steht. Nach derselben Formel holt ein schneller Zeiger einen langsamen ein.

**Gilt:** Mittelwerte; beide Umläufe im selben Drehsinn.

| | | |
|---|---|---|
| $T_{\text{syn}}$ | synodischer Monat (Neumond bis Neumond) | $\mathrm{d}$ |
| $T_{\text{sid}}$ | siderischer Monat (ein Mondumlauf gegenüber den Sternen) | $\mathrm{d}$ |
| $T_{\text{E}}$ | siderisches Jahr (ein Erdumlauf gegenüber den Sternen) | $\mathrm{d}$ |

BEISPIEL Der Mond läuft in 27,321 66 Tagen einmal um die Erde, die Erde in 365,256 36 Tagen einmal um die Sonne. Wie lange dauert es von Neumond zu Neumond?

Gegeben: $T_{\text{sid}} = 27{,}321\,66\,\mathrm{d}$; $T_{\text{E}} = 365{,}256\,36\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} T_{\text{syn}} &= \frac{T_{\text{sid}} \cdot T_{\text{E}}}{T_{\text{E}} - T_{\text{sid}}} \\ &= \frac{27{,}321\,66\,\mathrm{d} \cdot 365{,}256\,36\,\mathrm{d}}{365{,}256\,36\,\mathrm{d} - 27{,}321\,66\,\mathrm{d}} \\ &\approx 29{,}5306\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Rund 29,53 Tage. Diese Zahl muss ein Mondphasenwerk mit seinen Zähnezahlen nachbilden (Kapitel 2).

## 8.2 Kalender

Das Kalenderjahr hat ganze Tage, das tropische Jahr nicht. Schalttage gleichen den Unterschied aus. Wie gut eine Schaltregel ist, zeigt die mittlere Länge ihres Kalenderjahrs.

### Schaltjahrregel

| Kalender | Schaltjahr (366 Tage, mit 29. Februar) | mittlere Jahreslänge |
|---|---|---|
| julianisch | jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist | $365{,}25\,\mathrm{d}$ |
| gregorianisch (seit 1582) | durch 4 teilbar; volle Jahrhunderte nur, wenn sie durch 400 teilbar sind | $365{,}2425\,\mathrm{d}$ |

Nach der gregorianischen Regel waren 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre, 2000 war eines, 2100 ist wieder keines.

### Mittlere Länge des Kalenderjahrs

(8.4) GESELLE

$$T_{\text{K}} = 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot n_{\text{S}}}{n_{\text{Z}}}$$

Jedes Schaltjahr bringt einen Tag mehr. Verteilt auf den ganzen Zyklus ergibt das die mittlere Jahreslänge.

| | | |
|---|---|---|
| $T_{\text{K}}$ | mittlere Länge des Kalenderjahrs | $\mathrm{d}$ |
| $n_{\text{S}}$ | Zahl der Schaltjahre im Zyklus | 1 |
| $n_{\text{Z}}$ | Zahl der Jahre im Zyklus | 1 |

BEISPIEL Der gregorianische Kalender hat in 400 Jahren 97 Schaltjahre. Wie lang ist sein Jahr im Mittel?

Gegeben: $n_{\text{S}} = 97$; $n_{\text{Z}} = 400$

$$\begin{aligned} T_{\text{K}} &= 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot n_{\text{S}}}{n_{\text{Z}}} \\ &= 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 97}{400} \\ &= 365{,}2425\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

365,2425 Tage. Die julianische Regel mit einem Schaltjahr in vier Jahren ergibt 365,25 Tage.

## Jahre bis zu einem Tag Abweichung

(8.5) MEISTER

$$n_{\mathrm{F}} = \frac{1\,\mathrm{d}}{T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{J}}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $n_{\mathrm{F}}$ | Zahl der Jahre, bis der Kalender einen Tag vom Sonnenjahr abweicht | 1 |
| $T_{\mathrm{K}}$ | mittlere Länge des Kalenderjahrs | d |
| $T_{\mathrm{J}}$ | tropisches Jahr | d |

Ist das Kalenderjahr länger als das tropische Jahr, bleibt der Kalender hinter den Jahreszeiten zurück: Der Frühlingsanfang fällt auf ein immer früheres Datum.

**Gilt:** heutige Länge des tropischen Jahrs; sie ändert sich in Jahrtausenden um einige Sekunden.

BEISPIEL Nach wie vielen Jahren weicht der julianische Kalender um einen Tag vom Lauf der Jahreszeiten ab?

Gegeben: $T_{\mathrm{K}} = 365{,}25\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{J}} = 365{,}242\,19\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{F}} &= \frac{1\,\mathrm{d}}{T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{J}}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d}}{365{,}25\,\mathrm{d} - 365{,}242\,19\,\mathrm{d}} \\ &\approx 128 \end{aligned}$$

Nach 128 Jahren. Seit dem Konzil von Nicäa im Jahr 325 hatten sich bis 1582 zehn Tage angesammelt, die bei der Kalenderreform gestrichen wurden. Der gregorianische Kalender mit 365,2425 Tagen braucht für einen Tag rund 3200 Jahre.




**Abb. 8.2** Vierjahreszyklus des ewigen Kalenders: $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ Tage

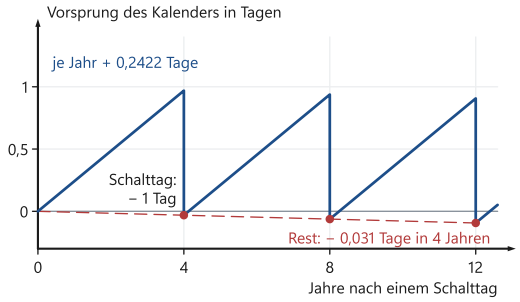



**Abb. 8.3** Das Kalenderjahr ist ohne Schalttag 0,2422 Tage zu kurz; der Schalttag nimmt alle vier Jahre einen ganzen Tag zurück

### Tage im Schaltzyklus

(8.6) GESELLE

$$N_\mathrm{d} = 365 \cdot n_\mathrm{Z} + n_\mathrm{S}$$

Der ewige Kalender kennt die Monatslängen und das Schaltjahr. Sein Programmrad läuft in vier Jahren einmal um.

| | | |
|---|---|---|
| $N_\mathrm{d}$ | Zahl der Tage im Zyklus | 1 |
| $n_\mathrm{Z}$ | Zahl der Jahre im Zyklus | 1 |
| $n_\mathrm{S}$ | Zahl der Schaltjahre im Zyklus | 1 |

**Aber Vorsicht:** Ein ewiger Kalender mit Vierjahreszyklus kennt die Jahrhundertregel nicht. Er zeigt im Jahr 2100 einen 29. Februar und muss am 1. März 2100 um einen Tag vorgestellt werden, ebenso 2200 und 2300. Erst ein säkularer Kalender bildet den Zyklus von 400 Jahren nach.

BEISPIEL Ein ewiger Kalender bildet vier Jahre mit einem Schaltjahr nach. Wie viele Tage hat dieser Zyklus?

Gegeben: $n_\mathrm{Z} = 4$; $n_\mathrm{S} = 1$

$$\begin{aligned} N_\mathrm{d} &= 365 \cdot n_\mathrm{Z} + n_\mathrm{S} \\ &= 365 \cdot 4 + 1 \\ &= 1461 \end{aligned}$$

1461 Tage oder 48 Monate; so lange braucht das Schaltjahrrad für eine Umdrehung. Der gregorianische Zyklus von 400 Jahren hat 146 097 Tage. Das sind genau 20 871 Wochen, deshalb wiederholen sich nach 400 Jahren auch die Wochentage.

**Merksatz:** 365 Tage sind 52 Wochen und ein Tag. Ein Datum rückt deshalb jedes Jahr um einen Wochentag weiter, über einen Schalttag hinweg um zwei.

## 8.3 Zeitgleichung

Die wahre Sonne läuft übers Jahr ungleichmäßig: Die Erdbahn ist eine Ellipse, und die Erdachse steht schräg zur Bahn. Eine Sonnenuhr zeigt deshalb bis zu gut einer Viertelstunde anders als eine gleichmäßig gehende Uhr. Diesen Unterschied nennt man Zeitgleichung.

### Zeitgleichung

(8.7) MEISTER

$$E = t_\mathrm{W} - t_\mathrm{M}$$

UMGESTELLT $t_\mathrm{M} = t_\mathrm{W} - E$

Die Zeitgleichung ist die wahre Sonnenzeit minus die mittlere Sonnenzeit. Sie hängt nur vom Datum ab, nicht vom Ort.

| | | |
|---|---|---|
| $E$ | Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor) | $\mathrm{min}$ |
| $t_\mathrm{W}$ | wahre Ortszeit (Anzeige der Sonnenuhr) | $\mathrm{min}$ |
| $t_\mathrm{M}$ | mittlere Ortszeit | $\mathrm{min}$ |

**Aber Vorsicht:** Ältere Tafeln und manche Uhren mit Äquationsanzeige rechnen mit umgekehrtem Vorzeichen (mittlere minus wahre Zeit). Vor dem Einstellen prüfen, welche Richtung gemeint ist.

BEISPIEL Am 11. Februar beträgt die Zeitgleichung −14,2 min. Eine Sonnenuhr zeigt 12:00 Uhr, das sind 720 min nach Mitternacht. Wie spät ist es nach mittlerer Ortszeit?

Gegeben: $t_\mathrm{W} = 720\,\mathrm{min}$; $E = -14{,}2\,\mathrm{min}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{M} &= t_\mathrm{W} - E \\ &= 720\,\mathrm{min} - (-14{,}2\,\mathrm{min}) \\ &= 734{,}2\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

734,2 min nach Mitternacht: Es ist 12:14 Uhr mittlerer Ortszeit. Die Sonnenuhr geht gut 14 min nach.

## Jahreswinkel für die Zeitgleichung

(8.8) VERTIEFUNG

$$B = \frac{360° \cdot (N - 81)}{364}$$

Der Jahreswinkel teilt das Jahr in 360° und beginnt am 22. März, dem 81. Tag. Er ist nur eine Hilfsgröße für die Näherungsformel.

| | | |
|---|---|---|
| $B$ | Jahreswinkel (Hilfsgröße; 0° am 22. März) | ° |
| $N$ | Tagesnummer im Jahr (1. Januar = 1) | 1 |

BEISPIEL Der 3. November ist in einem Gemeinjahr der 307. Tag. Wie groß ist der Jahreswinkel?

Gegeben: $N = 307$

$$\begin{aligned} B &= \frac{360° \cdot (N - 81)}{364} \\ &= \frac{360° \cdot (307 - 81)}{364} \\ &\approx 223{,}5° \end{aligned}$$

Rund 223,5°. Mit diesem Winkel rechnet die folgende Formel.

## Zeitgleichung aus dem Datum

(8.9) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$E \approx 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot B) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos B - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin B$$

Die Formel bildet die beiden Ursachen nach: Das Glied mit $2B$ kommt von der schrägen Erdachse und hat zwei Wellen im Jahr, die Glieder mit $B$ kommen von der Ellipsenbahn und haben eine Welle im Jahr.

**Gilt:** Näherung, auf rund eine Minute genau (größte Abweichung je nach Jahr bis etwa 1,4 min, Anfang Dezember). Für Sonnenuhren und zum Prüfen einer Äquationsanzeige reicht das; genaue Tageswerte stehen in astronomischen Jahrbüchern.

| | | |
|---|---|---|
| $E$ | Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor) | min |
| $B$ | Jahreswinkel (Hilfsgröße; 0° am 22. März) | ° |

**Hinweis:** Für den 11. Februar (Tag 42, $B = -38{,}6°$) liefert die Näherung −14,6 min, die Tabelle der Eckwerte −14,2 min. Solche Unterschiede von einigen Zehnteln Minuten liegen in der Genauigkeit der Näherung; zum Einstellen gelten die Tabellenwerte.

BEISPIEL Wie groß ist die Zeitgleichung am 3. November mit dem Jahreswinkel 223,5° aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $B = 223{,}5°$

$$\begin{aligned} E &\approx 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot B) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos B - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin B \\ &= 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot 223{,}5°) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos(223{,}5°) - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin(223{,}5°) \\ &\approx 16{,}4\,\text{min} \end{aligned}$$

Rund +16,4 min: Anfang November geht die Sonnenuhr am weitesten vor.

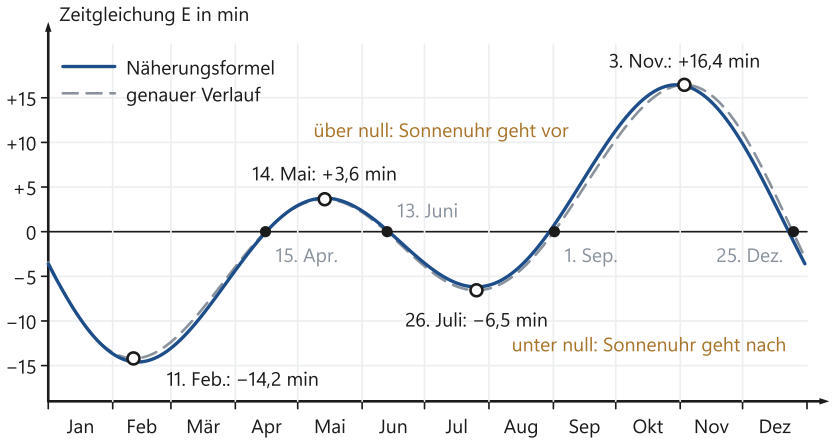



**Abb. 8.4** Zeitgleichung im Lauf des Jahres: Näherungsformel und genauer Verlauf

### Eckwerte der Zeitgleichung (gerundet, für die heutige Zeit)

| Datum | $E$ | Sonnenuhr gegenüber mittlerer Ortszeit |
|---|---|---|
| 11. Februar | −14,2 min | geht am weitesten nach |
| 15. April | 0 | stimmt |
| 14. Mai | +3,6 min | geht vor (kleiner Höchstwert) |
| 13. Juni | 0 | stimmt |
| 26. Juli | −6,5 min | geht nach (kleiner Tiefstwert) |
| 1. September | 0 | stimmt |
| 3. November | +16,4 min | geht am weitesten vor |
| 25. Dezember | 0 | stimmt |

Je nach Stellung im Schaltzyklus verschieben sich die Tage um bis zu einen Tag.

## 8.4 Ortszeit und Zonenzeit

Die mittlere Ortszeit hängt vom Längengrad ab: Die Sonne wandert in einer Stunde über 15 Längengrade, für ein Grad braucht sie 4 min. Damit nicht jeder Ort seine eigene Zeit hat, gilt in einer Zeitzone überall die Ortszeit des Zonenmeridians. Für die mitteleuropäische Zeit (MEZ) ist das der Meridian 15° Ost.

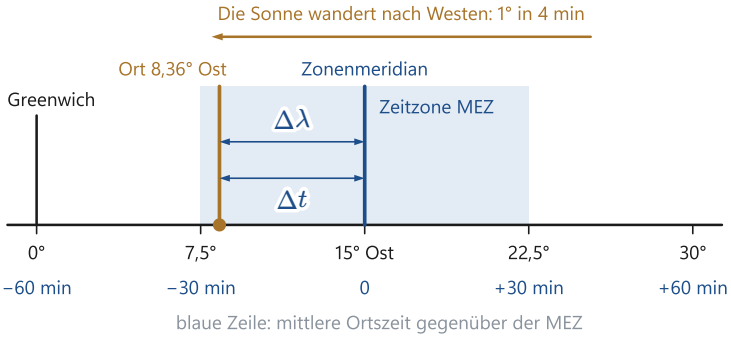



**Abb. 8.5** Ortszeit und Zonenzeit: Ein Ort westlich des Zonenmeridians hat die Sonne später im Süden

### Ortszeit aus dem Längengrad

(8.10) GESELLE

$$\Delta t = \frac{(\lambda - \lambda_Z) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ}$$

Östlich des Zonenmeridians ist die Ortszeit der Zonenzeit voraus, westlich davon liegt sie zurück.

**Gilt:** Längen östlich von Greenwich positiv, westlich negativ.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta t$ | Ortszeitunterschied (mittlere Ortszeit minus Zonenzeit; + heißt: Ortszeit ist voraus) | $\text{min}$ |
| $\lambda$ | geographische Länge des Orts (östliche Länge positiv) | $^\circ$ |
| $\lambda_Z$ | geographische Länge des Zonenmeridians (MEZ: 15° Ost) | $^\circ$ |

BEISPIEL Eine Werkstatt liegt auf 8,36° östlicher Länge. Wie weit weicht ihre mittlere Ortszeit von der MEZ ab?

Gegeben: $\lambda = 8{,}36^\circ$; $\lambda_Z = 15^\circ$

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{(\lambda - \lambda_Z) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ} \\ &= \frac{(8{,}36^\circ - 15^\circ) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ} \\ &\approx -26{,}6\,\text{min}\end{aligned}$$

Die mittlere Ortszeit liegt 26,6 min hinter der MEZ zurück. Die mittlere Sonne steht hier erst um 12:26:34 Uhr MEZ im Süden.

### Zonenzeit aus der Sonnenuhr

(8.11) MEISTER

$$t_Z = t_W - E - \Delta t$$

Zwei Korrekturen führen von der Sonnenuhr zur Armbanduhr: die Zeitgleichung für das Datum und der Ortszeitunterschied für den Längengrad.

**Gilt:** Sonnenuhr, die wahre Ortszeit zeigt. Manche Sonnenuhren sind schon für den Längengrad des Standorts gezeichnet; dann entfällt $\Delta t$.

| | | |
|---|---|---|
| $t_Z$ | Zonenzeit (MEZ) | $\text{min}$ |
| $t_W$ | wahre Ortszeit (Anzeige der Sonnenuhr) | $\text{min}$ |
| $E$ | Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor) | $\text{min}$ |
| $\Delta t$ | Ortszeitunterschied (mittlere Ortszeit minus Zonenzeit; + heißt: Ortszeit ist voraus) | $\text{min}$ |

BEISPIEL Am 3. November zeigt die Sonnenuhr an der Werkstatt aus dem Beispiel davor 12:00 Uhr, also 720 min. Die Zeitgleichung beträgt +16,4 min. Wie spät ist es nach MEZ?

Gegeben: $t_W = 720\,\text{min}$; $E = 16{,}4\,\text{min}$; $\Delta t = -26{,}6\,\text{min}$

$$\begin{aligned}t_Z &= t_W - E - \Delta t \\ &= 720\,\text{min} - 16{,}4\,\text{min} - (-26{,}6\,\text{min}) \\ &= 730{,}2\,\text{min}\end{aligned}$$

730,2 min nach Mitternacht, also 12:10 Uhr MEZ. Während der Sommerzeit kommt eine Stunde dazu.

## 8.5 Mondphase

Die Mondphase wiederholt sich im Mittel alle 29,530 59 Tage. Das Mondalter zählt die Tage seit dem letzten Neumond; nach ihm wird eine Mondphasenanzeige gestellt. Wie man die 29,53 Tage mit Zähnezahlen annähert und wie groß der Fehler der Anzeige wird, steht in Kapitel 2.

### Mondalter aus dem Datum

(8.12) MEISTER

$$a = t - k \cdot T_{\text{syn}}$$

Vom Abstand zu einem bekannten Neumond werden alle vollen Mondumläufe abgezogen. Was übrig bleibt, ist das Mondalter.

**Gilt:** mittlerer Mondumlauf; die wahre Phase kann davon um bis zu etwa einen Tag abweichen. Zum Stellen einer Mondphasenanzeige reicht das.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | Mondalter (Tage seit dem letzten Neumond) | d |
| $t$ | Zeit (seit einem bekannten Neumond) | d |
| $k$ | Anzahl (der seither vollendeten Mondumläufe; die größte ganze Zahl, bei der $a$ nicht negativ wird) | 1 |
| $T_{\text{syn}}$ | synodischer Monat (Neumond bis Neumond) | d |

BEISPIEL Am 12. August 2026 war Neumond. Wie alt ist der Mond am 24. Dezember 2026, also 134 Tage später? In 134 Tagen sind 4 Umläufe vollendet.

Gegeben: $t = 134\,\text{d}$; $k = 4$; $T_{\text{syn}} = 29{,}530\,59\,\text{d}$

$$\begin{aligned} a &= t - k \cdot T_{\text{syn}} \\ &= 134\,\text{d} - 4 \cdot 29{,}530\,59\,\text{d} \\ &\approx 15{,}9\,\text{d} \end{aligned}$$

Das Mondalter beträgt rund 15,9 Tage. Vollmond ist bei 14,8 Tagen, der Mond ist also gerade voll gewesen.

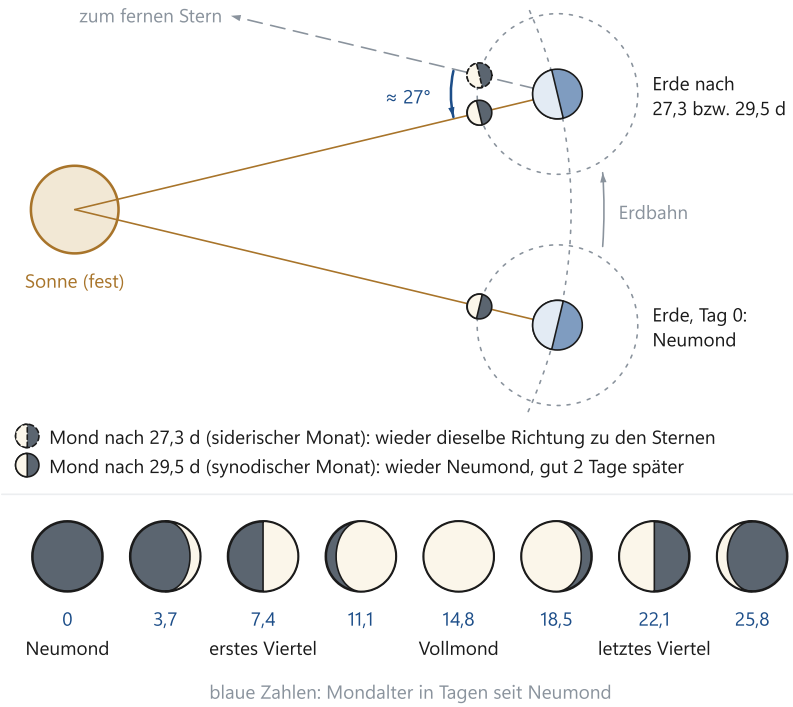



**Abb. 8.6** Oben: Sonne fest, Erde auf ihrer Bahn, Mond um die Erde. Nach einem siderischen Monat (27,3 d) steht der Mond wieder in derselben Richtung zu den Sternen, bis zum Neumond braucht er gut zwei Tage länger (synodischer Monat, 29,5 d; Größen nicht maßstäblich). Unten: Mondphasen, von der Nordhalbkugel gesehen, mit dem mittleren Mondalter

## 8.6 Skalen am Chronographen

Viele Chronographen tragen auf Lünette oder Zifferblatt eine Skala, die aus der gestoppten Zeit sofort eine andere Größe macht. Hinter jeder Skala steht eine einfache Formel. Mit ihr lässt sich eine Skala prüfen oder für ein neues Zifferblatt berechnen.

## Geschwindigkeit aus Messstrecke und Stoppzeit

(8.13) GESELLE

$$v = \frac{s}{t}$$

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | Geschwindigkeit | $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ |
| $s$ | Weg (Messstrecke) | $\mathrm{km}$ |
| $t$ | Zeit (gestoppt) | $\mathrm{s}$ |

Der Chronograph wird am Anfang einer bekannten Strecke gestartet und am Ende gestoppt.

**Gilt:** gleichbleibende Geschwindigkeit auf der Messstrecke.

BEISPIEL Ein Zug braucht für die Strecke zwischen zwei Kilometertafeln 45 s. Wie schnell fährt er?

Gegeben: $s = 1\,\mathrm{km}; \quad t = 45\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{1\,\mathrm{km}}{45\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{km}}{45\,\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &= 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Der Zug fährt 80 km in der Stunde.

## Tachymeterskala

(8.14) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$v = \frac{3600}{t}$$

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | Geschwindigkeit (Skalenwert in km je Stunde) | $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ |
| $t$ | Zeit (gestoppt, in s) | $\mathrm{s}$ |

Die Tachymeterskala ist die Formel davor für eine Messstrecke von 1 km: Beim Stopp nach $t$ Sekunden steht der Zeiger auf der Geschwindigkeit. Genauso zählt die Skala Stück je Stunde, wenn man die Zeit für ein Stück stoppt.

**Gilt:** Zahlenwerte: $t$ in s; Messstrecke 1 km (oder 1 Meile, dann Meilen je Stunde). Die Skala reicht nur bis 60 s. Bei langsameren Vorgängen die halbe Strecke stoppen und den Skalenwert halbieren.

BEISPIEL Welche Zahl steht auf einer Tachymeterskala bei 24 s?

Gegeben: $t = 24\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} v &= \frac{3600}{t} \\ &= \frac{3600}{24} \\ &= 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Bei 24 s steht die 150.

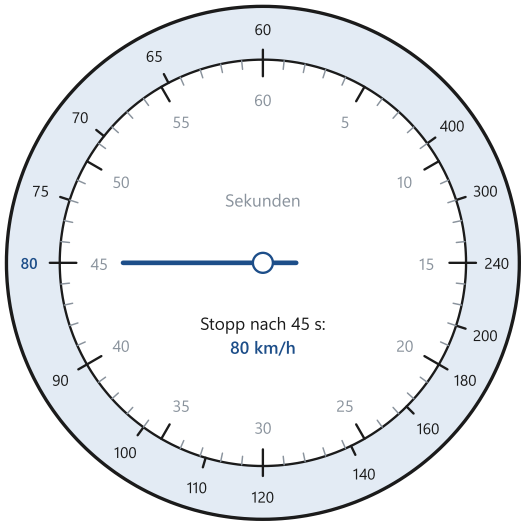



**Abb. 8.7** Tachymeterskala: Skalenwert gleich 3600 geteilt durch die Sekunden

## Telemeter: Entfernung aus der Laufzeit des Schalls

(8.15) GESELLE

$$s = c \cdot t$$

Den Blitz sieht man praktisch sofort, der Donner braucht für jeden Kilometer knapp 3 s. Die Telemeterskala zeigt zur gestoppten Laufzeit die Entfernung in Kilometern.

**Gilt:** Schallgeschwindigkeit in Luft bei 20 °C: $343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; die Laufzeit des Lichts ist vernachlässigt.

| | | |
|---|---|---|
| $s$ | Weg (Entfernung) | $\mathrm{m}$ |
| $c$ | Schallgeschwindigkeit (in Luft) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ |
| $t$ | Zeit (gestoppt, zwischen Lichtsignal und Schall) | $\mathrm{s}$ |

BEISPIEL Zwischen Blitz und Donner werden 6 s gestoppt. Wie weit ist das Gewitter entfernt?

Gegeben: $c = 343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $\quad t = 6\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} s &= c \cdot t \\ &= 343\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\,\mathrm{s} \\ &\approx 2{,}06\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Das Gewitter ist rund 2 km entfernt.

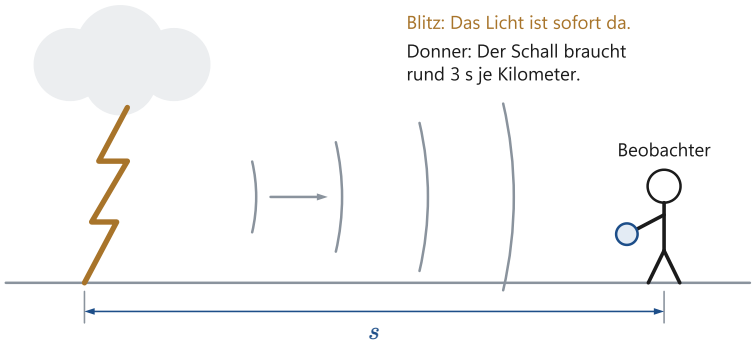



**Abb. 8.8** Telemeter: Aus der Zeit zwischen Blitz und Donner folgt die Entfernung $s$

## Schallgeschwindigkeit und Temperatur

(8.16) ZAHLENWERTGLEICHUNG VERTIEFUNG

$$c \approx 331{,}3 + 0{,}606 \cdot \vartheta$$

Der Schall läuft in warmer Luft schneller. Telemeterskalen sind für eine feste Temperatur gerechnet, meist für 20 °C.

**Gilt:** Zahlenwerte: $\vartheta$ in °C, $c$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; trockene Luft, etwa −20 °C bis 40 °C.

| | | |
|---|---|---|
| $c$ | Schallgeschwindigkeit (in Luft, Zahlenwert in m je Sekunde) | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ |
| $\vartheta$ | Temperatur (der Luft, in °C) | $^\circ\mathrm{C}$ |

BEISPIEL Wie schnell ist der Schall an einem Wintertag mit −10 °C?

Gegeben: $\vartheta = -10^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned} c &\approx 331{,}3 + 0{,}606 \cdot \vartheta \\ &= 331{,}3 + 0{,}606 \cdot (-10) \\ &\approx 325{,}2\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund $325\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind 5 % weniger als bei 20 °C. Eine Telemeterskala zeigt dann 5 % zu viel.

## Pulsometer

(8.17) GESELLE

$$f_\mathrm{P} = \frac{N_\mathrm{P}}{t}$$

Chronograph starten, die auf der Skala angegebene Zahl von Pulsschlägen zählen, stoppen: Der Zeiger steht auf den Schlägen je Minute. Die Asthmometerskala zählt auf dieselbe Weise Atemzüge.

| | | |
|---|---|---|
| $f_\mathrm{P}$ | Pulsfrequenz | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ |
| $N_\mathrm{P}$ | Zahl der gezählten Pulsschläge (Eichung der Skala, meist 15 oder 30) | 1 |
| $t$ | Zeit (gestoppt) | $\mathrm{s}$ |

BEISPIEL Eine Pulsometerskala ist auf 30 Pulsschläge geeicht. Für 30 Schläge werden 20 s gestoppt. Welche Zahl steht dort auf der Skala?

Gegeben: $N_\mathrm{P} = 30; \quad t = 20\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} f_\mathrm{P} &= \frac{N_\mathrm{P}}{t} \\ &= \frac{30}{20\,\mathrm{s}} \\ &= 1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} \\ &= 90\ \tfrac{1}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Der Zeiger steht auf 90 Schlägen je Minute.

### Dezimalminuten

(8.18) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$t_{\text{dez}} = \frac{t}{60}$$

| | | |
|---|---|---|
| $t_{\text{dez}}$ | Zeit in Minuten als Dezimalzahl | $\text{min}$ |
| $t$ | Zeit (gestoppt, in s) | $\text{s}$ |

Für Zeitaufnahmen teilt die Dezimalskala die Minute in 100 Teile. Eine Hundertstelminute dauert 0,6 s. Mit Dezimalminuten lassen sich Zeiten ohne Umrechnen addieren und mit Stückzahlen malnehmen.

**Gilt:** Zahlenwerte: $t$ in s, Ergebnis in min.

BEISPIEL Ein Arbeitsgang dauert 39 s. Was zeigt die Dezimalskala?

Gegeben: $t = 39\,\text{s}$

$$\begin{aligned} t_{\text{dez}} &= \frac{t}{60} \\ &= \frac{39}{60} \\ &= 0{,}65\,\text{min} \end{aligned}$$

0,65 min, also 65 Hundertstelminuten.

**Merksatz:** Drei Sekunden zwischen Blitz und Donner sind rund ein Kilometer.

# Formelzeichen

Alle Formelzeichen dieser Sammlung mit Bedeutung, üblicher Einheit und Kapitel. Dasselbe Zeichen kann in verschiedenen Kapiteln Verschiedenes bedeuten; maßgeblich ist immer die Größentabelle bei der Formel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | Amplitude | °, rad | Kap. 3, 4, 5, 6 |
| $\Delta A$ | Amplitudenabfall | ° | Kap. 6 |
| $a$ | Achsabstand | mm | Kap. 2, 5 |
| $a$ | Abstand | m | Kap. 4 |
| $a$ | Zeitanteil der flachen Lagen | 1 | Kap. 6 |
| $a$ | Mondalter | d | Kap. 8 |
| $A_0$ | Amplitude am Anfang | ° | Kap. 3 |
| $A_0$ | Amplitude voll aufgezogen | ° | Kap. 6 |
| $A_1$ | Ausschlag vorher | rad | Kap. 4 |
| $A_2$ | Ausschlag nachher | rad | Kap. 4 |
| $A_{24}$ | Amplitude nach 24 Stunden Lauf | ° | Kap. 6 |
| $\alpha$ | Eingriffswinkel | ° | Kap. 2 |
| $\alpha$ | Längenausdehnungskoeffizient | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 4 |
| $\alpha_1$ | Längenausdehnungskoeffizient der nach unten wirkenden Teile | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 4 |
| $\alpha_2$ | Längenausdehnungskoeffizient der nach oben wirkenden Teile | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 4 |
| $\alpha_\mathrm{S}$ | Längenausdehnungskoeffizient der Spirale | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 3 |
| $\alpha_\mathrm{U}$ | Längenausdehnungskoeffizient der Unruh | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 3 |
| $A_\mathrm{N}$ | Amplitude nach $N_\mathrm{S}$ Schwingungen | ° | Kap. 3 |
| $a_\mathrm{U}$ | Achsabstand von Anker und Unruh | mm | Kap. 5 |
| $A_\mathrm{Z}$ | von der Zeitwaage angezeigte Amplitude | ° | Kap. 6 |
| $B$ | magnetische Flussdichte | $\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{m^2}}$ | Kap. 6 |
| $B$ | Jahreswinkel | ° | Kap. 8 |
| $b$ | Klingenhöhe | mm | Kap. 1, 3 |
| $b$ | Schläge zu jeder halben Stunde | 1 | Kap. 2 |
| $b_1$ | Klingenhöhe der Originalfeder | mm | Kap. 1 |
| $b_2$ | Klingenhöhe der Ersatzfeder | mm | Kap. 1 |
| $\beta$ | Winkel | ° | Kap. 3 |
| $\beta$ | Temperaturkoeffizient des Quarzes | $\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$ | Kap. 7 |
| $\beta_\mathrm{B}$ | Weg des Ankers von Begrenzung zu Begrenzung | ° | Kap. 5 |
| $\beta_\mathrm{E}$ | Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls der Spirale | $\frac{1}{\mathrm{K}}$ | Kap. 3 |
| $\beta_\mathrm{G}$ | Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist | ° | Kap. 5 |
| $\beta_\mathrm{H}$ | Hebung am Anker | ° | Kap. 5 |
| $\beta_\mathrm{R}$ | Ruhe | ° | Kap. 5 |
| $\beta_\mathrm{V}$ | verlorener Weg | ° | Kap. 5 |
| $b_\mathrm{K}$ | Breite der Klaue, gemessen am Umfang des Rades | mm | Kap. 5 |
| $C$ | Temperaturkoeffizient des Gangs | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d\cdot K}}$ | Kap. 3, 6 |
| $c$ | Kopfspiel zwischen Radkopf und Triebgrund | mm | Kap. 2 |
| $c$ | Schallgeschwindigkeit | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ | Kap. 8 |
| $C_\mathrm{N}$ | Nennkapazität der Batterie | mAh | Kap. 7 |
| $D$ | Richtmoment | $\frac{\mathrm{\mu N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$ | Kap. 3, 5 |
| $D$ | Differenz hängend–flach | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta D$ | Änderung des Richtmoments | $\frac{\mu N \cdot m}{rad}$ | Kap. 3 |
| $d$ | Durchmesser | $mm$ | Kap. 1, 6 |
| $d$ | Teilkreisdurchmesser | $mm$ | Kap. 2 |
| $d'_a$ | Kopfkreisdurchmesser des Triebes | $mm$ | Kap. 2 |
| $d'_f$ | Fußkreisdurchmesser des Triebes | $mm$ | Kap. 2 |
| $d_a$ | Kopfkreisdurchmesser | $mm$ | Kap. 2 |
| $d_a$ | Durchmesser der äußersten Windung | $mm$ | Kap. 3 |
| $d_a$ | Außendurchmesser des Zylinders | $mm$ | Kap. 5 |
| $d_b$ | Grundkreisdurchmesser | $mm$ | Kap. 2 |
| $d_f$ | Fußkreisdurchmesser | $mm$ | Kap. 2 |
| $d_i$ | Durchmesser der innersten Windung | $mm$ | Kap. 3 |
| $d_m$ | Messmaß zwischen den Messflächen | $mm$ | Kap. 2 |
| $d_S$ | Dicke des Seils oder der Saite | $mm$ | Kap. 1 |
| $d_w$ | wirksamer Walzendurchmesser | $mm$ | Kap. 1 |
| $E$ | Elastizitätsmodul | $\frac{N}{mm^2}$ | Kap. 1, 3 |
| $E$ | Zeitgleichung | $min$ | Kap. 8 |
| $e$ | Endhalbmesser | $mm$ | Kap. 3 |
| $\eta$ | Wirkungsgrad | 1 | Kap. 1, 2, 5 |
| $\eta_F$ | Wirkungsgrad der Feder im Federhaus | 1 | Kap. 1 |
| $\eta_{ges}$ | Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks | 1 | Kap. 2 |
| $F$ | Kraft | $N$ | Kap. 6 |
| $\Delta f$ | Frequenzabweichung | $Hz$ | Kap. 7 |
| $f$ | Frequenz | $Hz$ | Kap. 3, 6, 7 |
| $f_{aus}$ | Frequenz am Ausgang des Teilers | $Hz$ | Kap. 7 |
| $f_{ist}$ | gemessene Frequenz | $Hz$ | Kap. 3 |
| $f_M$ | Frequenz der Motorimpulse | $Hz$ | Kap. 7 |
| $f_P$ | Pulsfrequenz | $\frac{1}{min}$ | Kap. 8 |
| $f_{soll}$ | Sollfrequenz | $Hz$ | Kap. 3 |
| $G$ | Gang | $\frac{s}{d}$ | Kap. 3, 6, 7, 8 |
| $G$ | Gang der Uhr in Sekunden je Tag | $\frac{s}{d}$ | Kap. 4 |
| $\Delta G$ | Gangänderung | $\frac{s}{d}$ | Kap. 3, 4, 7 |
| $\Delta G$ | Isochronismusfehler | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $\Delta g$ | Änderung der Fallbeschleunigung | $\frac{m}{s^2}$ | Kap. 4 |
| $\bar{G}$ | mittlerer Gang | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $g$ | Fallbeschleunigung | $\frac{m}{s^2}$ | Kap. 1, 3, 4, 6 |
| $G_0$ | Gang voll aufgezogen | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_1$ | Gang bei der tieferen Temperatur | $\frac{s}{d}$ | Kap. 3 |
| $G_1$ | Gang am ersten Prüftag | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_{15}$ | Gang am letzten Prüftag | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_2$ | Gang bei der höheren Temperatur | $\frac{s}{d}$ | Kap. 3 |
| $G_2$ | Gang am zweiten Prüftag | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_{24}$ | Gang nach 24 Stunden Lauf | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_{38}$ | Gang bei 38 °C | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $G_8$ | Gang bei 8 °C | $\frac{s}{d}$ | Kap. 6 |
| $\gamma$ | halber Umspannungswinkel | $°$ | Kap. 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\gamma_\mathrm{F}$ | Fall | $^\circ$, $\mathrm{rad}$ | Kap. 5 |
| $\gamma_\mathrm{H}$ | Hebung am Rad | $^\circ$ | Kap. 5 |
| $G_\mathrm{f}$ | mittlerer Gang der flachen Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $G_\mathrm{h}$ | mittlerer Gang der hängenden Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $\Delta G_\mathrm{L}$ | größte Lagendifferenz | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $G_\mathrm{m}$ | Gang bei der mittleren Temperatur | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 3 |
| $G_\mathrm{max}$ | größter Gang aller Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $G_\mathrm{min}$ | kleinster Gang aller Lagen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $G_\mathrm{T}$ | erwarteter Gang im Tragen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $\Delta G_\mathrm{W}$ | Gangwiederaufnahme | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $H$ | magnetische Feldstärke | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ | Kap. 6 |
| $h$ | Höhe | $\mathrm{mm}$, $\mathrm{m}$ | Kap. 1, 4, 6 |
| $I$ | Stromstärke | $\mathrm{mA}$ | Kap. 7 |
| $i$ | Übersetzung | 1 | Kap. 2 |
| $i_\mathrm{G}$ | Übersetzung in der Mittellage | 1 | Kap. 5 |
| $i_\mathrm{ges}$ | Gesamtübersetzung | 1 | Kap. 2 |
| $I_\mathrm{IC}$ | Stromaufnahme des Schaltkreises mit Oszillator | $\mu\mathrm{A}$ | Kap. 7 |
| $I_\mathrm{Imp}$ | Strom durch die Spule während des Impulses | $\mathrm{mA}$ | Kap. 7 |
| $I_\mathrm{m}$ | mittlere Stromaufnahme des Werks | $\mu\mathrm{A}$ | Kap. 7 |
| $i_\mathrm{R}$ | Untersetzung des Automatikaufzugs | 1 | Kap. 1 |
| $i_\mathrm{U}$ | Untersetzung | 1 | Kap. 7 |
| $i_\mathrm{W}$ | Übersetzung vom Hebnägelrad zum Windfang | 1 | Kap. 2 |
| $J$ | Trägheitsmoment | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ | Kap. 3 |
| $\Delta J$ | Änderung des Trägheitsmoments | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ | Kap. 3 |
| $j$ | Flankenspiel auf dem Teilkreis | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $J_\mathrm{A}$ | Trägheitsmoment um die Drehachse | $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ | Kap. 4 |
| $J_\mathrm{S}$ | Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt | $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ | Kap. 4 |
| $J_\mathrm{Z}$ | bekanntes Trägheitsmoment der aufgesteckten Scheibe | $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ | Kap. 3 |
| $K$ | CGS-Wert der Spirale | $\frac{\mathrm{N{\cdot}mm^3}}{\mathrm{rad}}$ | Kap. 3 |
| $k$ | Anzahl | 1 | Kap. 1, 2, 8 |
| $k$ | Kopfzuschlag | 1 | Kap. 2 |
| $k$ | letzte geschlagene Stunde | 1 | Kap. 2 |
| $k$ | Umspannung | 1 | Kap. 5 |
| $k'$ | Kopfzuschlag des Triebes | 1 | Kap. 2 |
| $k_\mathrm{A}$ | Amplitudenfaktor der Unwucht | 1 | Kap. 3 |
| $k_\mathrm{F}$ | Füllgrad: Anteil der freien Fläche, den die Feder bedeckt | 1 | Kap. 1 |
| $\Delta l$ | Längenänderung | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3, 4 |
| $\Delta l$ | Verstellweg der Linse | $\mathrm{mm}$ | Kap. 4 |
| $l$ | Länge | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1, 3 |
| $l$ | Pendellänge | $\mathrm{m}$, $\mathrm{mm}$ | Kap. 4 |
| $l_1$ | wirksame Länge beim Versuch | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $l_1$ | Gesamtlänge der nach unten wirkenden Teile | $\mathrm{m}$ | Kap. 4 |
| $l_2$ | nötige wirksame Länge | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $l_2$ | Gesamtlänge der nach oben wirkenden Teile | $\mathrm{m}$ | Kap. 4 |
| $\lambda$ | Hebungswinkel | $^\circ$ | Kap. 5, 6 |
| $\lambda$ | geographische Länge des Orts | $^\circ$ | Kap. 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda_{\mathrm{Z}}$ | an der Zeitwaage eingestellter Hebungswinkel | $^\circ$ | Kap. 6 |
| $\lambda_{\mathrm{Z}}$ | geographische Länge des Zonenmeridians | $^\circ$ | Kap. 8 |
| $l_{\mathrm{G}}$ | Gabellänge | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $l_{\mathrm{P}}$ | Abstand der beiden Berührpunkte | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $l_{\mathrm{r}}$ | reduzierte Pendellänge | $\mathrm{m}$ | Kap. 4 |
| $l_{\mathrm{Z}}$ | Länge eines Zahns | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $M$ | Drehmoment | $\mathrm{N{\cdot}mm}$, $\mathrm{N{\cdot}m}$, $\mathrm{\mu N{\cdot}m}$ | Kap. 1, 2, 3 |
| $\Delta m$ | Masse des Zulagegewichts | $\mathrm{g}$ | Kap. 4 |
| $m$ | Masse | $\mathrm{kg}$, $\mathrm{mg}$ | Kap. 1, 3, 4 |
| $m$ | Modul | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $M'$ | Drehmoment an der Welle des getriebenen Triebes | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 2 |
| $M_1$ | Drehmoment der Originalfeder | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $m_1$ | Modul des Eingriffs Viertelrohr und Wechselrad | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $M_2$ | Drehmoment der Ersatzfeder | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $m_2$ | Modul des Eingriffs Wechseltrieb und Stundenrad | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $M_{\mathrm{F}}$ | Drehmoment des Federhauses im selben Augenblick | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $M_{\mathrm{F}}$ | Drehmoment am Federhaus | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 2 |
| $M_{\mathrm{H}}$ | Drehmoment am Hemmungsrad | $\mathrm{\mu N{\cdot}m}$ | Kap. 2, 5 |
| $M_{\mathrm{m}}$ | mittleres Drehmoment über diese Umgänge | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $M_{\mathrm{max}}$ | größtes elastisch übertragbares Drehmoment | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $M_{\mathrm{S}}$ | Drehmoment an der Schnecke | $\mathrm{N{\cdot}mm}$ | Kap. 1 |
| $m_{\mathrm{S}}$ | Masse einer Schraube | $\mathrm{mg}$ | Kap. 3 |
| $\mu$ | Reibungszahl | 1 | Kap. 5 |
| $m_{\mathrm{u}}$ | Übergewicht | $\mathrm{\mu g}$ | Kap. 3 |
| $\mu_0$ | magnetische Feldkonstante | $\frac{\mathrm{V{\cdot}s}}{\mathrm{A{\cdot}m}}$ | Kap. 6 |
| $N$ | Umgänge | 1 | Kap. 1 |
| $N$ | Anzahl | 1 | Kap. 2, 3, 7 |
| $N$ | Umdrehungen | 1 | Kap. 4 |
| $N$ | Tagesnummer im Jahr | 1 | Kap. 8 |
| $n$ | Drehzahl | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ | Kap. 2 |
| $n$ | Anzahl | 1 | Kap. 6, 7 |
| $n'$ | Drehzahl des getriebenen Triebes | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ | Kap. 2 |
| $n_1$ | Schlagzahl beim Versuch | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 3 |
| $N_{12}$ | Stundenschläge in 12 Stunden | 1 | Kap. 2 |
| $n_2$ | Schlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 3 |
| $N_{\mathrm{A}}$ | Schläge je Umdrehung des Antriebsrads | 1 | Kap. 2 |
| $N_{\mathrm{ab}}$ | Windungen der abgelaufenen Feder | 1 | Kap. 1 |
| $N_{\mathrm{auf}}$ | Windungen der aufgezogenen Feder | 1 | Kap. 1 |
| $N_{\mathrm{d}}$ | Schläge in 24 Stunden | 1 | Kap. 2 |
| $N_{\mathrm{d}}$ | Zahl der Tage im Zyklus | 1 | Kap. 8 |
| $n_{\mathrm{d}}$ | Schläge je Tag | $\frac{1}{\mathrm{d}}$ | Kap. 2 |
| $N_{\mathrm{E}}$ | Endkurvennummer | 1 | Kap. 3 |
| $n_{\mathrm{F}}$ | Zahl der Jahre, bis der Kalender einen Tag vom Sonnenjahr abweicht | 1 | Kap. 8 |
| $n_{\mathrm{H}}$ | Drehzahl des Hemmungsrads | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ | Kap. 2, 5 |
| $n_{\mathrm{h}}$ | Schlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 2, 3, 4, 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n_\mathrm{h}$ | Schlagzahl in Schlägen je Minute | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ | Kap. 4 |
| $n_\mathrm{ist}$ | gemessene Schlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 6 |
| $N_\mathrm{K}$ | Umdrehungen der Krone | 1 | Kap. 1 |
| $N_\mathrm{M}$ | Umdrehungen des Minutenzeigers | 1 | Kap. 1 |
| $n_\mathrm{M}$ | Drehzahl des Minutenrads | $\frac{1}{\mathrm{h}}$ | Kap. 2 |
| $N_\mathrm{max}$ | größtmögliche Umgänge des Federhauses | 1 | Kap. 1 |
| $N_\mathrm{P}$ | Zahl der gezählten Pulsschläge | 1 | Kap. 8 |
| $N_\mathrm{R}$ | Umdrehungen des Rotors | 1 | Kap. 1 |
| $n_\mathrm{R}$ | Drehzahl | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ | Kap. 7 |
| $N_\mathrm{S}$ | Zahl der vollen Schwingungen | 1 | Kap. 3 |
| $n_\mathrm{S}$ | Drehzahl des Sekundenrads | $\frac{1}{\mathrm{min}}$ | Kap. 2, 7 |
| $n_\mathrm{S}$ | Zahl der Schaltjahre im Zyklus | 1 | Kap. 8 |
| $N_\mathrm{Sch}$ | Schläge je Umdrehung der Schlossscheibe | 1 | Kap. 2 |
| $n_\mathrm{soll}$ | Sollschlagzahl | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 6 |
| $N_\mathrm{W}$ | Umdrehungen der Walze | 1 | Kap. 1 |
| $n_\mathrm{Z}$ | Zahl der Jahre im Zyklus | 1 | Kap. 8 |
| $\omega$ | Kreisfrequenz | $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ | Kap. 3 |
| $\omega_\mathrm{max}$ | Winkelgeschwindigkeit der Unruh beim Durchgang durch die Ruhelage | $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ | Kap. 3 |
| $\overline{\Delta G}$ | mittlere Gangabweichung | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $P$ | Leistung | $\mu\mathrm{W}$ | Kap. 1, 3 |
| $P$ | Gewindesteigung | $\mathrm{mm}$ | Kap. 4 |
| $p$ | Teilung | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $p$ | Windungsabstand | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $p$ | Druck | $\mathrm{bar}$ | Kap. 6 |
| $p_\mathrm{dyn}$ | Staudruck | $\mathrm{bar}$ | Kap. 6 |
| $P_\mathrm{U}$ | Leistung, die Unruh oder Pendel erreicht | $\mu\mathrm{W}$ | Kap. 1 |
| $Q$ | Gütefaktor | 1 | Kap. 3, 5 |
| $R$ | Innenradius | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $R$ | Radius | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $\Delta r$ | Verschiebung des Schwerpunkts | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $r$ | Radius | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1, 3 |
| $r_\mathrm{A}$ | Ankerarm | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $r_\mathrm{a}$ | Radius der äußersten Windung | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $r_\mathrm{E}$ | Radius des Hebelsteins um die Unruhachse | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $r_\mathrm{F}$ | Radius des Federhauses | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $\rho$ | Radius | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $\rho$ | Reibungswinkel | $^\circ$ | Kap. 5 |
| $r_\mathrm{i}$ | Innenradius des abgelaufenen Federpakets | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $r_\mathrm{i}$ | Radius der innersten Windung | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $r_\mathrm{S}$ | Wirkradius der Schnecke an der Stelle, an der die Kette abläuft | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $r_\mathrm{S}$ | Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $r_\mathrm{u}$ | Abstand des Übergewichts von der Unruhachse | $\mathrm{mm}$ | Kap. 3 |
| $S$ | sekundärer Fehler | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 3 |
| $S$ | Stand | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $\Delta S$ | Standänderung | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $\Delta s$ | Änderung der Klingenstärke | $\mu\mathrm{m}$ | Kap. 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s$ | Klingenstärke | $\mathrm{mm}$, $\mu\mathrm{m}$ | Kap. 1, 3 |
| $s$ | Zahndicke | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $s$ | Weg | $\mathrm{km}$, $\mathrm{m}$ | Kap. 8 |
| $s'$ | Zahndicke des Triebes auf dem Teilkreis | $\mathrm{mm}$ | Kap. 2 |
| $S_1$ | Stand bei der ersten Ablesung | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $s_1$ | Klingenstärke der Originalfeder | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $S_2$ | Stand bei der zweiten Ablesung | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $s_2$ | Klingenstärke der Ersatzfeder | $\mathrm{mm}$ | Kap. 1 |
| $s_\mathrm{E}$ | Selbstentladung | $\frac{\%}{\mathrm{a}}$ | Kap. 7 |
| $s_\mathrm{F}$ | Fall als Weg | $\mathrm{mm}$ | Kap. 5 |
| $\sigma_\mathrm{zul}$ | zulässige Biegespannung | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ | Kap. 1 |
| $\sum G_i$ | Summe der Einzelgänge, mit Vorzeichen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $\sum \lvert G_{2k} - G_{2k-1} \rvert$ | Summe der fünf Beträge: Unterschied der beiden Tagesgänge je Lage | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $T$ | Schwingungsdauer | $\mathrm{s}$ | Kap. 3, 4 |
| $\Delta t$ | Abweichung der Anzeige vom wahren Mondalter | $\mathrm{d}$ | Kap. 2 |
| $\Delta t$ | Zeitverschiebung der Schläge gegen die Normalfrequenz während der Messzeit | $\mathrm{ms}$ | Kap. 6 |
| $\Delta t$ | Ortszeitunterschied | $\mathrm{min}$ | Kap. 8 |
| $t$ | Zeit | $\mathrm{s}$, $\mathrm{d}$, $\mathrm{h}$ | Kap. 3, 6, 7, 8 |
| $t'_\mathrm{U}$ | Umlaufzeit des Triebes | $\mathrm{s}$ | Kap. 2 |
| $T_0$ | Schwingungsdauer bei sehr kleinem Ausschlag | $\mathrm{s}$ | Kap. 4 |
| $T_1$ | Schwingungsdauer ohne Scheibe | $\mathrm{s}$ | Kap. 3 |
| $t_1$ | Zeitpunkt der ersten Ablesung | $\mathrm{d}$ | Kap. 6 |
| $t_1$ | Dauer der einen Halbschwingung | $\mathrm{ms}$ | Kap. 6 |
| $T_2$ | Schwingungsdauer mit Scheibe | $\mathrm{s}$ | Kap. 3 |
| $t_2$ | Zeitpunkt der zweiten Ablesung | $\mathrm{d}$ | Kap. 6 |
| $t_2$ | Dauer der folgenden Halbschwingung | $\mathrm{ms}$ | Kap. 6 |
| $t_\mathrm{A}$ | Umlaufzeit der treibenden Welle | $\mathrm{d}$ | Kap. 2 |
| $t_\mathrm{A}$ | Abfallfehler | $\mathrm{ms}$ | Kap. 6 |
| $\tau$ | Teilung | $^\circ$ | Kap. 5 |
| $t_\mathrm{dez}$ | Zeit in Minuten als Dezimalzahl | $\mathrm{min}$ | Kap. 8 |
| $T_\mathrm{E}$ | siderisches Jahr | $\mathrm{d}$ | Kap. 8 |
| $t_\mathrm{F}$ | Umlaufzeit des Federhauses | $\mathrm{h}$ | Kap. 1 |
| $t_\mathrm{F}$ | Laufzeit, bis die Anzeige um $\Delta t$ abweicht | $\mathrm{d}$ | Kap. 2 |
| $t_\mathrm{G}$ | Gangdauer | $\mathrm{h}$, $\mathrm{d}$ | Kap. 1, 2 |
| $t_\mathrm{H}$ | Hebungszeit | $\mathrm{ms}$ | Kap. 6 |
| $t_\mathrm{I}$ | Inhibitionsperiode | $\mathrm{s}$ | Kap. 7 |
| $t_\mathrm{Imp}$ | Impulsdauer | $\mathrm{ms}$ | Kap. 7 |
| $T_\mathrm{J}$ | tropisches Jahr | $\mathrm{d}$ | Kap. 8 |
| $T_\mathrm{K}$ | mittlere Länge des Kalenderjahrs | $\mathrm{d}$ | Kap. 8 |
| $t_\mathrm{L}$ | angezeigte Dauer eines Mondumlaufs | $\mathrm{d}$ | Kap. 2 |
| $T_\mathrm{M}$ | Periodendauer der Motorimpulse | $\mathrm{s}$ | Kap. 7 |
| $t_\mathrm{M}$ | Umlaufzeit des Minutenrads | $\mathrm{h}$ | Kap. 1 |
| $t_\mathrm{M}$ | Messzeit | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $t_\mathrm{M}$ | mittlere Ortszeit | $\mathrm{min}$ | Kap. 8 |
| $t_\mathrm{N}$ | Normalzeit | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $t_\mathrm{R}$ | Gangreserve | $\mathrm{h}$ | Kap. 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T_{\mathrm{S}}$ | Schlagdauer | $\mathrm{s}$ | Kap. 4 |
| $t_{\mathrm{s}}$ | Zeit zwischen zwei Schaltungen | $\mathrm{d}$ | Kap. 2 |
| $T_{\mathrm{sid}}$ | siderischer Monat | $\mathrm{d}$ | Kap. 8 |
| $T_{\mathrm{So}}$ | mittlerer Sonnentag | $\mathrm{s}$ | Kap. 8 |
| $T_{\mathrm{St}}$ | Sterntag | $\mathrm{s}$ | Kap. 8 |
| $T_{\mathrm{syn}}$ | synodischer Monat | $\mathrm{d}$ | Kap. 2, 8 |
| $t_{\mathrm{U}}$ | Umlaufzeit der Antriebswelle | $\mathrm{h}$ | Kap. 1 |
| $t_{\mathrm{U}}$ | Umlaufzeit des treibenden Rades | $\mathrm{s}$ | Kap. 2 |
| $t_{\mathrm{U}}$ | Anzeige der Uhr | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $t_{\mathrm{W}}$ | Umlaufzeit der Walze | $\mathrm{h}$ | Kap. 1 |
| $t_{\mathrm{W}}$ | wahre Ortszeit | $\mathrm{min}$ | Kap. 8 |
| $t_{\mathrm{Z}}$ | Zonenzeit | $\mathrm{min}$ | Kap. 8 |
| $U$ | nötige Umdrehungen des Antriebsrads | 1 | Kap. 2 |
| $U$ | Spannung | $\mathrm{V}$ | Kap. 7 |
| $u_G$ | größter Fehler des Gangs durch das Ablesen | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ | Kap. 6 |
| $U_{\mathrm{N}}$ | Nennspannung der Batterie | $\mathrm{V}$ | Kap. 7 |
| $u_S$ | größter Ablesefehler eines Standes | $\mathrm{s}$ | Kap. 6 |
| $U_{\mathrm{W}}$ | Umdrehungen des Windfangs je Schlag | 1 | Kap. 2 |
| $v$ | Geschwindigkeit | $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ | Kap. 6, 8 |
| $\varepsilon$ | Winkel | $^\circ$ | Kap. 6 |
| $\varphi$ | Verdrehwinkel | $\mathrm{rad}$ | Kap. 1 |
| $\varphi$ | Winkel | $^\circ$, $\mathrm{rad}$ | Kap. 3 |
| $\varphi$ | geographische Breite | $^\circ$ | Kap. 4 |
| $\varphi_{\mathrm{E}}$ | Ergänzungsbogen | $^\circ$ | Kap. 5 |
| $\varphi_{\mathrm{S}}$ | Schrittwinkel des Rotors | $^\circ$ | Kap. 7 |
| $\varrho$ | Dichte | $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ | Kap. 6 |
| $\Delta\vartheta$ | Temperaturänderung | $\mathrm{K}$ | Kap. 4 |
| $\vartheta$ | Temperatur | $^\circ\mathrm{C}$ | Kap. 7, 8 |
| $\vartheta_0$ | Temperatur des Umkehrpunkts | $^\circ\mathrm{C}$ | Kap. 7 |
| $\vartheta_1$ | tiefere Prüftemperatur | $^\circ\mathrm{C}$ | Kap. 3 |
| $\vartheta_2$ | höhere Prüftemperatur | $^\circ\mathrm{C}$ | Kap. 3 |
| $v_{\mathrm{F}}$ | Anteil der Radarbeit, der im Fall verloren geht | $\%$ | Kap. 5 |
| $W$ | Arbeit | $\mathrm{mJ}$, $\mathrm{J}$ | Kap. 1, 7 |
| $W$ | Energie | $\mu\mathrm{J}$, $\mathrm{J}$ | Kap. 3, 7 |
| $\Delta W$ | Energieverlust je voller Schwingung | $\mu\mathrm{J}$ | Kap. 3 |
| $W_{\mathrm{ab}}$ | beim Ablauf abgegebene Arbeit | $\mathrm{mJ}$ | Kap. 1 |
| $W_{\mathrm{auf}}$ | beim Aufziehen aufgewendete Arbeit | $\mathrm{mJ}$ | Kap. 1 |
| $W_{\mathrm{max}}$ | größte elastisch speicherbare Energie | $\mathrm{mJ}$ | Kap. 1 |
| $W_{\mathrm{S}}$ | Arbeit des Hemmungsrads je Schlag | $\mu\mathrm{J}$ | Kap. 5 |
| $W_{\mathrm{U}}$ | Arbeit, die der Unruh je Schlag zugeführt wird | $\mu\mathrm{J}$ | Kap. 5 |
| $x$ | Abstand | $\mathrm{mm}$ | Kap. 4 |
| $z$ | Zähnezahl | 1 | Kap. 2, 5 |
| $z'$ | Zähnezahl des Triebes | 1 | Kap. 2 |
| $z'_1$ | Zähnezahl des Triebs am ersten Reduktionsrad | 1 | Kap. 1 |
| $z'_1$ | Zähnezahl des ersten getriebenen Triebes | 1 | Kap. 2 |
| $z'_2$ | Zähnezahl des Triebs am zweiten Reduktionsrad | 1 | Kap. 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z'_2$ | Zähnezahl des zweiten getriebenen Triebes | 1 | Kap. 2 |
| $z'_3$ | Zähnezahl des dritten getriebenen Triebes | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{A}$ | Zähnezahl des Aufzugtriebs | 1 | Kap. 1 |
| $z'_\mathrm{B}$ | Zähnezahl des Beisatzradtriebs | 1 | Kap. 1 |
| $z'_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungstriebs | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kupplungstriebs | 1 | Kap. 1 |
| $z'_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodentriebs | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{M}$ | Zähnezahl des Minutenradtriebs | 1 | Kap. 1 |
| $z'_\mathrm{N}$ | Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{R}$ | Zähnezahl des Rotortriebs | 1 | Kap. 1 |
| $z'_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundentriebs | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{Sch}$ | Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads, der die Schlossscheibe treibt | 1 | Kap. 2 |
| $z'_\mathrm{W}$ | Zähnezahl des Wechseltriebs | 1 | Kap. 2 |
| $z_1$ | Zähnezahl des ersten Reduktionsrads | 1 | Kap. 1 |
| $z_1$ | Zähnezahl des ersten treibenden Rades | 1 | Kap. 2 |
| $z_2$ | Zähnezahl des zweiten Reduktionsrads | 1 | Kap. 1 |
| $z_2$ | Zähnezahl des zweiten treibenden Rades | 1 | Kap. 2 |
| $z_{24}$ | Zähnezahl des 24-Stunden-Rads | 1 | Kap. 2 |
| $z_3$ | Zähnezahl des dritten treibenden Rades | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{A}$ | Zähnezahl des treibenden Rades auf dem Stundenrohr | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{A}$ | Zähnezahl des Antriebsrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{B}$ | Zähnezahl des Beisatzrads | 1 | Kap. 1 |
| $z_\mathrm{F}$ | Zähnezahl des Federhauses | 1 | Kap. 1 |
| $z_\mathrm{H}$ | Zähnezahl des Hemmungsrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{K}$ | Zähnezahl des Kleinbodenrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{M}$ | Zähnezahl des Minutenrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{N}$ | Zahl der Hebnägel | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{S}$ | Zähnezahl des Sekundenrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{Sch}$ | Zähnezahl des Schlossscheibenrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{Sp}$ | Zähnezahl des Sperrrads | 1 | Kap. 1 |
| $z_\mathrm{St}$ | Zähnezahl des Stundenrads | 1 | Kap. 2 |
| $z_\mathrm{V}$ | Zähnezahl des Viertelrohrs | 1 | Kap. 1, 2 |
| $z_\mathrm{W}$ | Zähnezahl des Wechselrads | 1 | Kap. 2 |

# Stichwortverzeichnis


## 2

24-Stunden-Anzeige 37

## A

Abfall 115
Abfallfehler 115
Abfallfehler als Winkel 115
Abfallfehler, Winkel 115
Abgegebene Arbeit beim Ablauf 16
Abgleich, digitaler 134
Ablesefehler 127
Abstand der Berührpunkte 98
Abzählen der Spirale 64
Abzählen: Schwingungen in der Zählzeit 64
Achsabstand 40
Achsabstand von Rad und Anker 97
Achsabstand, Rad und Anker 97
Achttagewerk 18
Alternanz 58
Alterung, Quarz 134
Amplitude aus der Energiebilanz 105
Amplitude aus Hebungswinkel und Hebungszeit 116
Amplitude bei falsch eingestelltem Hebungswinkel 117
Amplitude, Energiebilanz 105
Amplitude, falscher Hebungswinkel 117
Amplitude, Pendel 88
Amplitude, Unruh 59
Amplitude, Zeitwaage 116
Amplitudenabfall 121
Amplitudenabfall in 24 Stunden 121
Anker, Achsabstand 97
Anker, Umspannung 96
Ankerarm 97
Ankerweg 100
Antimagnetisch 126
Äquation 143
Arbeit des Hemmungsrads je Schlag 103
Arbeit, Federhaus 16
Arbeit, Hemmungsrad 103
Archimedische Spirale 62
Asthmometer 150
Aufprallgeschwindigkeit beim Fall 127
Aufzugszustand 121
Aufzugtrieb 25
Ausschwingen ohne Antrieb 76
Ausschwingversuch 76
Auswuchten 69
Automatikaufzug 26

## B

Batteriekapazität 129
Batterielaufzeit 129
Bedingung für das Sekundenrad 35
Begrenzung 100
Beharrungszustand 105
Beisatzrad 18
Berührpunkte, Abstand 98
Biegespannung, Zugfeder 13
Breguetspirale 64

## C

CGS-Nummer 63
CGS-Nummer der Spirale 63
CGS-Wert 63
Chronometerprüfung 123
Chronometerprüfung, Temperatur 73

## D

Dämpfung, Unruh 76
Delta, Lagen 119
Dezimalminuten 151
Differenz hängend–flach 120
Direktionsmoment 60
Drehmoment am Hemmungsrad 55
Drehmoment am Trieb 32
Drehmoment an der Schnecke 22
Drehmoment an der Walze 20
Drehmoment der Zugfeder 12
Drehmoment, Gewichtsantrieb 20
Drehmoment, größtes 13
Drehmoment, Hemmungsrad 55
Drehmoment, Räderwerk 32
Drehmoment, Zugfeder 12
Drehzahl 30
Drehzahl des Hemmungsrads 34
Drehzahl des Rotors 135
Drehzahl des Triebes 30
Drehzahl, Hemmungsrad 93
Druck einer Wassersäule 125
Druckkraft 125
Druckkraft auf Glas oder Boden 125

## E

Einfluss der Klingenstärke 13
Eingriffslinie 48
Eingriffswinkel 48
Elastizitätsmodul, Spirale 60
Ellipse (Hebelstein) 101
Endhalbmesser 64
Endkurve 64
Endkurvennummer 64
Energie der schwingenden Unruh 74
Energie des Gewichts 21
Energie eines Motorimpulses 137
Energie, Federhaus 16
Energie, Gewichtsantrieb 21
Energie, größte 15
Energie, Unruh 74
Energie, Zugfeder 15
Energiebilanz, Unruh 105
Energieinhalt der Batterie 130
Ergänzungsbogen 95
Ergänzungsbogen der Unruh 95
Ergänzungsbogen des Pendels 108
Ergänzungsbogen, Pendel 108
Ersatzfeder 14
Ersatzfeder mit gleicher Wirkung 14

Evolventenverzahnung 48
Ewiger Kalender 143

## F

Fall 94
Fall als Weg der Zahnspitze 95
Fall, als Weg 95
Fall, Verlust 104
Fallbeschleunigung nach Breite und Höhe 91
Fallbeschleunigung, Ort 91
Fallhöhe 20
Fallhöhe des Gewichts 20
Fallverlust 104
Fallwinkel 94
Federhaus 6
Federhaus, Übersetzung 17
Federhausumgänge 7
Federkern 6
Federlänge 8
Federlänge aus den Windungen der abgelaufenen Feder 11
Federlänge aus Windungen 11
Federmoment 12
Federpaket 6
Federpaket, Breite 9
Federvolumen 15
Fehlendes Rad bestimmen 34, 43
Fehler des Gangs durch das Ablesen 127
Feinregulierung 68
Feinregulierung mit Regulierschrauben 68
Feinregulierung, Pendel 84
Flankenspiel 46
Flussdichte und Feldstärke in Luft 126
freie Hemmung 95
Frequenz der Unruh 57
Frequenz, Unruh 57
Frequenzabweichung 70, 133
Frequenzteiler 132
Fußhöhe 44
Fußkreis 44
Fußkreis der Evolventenverzahnung 48
Fußkreis des Rades 44
Fußkreis des Triebes 45
Fußkreis des Triebes (Richtwert) 44
Fußkreis, Evolvente 48
Fußkreis, Trieb 44, 45
Füllfaktor 9
Füllgrad 9
Füllgrad des Federhauses 9
Füllung des Federhauses 8

## G

Gabel 101
Gabel und Hebelstein: Längen und Winkel 101
Gabel, Übersetzung 103
Gabellänge 102
Gabellänge aus dem Achsabstand 102
Gang 111
Gang aus der Abweichung der Schlagzahl 112
Gang aus der Frequenzabweichung 70
Gang aus der Zeitverschiebung der Schläge 113
Gang aus zwei Ständen 111
Gang der Quarzuhr aus der Frequenzabweichung 133
Gang einer Sternzeituhr gegen mittlere Zeit 140
Gang im Tragen aus zwei Lagengruppen 120
Gang, aus der Schlagzahl 112
Gang, Frequenz 70
Gang, im Tragen 120
Gang, je Monat 111
Gang, mittlerer 112
Gang, Pendellänge 81
Gang, Quarzuhr 133
Gang, Sternzeit 140
Gang, täglicher 111
Gang, Trägheitsmoment 67
Gangabweichung, mittlere 123
Gangänderung aus Richtmoment und Trägheitsmoment 70
Gangänderung durch das Trägheitsmoment 67
Gangänderung durch die Klingenstärke 61
Gangänderung durch eine Unwucht (Schwerpunktfehler) 69
Gangänderung durch einen anderen Aufstellort 91
Gangänderung durch Längenänderung 81
Gangänderung durch Temperatur 89
Gangänderung mit dem Rücker 65
Gangänderung mit der Reguliermutter 82
Gangänderung, wenn sich der Ausschlag ändert 88
Gangdauer 18
Gangdauer aus den Umgängen des Federhauses 18
Gangdauer aus der Fallhöhe 21
Gangdauer, Gewichtsantrieb 21
Gangreserve 18
Gangreserve, Automatik 27
Gangwiederaufnahme 124
Gauss 126
Gehwerk 33
Genaue Mondphase mit Übersetzung 53
Gesamtübersetzung 31
Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks 54
Geschwindigkeit aus Messstrecke und Stoppzeit 148
Geschwindigkeit, Chronograph 148
Gespeicherte Energie der idealen Feder 15
Gewichtsantrieb 20
Gewichtsantrieb, Fallhöhe 20
Gleicher Achsabstand im Zeigerwerk 38
Grahamhemmung 107
Grahamhemmung, Klauenbreite 107
Gregorianischer Kalender 141
Größte Lagendifferenz 119
Größte speicherbare Energie 15
Größte Winkelgeschwindigkeit 59
Größte Zahl der Umgänge 10
Größtes Drehmoment aus der zulässigen Biegespannung 13
Grundkreis 48
Günstigste Federlänge 8
Güte, Unruh 75
Gütefaktor 75, 105

## H

Halbschwingung 58, 79
Halbschwingungen je Stunde 33
Halbstundenschlag 49
Handaufzug 25
Hebelscheibe 101
Hebelstein 101
Hebelstein, Radius 102
Hebelsteinradius aus dem Achsabstand 102
Hebnägelrad 50

Hebnägelrad, Übersetzung 50
Hebung und Fall am Rad 94
Hebung, am Anker 100
Hebung, am Rad 94
Hebungswinkel, Gabel 101
Hebungswinkel, Zeitwaage 117
Hebungszeit 116
Hemmung, Wirkungsgrad 104
Hemmungsrad, Arbeit je Schlag 103
Hemmungsrad, Drehzahl 34, 93
Hemmungsrad, Teilung 93
Hundertstelminute 151

## I

Impulsdauer 136
Impulsenergie 137
Inhibition 134
Inhibition: Gangkorrektur durch ausgeblendete Impulse 134
ISO 1413 127
ISO 3159 123
ISO 764 126
Isochronismus, 0 h und 24 h 121
Isochronismus, Pendel 88
Isochronismusfehler aus 0 h und 24 h 121

## J

Jahre bis zu einem Tag Abweichung 142
Jahreswinkel für die Zeitgleichung 144
Julianischer Kalender 141

## K

Kalenderfehler 142
Kalenderjahr 141
Kerndurchmesser, Trieb 44
Kette und Schnecke 22
Klauenbreite 107
Klauenbreite der Grahamhemmung 107
Kleinbodenrad 35
Klingenhöhe 60
Klingenstärke 13, 60
Klingenstärke aus Umgängen 10
Kompensationspendel 90
Kompensationsunruh 74
Kopfhöhe 41
Kopfkreis 41
Kopfkreis bei ungerader Zähnezahl messen 47
Kopfkreis der Evolventenverzahnung 48
Kopfkreis des Rades 41
Kopfkreis des Triebes 43
Kopfkreis messen 47
Kopfkreis, Evolvente 48
Kopfkreis, Trieb 43
Kopfspiel 45
Kreisfehler 88
Kreisfrequenz 58
Kronenaufzug 25
Kronenumdrehungen für den Aufzug 25
Kronrad 25
Kupplungstrieb 27
Kurvenvorlage 64

## L

Lageenergie 21
Lagen, flach und hängend 120
Lagendifferenz 119
Lagenfehler 69, 119
Länge der Flachspirale 62
Länge des Ankerarms 97
Längengrad 146
Laufzeit aus Kapazität und Stromaufnahme 129
Laufzeit bis zur Abweichung der Mondphase 53
Laufzeit mit Selbstentladung 130
Lavet-Motor 135
Leistung am Gangregler 24
Leistung aus Drehmoment 23
Leistung aus Drehmoment und Umlaufzeit 23
Leistung, Antrieb 23
Leistung, Hemmungsrad 103
Leistung, mittlere 23
Leistung, Unruh 24, 76
Leistungsbedarf 76
Leistungsbedarf der Unruh 76
Linse verstellen 82
Linse verstellen aus Gang und Schlagzahl (Werkstattformel) 82

## M

Magnetfeld 126
Masselots 67
Messfehler, Gang 127
Messzeit 113
MEZ 146
Milliamperestunde 129
Mindestausschlag 108
Mittlere Gangabweichung 123
Mittlere Länge des Kalenderjahrs 141
Mittlere Leistung 23
Mittlere Sonnenzeit 143
Mittlere Stromaufnahme des Werks 136
Mittlerer Gang 112
Mittlerer täglicher Gang 112
Modul 39
Modul aus Achsabstand 40
Modul aus dem gemessenen Kopfkreis 43
Modul aus Kopfkreis 43
Mondalter 147
Mondalter aus dem Datum 147
Mondphase 52, 147
Mondphase, genaue 53
Mondphase, Genauigkeit 53
Mondphasenscheibe 52
Mondscheibe 52
Mondumlauf 141
Motorimpuls 136

## N

Neumond 147
Normalschwere 91
Normalzeit 110

## O

Ortszeit 146
Ortszeit aus dem Längengrad 146

## P

Paarung Unruh und Spirale 71

Paarung: Richtmoment für Unruh und Schlagzahl 71
Paletten, Abstand 98
Pendel, Ergänzungsbogen 108
Pendel, Schwingungsdauer 79
Pendellänge 80
Pendellänge aus der Schlagzahl 80
Pendellänge aus Schlägen je Minute (Werkstattformel) 81
Physikalisches Pendel 86
ppm und Gang 133
Produktionszähler 148
Prüfdruck 125
Pulsometer 150

## Q

Quarz, Temperaturgang 134
Quarzfrequenz 32 768 Hz 132

## R

Räderwerk 31
Radius des Federkerns (Richtwert) 6
Reduktionsräderwerk 26
Reduzierte Pendellänge 86
Reglage 70
Regulieren, Grundformel 70
Regulieren, Pendeluhr 81, 82
Regulieren, Rücker 65
Regulieren, Unruh 67
Reguliergewicht 85
Reguliermutter 82
Regulierschrauben 67, 68
Reguliertischchen 84
Reibungswinkel 99
Repère 115
Richtmoment 60
Richtmoment aus den Maßen der Spirale 60
Rolle, lose 20
Rostpendel 90
Rotor 26, 135
Rotorumdrehungen für eine Gangreserve 27
Rücker 65
Rückstellmoment 60
Rückstellmoment der Spirale 60
Ruhe 100

## S

Säkularer Kalender 143
Schallgeschwindigkeit 149
Schallgeschwindigkeit und Temperatur 150
Schallgeschwindigkeit, Temperatur 150
Schaltjahr 141
Schaltzyklus 143
Schlagdauer (Halbschwingung) 79
Schläge in 12 Stunden 49
Schläge je Tag 49
Schläge je Umdrehung des Antriebsrads 50
Schlagwerk 49
Schlagwerk, Gangdauer 51
Schlagzahl aus dem letzten Eingriff 35
Schlagzahl aus dem Räderwerk 33
Schlagzahl aus der Frequenz 58
Schlagzahl aus der Schwingungsdauer 80
Schlagzahl aus Zähnezahlen 33
Schlagzahl der Kleinuhr aus den Zähnezahlen 34
Schlagzahl und Drehzahl des Hemmungsrads 93
Schlagzahl, Abweichung 112
Schlagzahl, Hemmungsrad 93
Schlagzahl, Kleinuhr 34
Schlagzahl, Pendel 80
Schlagzahl, Unruh 58
Schlossscheibe 50
Schlossscheibenschlagwerk 50
Schnecke 22
Schritt je Schlag 93
Schrittmotor 135
Schrittwinkel 135
Schwereformel 91
Schwerpunktfehler 69
Schwingungsdauer 79
Schwingungsdauer bei größerem Ausschlag 88
Schwingungsdauer der Unruh 57
Schwingungsdauer des physikalischen Pendels 86
Schwingungsdauer, Unruh 57
Schwingungsenergie 74
Schwingungsmittelpunkt 86
Sekundärer Fehler 74
Sekundenpendel 79
Sekundenrad 35
Sekundenrad, fehlendes 35
Sekundenrad, Quarzwerk 136
Selbstentladung 130
Siderischer Monat 141
Sinusschwingung 59
Sonnentag, mittlerer 140
Sonnenuhr 146
Spannarbeit 15
Sperrrad 25
Spirale auswählen 71
Spirale bestellen 63
Spirale kürzen 65
Spirale, Abzählen 64
Spirale, Länge 62
Spirale, Richtmoment 60
Spirale, Stärke und Gang 61
Spiralnummer 63
Stand 110
Standänderung 111
Standänderung in einer Laufzeit 111
Staudruck 126
Staudruck bei Bewegung im Wasser 126
Steiner, Satz von 87
Sterntag 140
Sterntag aus Sonnentag und Jahr 140
Sternzeit 140
Sternzeituhr 140
Stimmgabelquarz 134
Stoßprüfung 127
Stoßsicherung, Prüfung 127
Stromaufnahme 129
Stromaufnahme, mittlere 136
Stundenrad 37
Summe der Stundenschläge 49
Synodischer Monat 52, 141
Synodischer Monat aus dem Mondumlauf 141

## T

Tachymeter 148

Tachymeterskala 148
Tage im Schaltzyklus 143
Tagesbedarf, Automatik 27
Tagesnummer 144
Tangente, Ankerhemmung 97
Teilerkette 132
Teilkreis 39
Teilkreis aus dem Achsabstand 40
Teilkreisdurchmesser 39
Teilung 39
Teilung des Hemmungsrads 93
Teilung und Modul 39
Teilung, Hemmungsrad 93
Telemeter 149
Telemeter: Entfernung aus der Laufzeit des Schalls 149
Temperaturausgleich mit zwei Werkstoffen 90
Temperaturfehler, Pendel 89
Temperaturfehler, Unruh 72
Temperaturgang des Stimmgabelquarzes 134
Temperaturkoeffizient 72
Temperaturkoeffizient aus den Werkstoffdaten 72
Temperaturkoeffizient aus der Messung 73
Temperaturkoeffizient in der Chronometerprüfung 123
Temperaturkoeffizient, Chronometerprüfung 123
Temperaturkoeffizient, Messung 73
Thermoelastischer Koeffizient 72
Tragegang 120
Trägheitsmoment des Reifs (dünner Ring) 66
Trägheitsmoment messen 71
Trägheitsmoment messen mit einer Zusatzscheibe 71
Trägheitsmoment um die Aufhängung (Satz von Steiner) 87
Trägheitsmoment von Schrauben und Masselots 67
Trägheitsmoment, Unruh 66
Trennkreis 9
Trennkreis bei günstigster Länge 9
Trieb 29
Trieb, fehlender 43
Triebzahn 43
Trimmer 134
Tropisches Jahr 142

## U

Übergriff 96
Übersetzung 29
Übersetzung eines Eingriffs 29
Übersetzung zwischen Gabel und Unruh 103
Übersetzung, Gabel und Unruh 103
Übersetzungsverhältnis 29
Uhrenbeweger 27
Uhrenverzahnung 41
Umdrehungen des Windfangs je Schlag 51
Umdrehungen je Aufzug 51
Umgänge des Federhauses 7
Umgänge, Federhaus 7
Umgänge, größte Zahl 10
Umkehrpunkt 134
Umlaufzeit 31
Umlaufzeit des Federhauses 17
Umlaufzeit des Federhauses mit Beisatzrad 18
Umlaufzeit, Federhaus 17
Umspannung 96
Umspannung des Ankers 96
Ungerade Zähnezahl 47
Unruh ohne Rücker 68
Unruh, Schwingungsdauer 57
Unruhreif 66
Unruhschrauben 67
Untersetzung des Automatikaufzugs 26
Untersetzung des Zeigerwerks 37
Untersetzung vom Rotor zum Sekundenrad 136
Untersetzung, Quarzwerk 136
Unwucht 69

## V

verlorener Weg 100
Verlust durch den Fall 104
Viertelrohr 37
Vollaufzug 25

## W

Wahre Ortszeit 146
Wahre Sonnenzeit 143
Walze 19
Walzendurchmesser, wirksamer 19
Wälzpunkt 40
Wasserdichtheit 125
Wasserdruck 125
Wassersäule 125
Wattstunde 130
Wechselrad 37
Wechsler 26
Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen 100
Werkstattformel Linsenverstellung 82
Werkstattformel Pendellänge 81
Wiederaufnahme des Gangs 124
Windfang 51
Windungen der abgelaufenen Feder 7
Windungen der aufgezogenen Feder 6
Windungsabstand 62
Windungszahl 62
Winkel der Unruh über der Zeit 59
Winkelgeschwindigkeit, Unruh 59
Wirksame Länge 65
Wirksame Länge für die Sollschlagzahl 65
Wirksamer Walzendurchmesser 19
Wirkungsgrad aus gemessenen Drehmomenten 55
Wirkungsgrad der Hemmung 104
Wirkungsgrad der Zugfeder 16
Wirkungsgrad messen 55
Wirkungsgrad, Hemmung 104
Wirkungsgrad, Räderwerk 54
Wirkungsgrad, Uhrwerk 24
Wirkungsgrad, Zugfeder 16

## Z

Zahndicke 45
Zahndicke des Rades 45
Zähnezahlen zählen 34
Zahnhöhe 44
Zahnlücke 45
Zahnspiel 46
Zeigerstellrad 27
Zeigerstellung 27
Zeigerstellung: Weg des Minutenzeigers 27
Zeigerwerk 37
Zeigerwerk, Achsabstand 38

Zeitgleichung 143
Zeitgleichung aus dem Datum 144
Zeitgleichung, Näherungsformel 144
Zeitwaage, Amplitude 116
Zeitwaage, Gang 113
Zonenzeit 146
Zonenzeit aus der Sonnenuhr 146
Zug 99
Zug: Reibungswinkel als Grenze 99
Zugfeder, Drehmoment 12
Zugfeder, Ersatz 14
Zugfeder, Klingenstärke 13
Zugfeder, Länge 8
Zugfeder, Windungen 6, 7
Zugwinkel 99
Zulagegewicht 84
Zulagegewicht in beliebiger Höhe 85
Zulagegewicht in halber Pendellänge 84
Zulagegewicht, Höhe 85
Zusatzgewicht 84
Zwischenrad 31
Zykloidenverzahnung 41
Zylinder, Durchmesser 109
Zylinderhemmung 109
Zylinderhemmung: Teilung, Zahnlänge und Zylinder 109
Zylinderrad 109