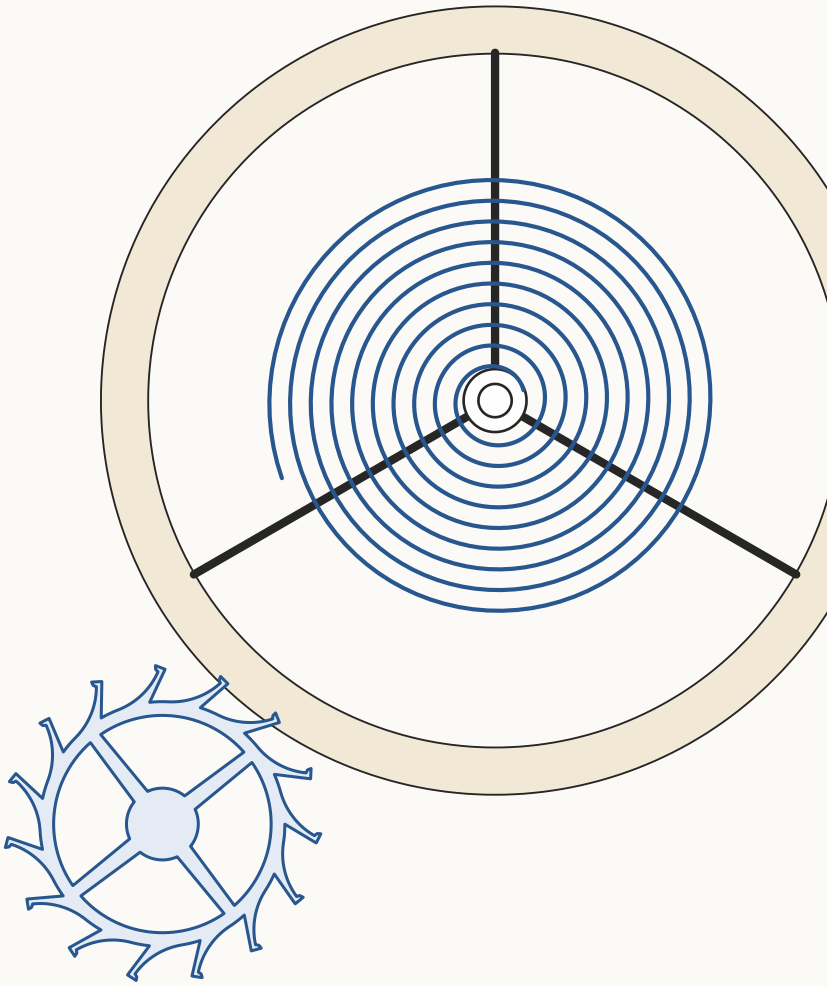
AUSBILDUNG · MEISTERPRÜFUNG · WERKSTATT

Formelsammlung Uhrmacherei

Formeln, Skizzen und durchgerechnete Beispiele für Klein- und Großuhren – mit Mathematik, Mechanik, Fertigung und Statistik



Robin Israel
Uhrmachermeister · R.I.O. Uhrenwerkstätte Oppenheim
Vorsitzender der Hessischen Uhrmacherschule

XL-Ausgabe 2026

So liest man diese Formelsammlung

Jede Formel steht in einer eigenen Karte: oben Name, Nummer und Stufe, darunter die Formel, wo es hilft auch umgestellt, daneben die Tabelle aller Größen mit Einheit. Es folgen in einem Satz die Bedingungen, unter denen die Formel gilt, und ein durchgerechnetes Beispiel mit Zahlen und Einheiten. Formelumstellen setzen wir voraus; umgestellte Formen stehen nur dort, wo man sie in der Werkstatt ständig braucht.

Stufen

GESELLE — Grundwissen für Ausbildung und Gesellenprüfung.

MEISTER — Stoff der Meisterprüfung.

VERTIEFUNG — Hintergrund und Konstruktion; nicht in der Prüfung auszurechnen, aber nützlich, um zu verstehen, was in der Uhr passiert.

Schreibweise

Brüche stehen immer übereinander, nie mit Schrägstrich. Zwischen Faktoren steht ein Malpunkt, Dezimalzahlen haben ein Komma, große Zahlen schmale Lücken: $86\,400$.

Die meisten Formeln sind **Größengleichungen**: Man setzt Zahl und Einheit ein und rechnet die Einheiten mit. Jede passende Einheit ist erlaubt, solange man sauber umrechnet. Wenige Werkstattformeln sind **Zahlenwertgleichungen**; sie tragen den Vermerk „Zahlenwertgleichung“ und gelten nur mit genau den Einheiten aus ihrer Größentabelle.

Formeln mit „≈“ sind Näherungen. Wie weit sie reichen, steht unter „Gilt“.

Gang, Schwingung und Schlag

Der Gang G ist die Abweichung einer Uhr je Tag in Sekunden ($\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$). Plus heißt: Die Uhr geht vor. Minus heißt: Sie geht nach.

Eine **Schwingung** ist hin und zurück, ihre Dauer ist die Schwingungsdauer T, die Frequenz f zählt volle Schwingungen je Sekunde (Hz). Ein **Schlag** ist eine Halbschwingung. Die Schlagzahl n_h zählt Halbschwingungen, bei Kleinuhren je Stunde (A/h): $28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$ sind $4\ \mathrm{Hz}$.

T ist in dieser Sammlung eine Zeit (nur bei den Passungen in Kapitel 9 die Toleranz). Temperaturen heißen ϑ, Temperaturänderungen $\Delta\vartheta$.

Winkel

In Winkelfunktionen ($\sin$, $\cos$, $\tan$) darf ein Winkel in Grad stehen; der Taschenrechner muss dann auf Grad stehen. Steht ein Winkel dagegen als Faktor oder als Potenz in einer Formel, wird er im Bogenmaß eingesetzt: Grad mal $\frac{\pi}{180}$. Die Größentabelle sagt jeweils, welche Form gemeint ist.

Gleiches Zeichen, andere Bedeutung

Die wichtigsten Zeichen bedeuten überall dasselbe. Wo ein Kapitel ein Zeichen anders braucht, etwa A für eine Fläche statt für die Amplitude, steht das in der Kapiteleinleitung und in der Größentabelle der Formel. Die Größentabelle gilt immer.

© 2026 Robin Israel. Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: Weitergabe und Bearbeitung sind kostenlos erlaubt, mit Nennung des Autors, nicht kommerziell und unter denselben Bedingungen. creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0

Inhalt

1 Grundlagen 5
1.1 Einheiten und Umrechnungen 5
1.2 Flächen und Umfang 9
1.3 Körper und Masse 17
1.4 Dreiecke und Koordinaten 22
1.5 Mittelwert und Abweichung 28

2 Mechanik 30
2.1 Bewegung 30
2.2 Kraft, Druck und schiefe Ebene 34
2.3 Hebel und Drehmoment 39
2.4 Arbeit, Energie, Leistung und Wirkungsgrad 41
2.5 Reibung 47
2.6 Trägheitsmoment 50
2.7 Festigkeit und Elastizität 53
2.8 Wärmeausdehnung 62

3 Antrieb 64
3.1 Zugfeder im Federhaus: Geometrie 64
3.2 Drehmoment und Energie der Zugfeder 70
3.3 Gangdauer 75
3.4 Gewichtsantrieb 78
3.5 Schnecke und Kette 80
3.6 Leistung des Antriebs 81
3.7 Aufzug und Zeigerstellung 83

4 Räderwerk und Verzahnung 88
4.1 Übersetzung 88
4.2 Gehwerk berechnen 92
4.3 Zeigerwerk 95
4.4 Verzahnungsgeometrie 97
4.5 Schlagwerk 108
4.6 Kalender und Mondphase 110
4.7 Wirkungsgrad des Räderwerks 113

5 Gangregler: Unruh und Spirale 115
5.1 Schwingung der Unruh 115
5.2 Spiralfeder 118
5.3 Unruh 124
5.4 Reglage aus Soll- und Istwerten 128
5.5 Temperatur 130
5.6 Energie und Güte 133
5.7 Isochronismus 135

6 Pendel 137
6.1 Mathematisches Pendel 137
6.2 Regulieren über die Pendellänge 140
6.3 Physikalisches Pendel 144
6.4 Ausschlag und Kreisfehler 146
6.5 Temperatur und Aufstellort 147

7 Hemmungen 151
7.1 Grundgrößen aller Hemmungen 151
7.2 Schweizer Ankerhemmung: Geometrie 154
7.3 Kraft und Energie 162
7.4 Die Hemmung an der Zeitwaage 164
7.5 Hemmungen der Großuhr 165
7.6 Weitere Hemmungen 167

8 Gangkontrolle und Messen 169
8.1 Stand und Gang 169
8.2 Zeitwaage 172
8.3 Lagen und Kennzahlen 177
8.4 Chronometerprüfung 181
8.5 Wasserdichtheit und Druck 183
8.6 Magnetismus und Stoß 185
8.7 Ablesefehler und Streuung 186

9 Fertigung und Werkstoffe 188
9.1 Schnittdaten 188
9.2 Kegel und Neigung 192
9.3 Gewinde 194
9.4 Passungen und Toleranzen 197
9.5 Teilen 202
9.6 Biegen und Zuschnitt 205
9.7 Edelmetalle 206
9.8 Härte und Wärmebehandlung 210
9.9 Galvanik 212

10 Elektrotechnik, Quarz und Batterie 215
10.1 Grundgrößen des Stromkreises 215
10.2 Schaltungen von Widerständen, Batterie unter Last 219
10.3 Kondensator und Spule 222
10.4 Batterie 226
10.5 Quarz und Frequenzteiler 229
10.6 Schrittmotor 232
10.7 Messen an der Quarzuhr 234

11 Zeit und Kalender 236
11.1 Tag und Jahr 236
11.2 Kalender 238
11.3 Zeitgleichung 240
11.4 Ortszeit und Zonenzeit 242
11.5 Mondphase 243
11.6 Skalen am Chronographen 244

12 Qualität und Statistik 249
12.1 Messreihen 249
12.2 Fähigkeit von Maschine und Prozess 251
12.3 Fehler und Risiko 253
12.4 Messmittel und Messbedingungen 256

Formelzeichen 258

Stichwortverzeichnis 271

1 Grundlagen

Dieses Kapitel sammelt das Rechenwerkzeug, auf das alle anderen Kapitel zurückgreifen: Einheiten, Flächen, Körper und das Rechnen im Dreieck. Die Formeln sind Schulstoff. Neu ist nur, wo sie in der Uhr und an der Werkbank vorkommen.

Die Formelzeichen folgen der Geometrie: A ist hier eine Fläche, s eine Sehne oder Schlüsselweite, m eine Masse, D ein Außendurchmesser, α ein Winkel und n eine Anzahl. In den späteren Kapiteln tragen einige dieser Buchstaben andere Bedeutungen; maßgeblich ist immer die Größentabelle neben der Formel.

1.1 Einheiten und Umrechnungen

Wir rechnen im Internationalen Einheitensystem (SI). Die Uhrmacherei hat daneben eigene Einheiten behalten: die Linie für Werkgrößen, Sekunden je Tag für den Gang und Halbschwingungen je Stunde für die Schlagzahl. Feingehalt und Karat der Edelmetalle stehen in Kapitel 9.

Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile

Vorsatz	Zeichen	Faktor	Beispiel aus der Werkstatt
Giga	G	10^{9}	E-Modul von Stahl: 210 GPa
Mega	M	10^{6}	Zugfestigkeit einer Zugfeder: 2000 MPa
Kilo	k	10^{3}	Uhrenquarz: 32,768 kHz
Dezi	d	10^{-1}	1 dm = 100 mm
Zenti	c	10^{-2}	Trägheitsmoment einer Unruh: 10 mg·cm²
Milli	m	10^{-3}	Zapfendurchmesser: 0,1 mm
Mikro	µ	10^{-6}	Zapfenluft: 10 µm; Stromaufnahme eines Quarzwerks: 1 µA
Nano	n	10^{-9}	Schichtdicke einer Entspiegelung: 100 nm

Ein Hundertstelmillimeter sind 10 µm, ein Tausendstelmillimeter ist 1 µm.

Längeneinheiten der Uhrmacherei

Einheit	Zeichen	Umrechnung
Pariser Linie	‴	2,2558 mm
Zwölftellinie (Douzième)		0,188 mm
Pariser Zoll (12 Linien)		27,07 mm
Zoll (Inch)	″ oder in	25,4 mm (genau)
Mikrometer	µm	0,001 mm

Die Linie dient heute fast nur noch als Größenangabe für Uhrwerke. Der englische Zoll kommt bei Gewinden, Großuhren und Maschinen vor.

Linien in Millimeter

(1.1) GESELLE

$$d = N_\mathrm{L} \cdot 2{,}2558\,\mathrm{mm}$$

UMGESTELLT $$N_\mathrm{L} = \frac{d}{2{,}2558\,\mathrm{mm}}$$

d	Durchmesser (oder eine andere Länge)	mm
N_L	Linienzahl (Maß in Linien, reine Zahl)	1

Werkgrößen werden bis heute in Pariser Linien genannt, geschrieben mit drei Strichen: 11½‴. Eine Linie ist der zwölfte Teil des alten Pariser Zolls.

Gilt: immer; 1 Linie = 2,2558 mm.

Aber Vorsicht: Die Linienangabe eines Kalibers ist eine Größenklasse, kein Fertigungsmaß. Der wirkliche Werkdurchmesser weicht oft um einige Zehntelmillimeter ab. Für Werkhalter und Gehäuse gilt das Maß aus dem technischen Datenblatt.

BEISPIEL Ein Uhrwerk wird als 11½-liniges Werk bezeichnet. Wie groß ist es in Millimetern?

Gegeben: $N_\mathrm{L} = 11{,}5$

$$\begin{aligned} d &= N_\mathrm{L} \cdot 2{,}2558\,\mathrm{mm} \\ &= 11{,}5 \cdot 2{,}2558\,\mathrm{mm} \\ &\approx 25{,}9\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 25,9 mm. Das ist die Größenklasse der meisten Herrenarmbanduhren mit Automatikwerk.

Minuten und Sekunden als Dezimalwert

(1.2) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$t = t_\mathrm{h} + \frac{t_\mathrm{min}}{60} + \frac{t_\mathrm{s}}{3600}$$

t	Zeit (als Dezimalzahl in Stunden)	h
t_h	volle Stunden	h
t_min	Minuten	min
t_s	Sekunden	s

Zum Rechnen brauchen wir Zeiten als Dezimalzahl. Genauso werden Winkel umgerechnet: Grad, Winkelminuten und Winkelsekunden statt Stunden, Minuten und Sekunden, zum Beispiel 12° 30′ = 12,5°.

Gilt: Zahlenwerte in den angegebenen Einheiten; eine Stunde hat 60 Minuten, eine Minute 60 Sekunden.

BEISPIEL Eine Uhr läuft nach dem Vollaufzug 43 h 24 min 36 s. Wie groß ist die Gangdauer als Dezimalzahl?

Gegeben: $t_\mathrm{h} = 43\,\mathrm{h}$; $t_\mathrm{min} = 24\,\mathrm{min}$; $t_\mathrm{s} = 36\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} t &= t_\mathrm{h} + \frac{t_\mathrm{min}}{60} + \frac{t_\mathrm{s}}{3600} \\ &= 43 + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600} \\ &= 43{,}41\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

43,41 h. Mit diesem Wert lässt sich weiterrechnen, zum Beispiel beim Vergleich mit der Sollgangdauer.

Gang, Prozent und ppm

Angabe	entspricht	Anmerkung
1 Tag	24 h = 1440 min = 86 400 s	
1 s am Tag	11,57 ppm = 0,001 157 %	sehr gute mechanische Uhr
1 ppm	0,0864 s am Tag	rund 2,6 s im Monat, 31,5 s im Jahr
1 ‰	86,4 s am Tag	
1 %	864 s am Tag	14,4 min am Tag

ppm heißt „Teile je Million“ (parts per million), also 10^{-6}. Die Angabe ist bei Quarzuhren üblich.

Gang als relative Abweichung

(1.3) GESELLE

$$x = \frac{G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$$

UMGESTELLT $G = x \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

x	relative Abweichung (als Zahl, in % oder in ppm)	ppm
G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

Der Gang in Sekunden je Tag ist ein Verhältnis zweier Zeiten. Teilt man durch die 86 400 Sekunden des Tages, erhält man die relative Abweichung. So lassen sich mechanische Uhren, Quarzuhren und Bauteiltoleranzen vergleichen.

Gilt: immer; das Vorzeichen bleibt erhalten.

BEISPIEL Eine mechanische Armbanduhr geht am Tag 6 s vor. Wie groß ist die relative Abweichung?

Gegeben: $G = 6\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$x = \frac{G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} = \frac{6\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \approx 69{,}4\,\mathrm{ppm}$$

Rund 69 ppm oder 0,007 %. Die Uhr misst die Zeit auf sieben Hunderttausendstel genau.

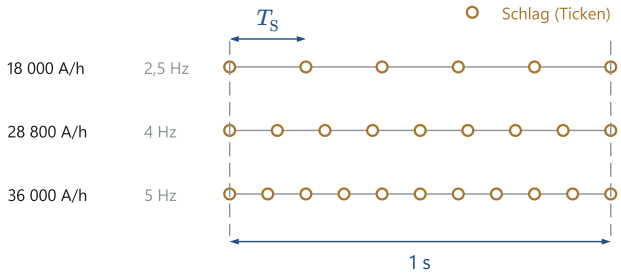
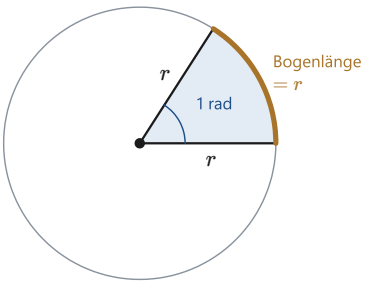


Abb. 1.1 Schläge in einer Sekunde: Je höher die Schlagzahl, desto kürzer die Schlagdauer T_S



Vollkreis: 360° = 2π rad

Abb. 1.2 Bogenmaß: Beim Winkel 1 rad, das sind rund 57,3°, ist der Bogen so lang wie der Radius

Grad in Bogenmaß

(1.4) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}$$

UMGESTELLT $\alpha = \frac{180 \cdot \widehat{\alpha}}{\pi}$

$\widehat{\alpha}$	Winkel (im Bogenmaß)	rad
α	Winkel (in Grad)	$^\circ$

Das Bogenmaß gibt an, wie lang der Bogen im Verhältnis zum Radius ist. Der Vollkreis hat $2\pi\,\mathrm{rad}$, also ist $1\,\mathrm{rad} \approx 57{,}3^\circ$. Steht ein Winkel in einer Formel als Faktor, gehört er im Bogenmaß hinein.

Gilt: Zahlenwerte: α in Grad als Dezimalzahl, Ergebnis in Radiant.

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 270° Amplitude. Wie groß ist dieser Winkel im Bogenmaß?

Gegeben: $\alpha = 270^\circ$

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha} &= \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \\ &= \frac{\pi \cdot 270}{180} \\ &\approx 4{,}71\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Rund 4,71 rad, das sind drei Viertel einer Umdrehung.

Schlagzahl und Frequenz

(1.5) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot f$$

UMGESTELLT $f = \frac{n_\mathrm{h}}{2}$

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
f	Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde)	Hz

Die Frequenz zählt volle Schwingungen, die Schlagzahl zählt Halbschwingungen. Jede volle Schwingung besteht aus zwei Schlägen. Bei Kleinuhren wird die Schlagzahl in Halbschwingungen je Stunde (A/h) angegeben.

Gilt: immer; von Schlägen je Sekunde auf A/h mit 3600 malnehmen.

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 4 Hz. Wie groß ist die Schlagzahl?

Gegeben: $f = 4\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned}n_\mathrm{h} &= 2 \cdot f \\ &= 2 \cdot 4\,\mathrm{Hz} \\ &= 8\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &= 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

28 800 Halbschwingungen je Stunde, das sind 8 Schläge je Sekunde.

Schlagdauer

(1.6) GESELLE

$$T_\mathrm{S} = \frac{1}{n_\mathrm{h}}$$

T_S	Schlagdauer (Dauer einer Halbschwingung)	s
n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

Die Schlagdauer ist die Zeit von einem Ticken zum nächsten. Die Schwingungsdauer T einer vollen Schwingung ist doppelt so lang.

Gilt: immer; n_h in Schlägen je Sekunde einsetzen, wenn T_S in Sekunden herauskommen soll.

BEISPIEL Wie lange dauert ein Schlag bei 28 800 A/h?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

$$\begin{aligned} T_\mathrm{S} &= \frac{1}{n_\mathrm{h}} \\ &= \frac{1}{28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}} \\ &= \frac{3600\,\mathrm{s}}{28\,800} \\ &= 0{,}125\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Eine Achtelsekunde. Der Sekundenzeiger macht darum acht kleine Schritte je Sekunde.

Übliche Schlagzahlen von Kleinuhren

Schlagzahl n_h in A/h	Frequenz f in Hz	Schläge je Sekunde	Schlagdauer T_S in s	Vorkommen
18 000	2,5	5	0,2	Taschenuhren, ältere Armbanduhren
19 800	2,75	5,5	0,1818	einzelne ältere Kaliber
21 600	3	6	0,1667	viele Handaufzugs- und Automatikwerke
25 200	3,5	7	0,1429	einzelne Kaliber
28 800	4	8	0,125	heute die häufigste Schlagzahl
36 000	5	10	0,1	Schnellschwinger

A steht für Alternanz, das ist die Halbschwingung.

1.2 Flächen und Umfang

Flächen brauchen wir für Querschnitte, Druckkräfte und als Grundfläche von Körpern. In der Werkstatt wird der Durchmesser gemessen, nicht der Radius; die Formeln stehen deshalb mit d.

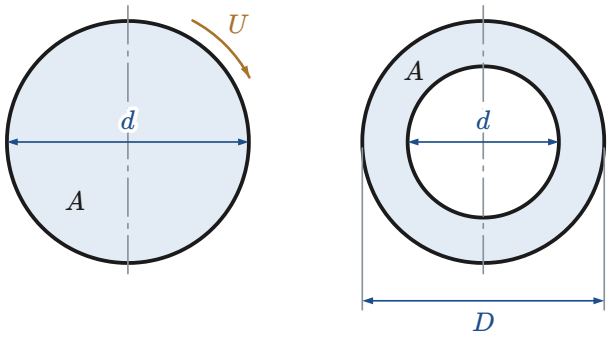


Abb. 1.3 Kreis mit Durchmesser d, Umfang U und Fläche A; Kreisring mit Außendurchmesser D und Innendurchmesser d

Kreisumfang

(1.7) GESELLE

$$U = \pi \cdot d$$

U	Umfang	mm
d	Durchmesser	mm

Der Umfang ist das π-Fache des Durchmessers, also gut dreimal so lang.

Gilt: immer.

BEISPIEL Ein Unruhreif hat außen 10 mm Durchmesser. Welchen Weg legt ein Punkt am Reif bei einer vollen Umdrehung zurück?

Gegeben: $d = 10\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} U &= \pi \cdot d \\ &= \pi \cdot 10\,\mathrm{mm} \\ &\approx 31{,}4\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 31,4 mm. Bei 270° Amplitude sind es je Halbschwingung zweimal drei Viertel davon, also rund 47 mm.

Kreisfläche

(1.8) GESELLE

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

A	Fläche	mm^2
d	Durchmesser	mm

UMGESTELLT $d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$

Die Fläche wächst mit dem Quadrat des Durchmessers: doppelter Durchmesser, vierfache Fläche.

Gilt: immer.

BEISPIEL Ein Uhrglas hat 30 mm Durchmesser. Wie groß ist seine Fläche?

Gegeben: $d = 30\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \\ &= \frac{\pi \cdot (30\,\mathrm{mm})^2}{4} \\ &\approx 707\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

Rund 707 mm². Bei 10 bar Prüfdruck, das ist $1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, lasten auf dem Glas rund 707 N.

Kreisring

(1.9) GESELLE

$$A = \frac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4}$$

A	Fläche	mm^2
D	Durchmesser (außen)	mm
d	Durchmesser (innen)	mm

Der Kreisring ist die große Kreisfläche ohne die kleine. So rechnet man den Querschnitt von Rohren, Buchsen, Dichtungen und Reifen.

Gilt: beide Kreise haben denselben Mittelpunkt.

BEISPIEL Ein Unruhreif misst außen 10 mm und innen 8,4 mm. Wie groß ist seine Stirnfläche?

Gegeben: $D = 10\,\mathrm{mm}$; $d = 8{,}4\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4} \\ &= \frac{\pi \cdot \left((10\,\mathrm{mm})^2 - (8{,}4\,\mathrm{mm})^2\right)}{4} \\ &\approx 23{,}1\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

Rund 23,1 mm². Mit der Reifhöhe wird daraus das Volumen, siehe Abschnitt 1.3.

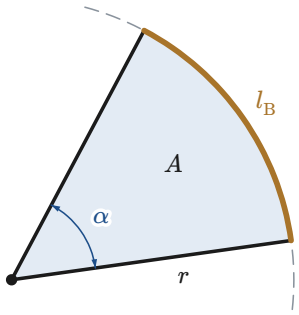


Abb. 1.4 Kreisausschnitt: Mittelpunktswinkel α, Bogenlänge l_B, Radius r (halber Durchmesser d)

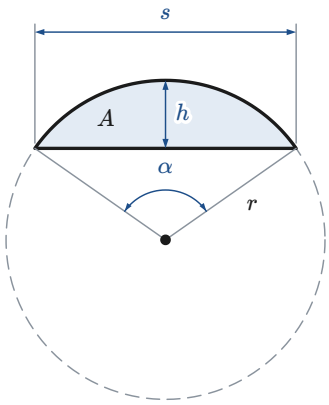


Abb. 1.5 Kreisabschnitt: Sehne s, Bogenhöhe h, Mittelpunktswinkel α, Radius r (halber Durchmesser d)

Bogenlänge

(1.10) GESELLE

$$l_{\mathrm{B}} = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$$

l_{B}	Bogenlänge	mm
d	Durchmesser	mm
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$

Der Bogen ist der Teil des Umfangs, der zum Winkel α gehört. Mit dem Winkel im Bogenmaß schreibt sich das kürzer: Bogenlänge gleich Radius mal Winkel.

Gilt: immer; α in Grad.

BEISPIEL Auf einem Zifferblatt liegt die Minuterie auf einem Kreis von 30 mm Durchmesser. Wie weit sind zwei Minutenstriche auseinander? Eine Minute entspricht 6°.

Gegeben: $d = 30\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 6^\circ$

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{B}} &= \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ} \\ &= \frac{\pi \cdot 30\,\mathrm{mm} \cdot 6^\circ}{360^\circ} \\ &\approx 1{,}57\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 1,57 mm von Strich zu Strich.

Kreisausschnitt (Sektor)

(1.11) GESELLE

$$A = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ}$$

A	Fläche	mm^2
d	Durchmesser	mm
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$

Der Kreisausschnitt ist das Tortenstück. Seine Fläche ist der Anteil des Winkels am Vollkreis mal Kreisfläche.

Gilt: immer; α in Grad.

BEISPIEL Die Schwungmasse eines Automatikwerks ist ein Kreisausschnitt mit 28 mm Durchmesser und 150° Öffnungswinkel. Wie groß ist die Fläche?

Gegeben: $d = 28\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 150^\circ$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ} \\ &= \frac{\pi \cdot (28\,\mathrm{mm})^2 \cdot 150^\circ}{4 \cdot 360^\circ} \\ &\approx 257\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

Rund 257 mm², das sind fünf Zwölftel der vollen Kreisfläche.

Sehne

(1.12) GESELLE

$$s = d \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

s	Sehne (gerade Verbindung zweier Kreispunkte)	mm
d	Durchmesser	mm
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$

Die Sehne ist der gerade Abstand zweier Punkte auf dem Kreis, also das Maß, das der Messschieber zeigt. Der Bogen dazwischen ist immer etwas länger.

Gilt: immer; α ist der Winkel zwischen den beiden Radien.

BEISPIEL Ein Hemmungsrad hat 4,8 mm Durchmesser und 15 Zähne, die Teilung beträgt also 24°. Wie weit sind zwei benachbarte Zahnspitzen voneinander entfernt?

Gegeben: $d = 4{,}8\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 24^\circ$

$$\begin{aligned} s &= d \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 4{,}8\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{24^\circ}{2}\right) \\ &\approx 1{,}00\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 1,00 mm von Spitze zu Spitze.

Bogenhöhe

(1.13) GESELLE

$$h = \frac{d}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

h	Bogenhöhe (größter Abstand zwischen Sehne und Bogen)	mm
d	Durchmesser	mm
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$

Die Bogenhöhe sagt, wie weit der Bogen über der Sehne steht. Beim Anflachen einer Welle ist sie die Tiefe, die abgenommen wird.

Gilt: α bis 180°.

BEISPIEL Eine Welle von 3 mm Durchmesser wird angeflacht. Die Fläche soll einen Mittelpunktswinkel von 90° überspannen. Wie tief wird abgenommen?

Gegeben: $d = 3\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 90^\circ$

$$\begin{aligned} h &= \frac{d}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= \frac{3\,\mathrm{mm}}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\right) \\ &\approx 0{,}44\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 0,44 mm. Die Fläche wird dabei 2,12 mm breit, siehe Formel (1.12).

Radius aus Sehne und Bogenhöhe

(1.14) MEISTER

$$r = \frac{s^2}{8 \cdot h} + \frac{h}{2}$$

r	Radius (des Bogens)	mm
s	Sehne (gerade Verbindung zweier Kreispunkte)	mm
h	Bogenhöhe (größter Abstand zwischen Sehne und Bogen)	mm

Von einem Bogen lassen sich Sehne und Höhe leicht messen, der Radius nicht. Mit dieser Formel bestimmt man den Wölbungsradius eines Glases oder eines gewölbten Zifferblatts.

Gilt: immer; folgt aus dem Satz des Pythagoras.

BEISPIEL Ein gewölbtes Uhrglas hat 30 mm Durchmesser und ist in der Mitte 1,9 mm höher als am Rand. Wie groß ist der Wölbungsradius?

Gegeben: $s = 30\,\mathrm{mm}$; $h = 1{,}9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{s^2}{8 \cdot h} + \frac{h}{2} \\ &= \frac{(30\,\mathrm{mm})^2}{8 \cdot 1{,}9\,\mathrm{mm}} + \frac{1{,}9\,\mathrm{mm}}{2} \\ &\approx 60{,}2\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 60 mm. Der Durchmesser des Glases ist hier die Sehne.

Kreisabschnitt (Segment)

(1.15) MEISTER

$$A = \frac{d^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

A	Fläche	mm^2
d	Durchmesser	mm
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$

Der Kreisabschnitt ist die Fläche zwischen Sehne und Bogen: Kreisausschnitt ohne das Dreieck aus den beiden Radien und der Sehne.

Gilt: α in Grad, bis 360°.

BEISPIEL Von der Welle mit 3 mm Durchmesser wird ein Abschnitt mit 90° Mittelpunktswinkel abgenommen. Wie viel Querschnitt geht verloren?

Gegeben: $d = 3\,\mathrm{mm}$; $\alpha = 90^\circ$

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{(3\,\mathrm{mm})^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} - \sin\left(90^\circ\right) \right) \\ &\approx 0{,}64\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

Rund 0,64 mm², das sind 9 % des vollen Querschnitts von 7,07 mm².

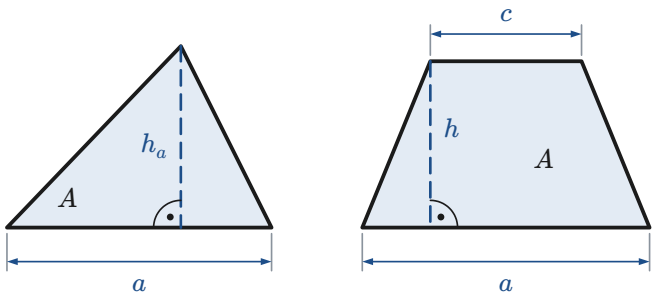


Abb. 1.6 Dreieck mit Grundseite a und Höhe h_a; Trapez mit den parallelen Seiten a und c und der Höhe h

Dreieck

(1.16) GESELLE

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Jedes Dreieck ist ein halbes Rechteck aus Grundseite und Höhe. Welche Seite als Grundseite dient, ist frei; die Höhe muss senkrecht auf ihr stehen.

Gilt: immer.

A	Fläche	mm^2
a	Seite (Grundseite)	mm
h_a	Höhe (senkrecht auf der Grundseite)	mm

BEISPIEL Ein dreieckiger Stundenindex ist an der Basis 2,4 mm breit und 5 mm hoch. Wie groß ist seine Fläche?

Gegeben: $a = 2{,}4\,\mathrm{mm}$; $h_a = 5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \cdot h_a}{2} \\ &= \frac{2{,}4\,\mathrm{mm} \cdot 5\,\mathrm{mm}}{2} \\ &= 6{,}0\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

6 mm². So viel Fläche ist zum Beispiel mit Leuchtmasse zu belegen.

Trapez

(1.17) GESELLE

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

Das Trapez hat die Fläche eines Rechtecks mit der mittleren Breite. Sind die beiden parallelen Seiten gleich lang, bleibt Seite mal Höhe: die Fläche von Rechteck und Parallelogramm.

Gilt: zwei Seiten sind parallel.

A	Fläche	mm^2
a	Seite (erste der beiden parallelen)	mm
c	Seite (zweite der beiden parallelen)	mm
h	Höhe (Abstand der parallelen Seiten)	mm

BEISPIEL Ein Zeiger verjüngt sich auf 14 mm Länge von 3 mm auf 1,2 mm Breite. Wie groß ist seine Fläche?

Gegeben: $a = 3\,\mathrm{mm}$; $c = 1{,}2\,\mathrm{mm}$; $h = 14\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{a + c}{2} \cdot h \\ &= \frac{3\,\mathrm{mm} + 1{,}2\,\mathrm{mm}}{2} \cdot 14\,\mathrm{mm} \\ &= 29{,}4\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

29,4 mm². Mit Dicke und Dichte ergibt sich daraus die Masse des Zeigers, siehe Abschnitt 1.3.

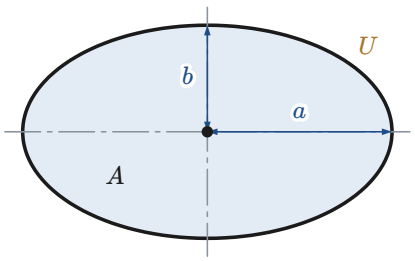


Abb. 1.7 Ellipse mit den Halbachsen a und b

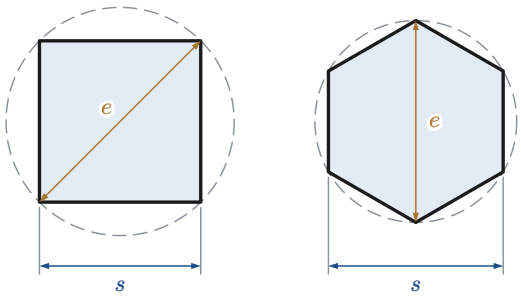


Abb. 1.8 Vierkant und Sechskant: Schlüsselweite s, Eckmaß e

Ellipse: Fläche

(1.18) GESELLE

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

Die Ellipse ist ein gestreckter Kreis. Sind beide Halbachsen gleich, wird daraus die Kreisfläche.

Gilt: immer; a und b sind die halben Außenmaße.

A	Fläche	mm^2
a	Halbachse (große, halbe Länge)	mm
b	Halbachse (kleine, halbe Breite)	mm

BEISPIEL Ein ovales Uhrglas misst 22 mm × 18 mm. Wie groß ist seine Fläche?

Gegeben: $a = 11\,\mathrm{mm}; \quad b = 9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot a \cdot b \\ &= \pi \cdot 11\,\mathrm{mm} \cdot 9\,\mathrm{mm} \\ &\approx 311\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned}$$

Rund 311 mm². Die Halbachsen sind die halben Außenmaße, also 11 mm und 9 mm.

Ellipse: Umfang

(1.19) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$U \approx \pi \cdot \left(3 \cdot (a+b) - \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)}\right)$$

Für den Umfang der Ellipse gibt es keine einfache geschlossene Formel. Diese Näherung reicht für jede Werkstattaufgabe, zum Beispiel für die Länge einer Dichtung oder eines Glasreifs.

Gilt: Näherung; der Fehler bleibt unter 0,01 %, solange die Ellipse höchstens dreimal so lang wie breit ist.

U	Umfang	mm
a	Halbachse (große)	mm
b	Halbachse (kleine)	mm

BEISPIEL Wie lang ist die Dichtung für das ovale Glas mit 22 mm × 18 mm?

Gegeben: $a = 11\,\mathrm{mm}; \quad b = 9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} U &\approx \pi \cdot \left(3 \cdot (a+b) - \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)}\right) \\ &= \pi \cdot \left(3 \cdot (11\,\mathrm{mm} + 9\,\mathrm{mm}) - \sqrt{(3 \cdot 11\,\mathrm{mm} + 9\,\mathrm{mm}) \cdot (11\,\mathrm{mm} + 3 \cdot 9\,\mathrm{mm})}\right) \\ &\approx 63{,}0\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 63 mm. Ein Kreis mit dem mittleren Durchmesser 20 mm hätte 62,8 mm Umfang.

Vierkant: Eckmaß

(1.20) GESELLE

$$e = \sqrt{2} \cdot s$$

UMGESTELLT $s = \dfrac{e}{\sqrt{2}}$

e	Eckmaß (über die Ecken gemessen)	mm
s	Schlüsselweite (über die Flächen gemessen)	mm

Das Eckmaß ist die Diagonale des Quadrats. Es sagt, aus welchem Rundmaterial ein Vierkant mindestens gefeilt oder gefräst werden muss. Die Fläche des Vierkants ist s^2.

Gilt: scharfkantiger Vierkant. In der Praxis sind die Ecken oft gebrochen, dann genügt etwas weniger.

BEISPIEL Die Aufzugwelle einer Großuhr soll einen Vierkant mit 4 mm Schlüsselweite bekommen. Welchen Durchmesser muss die Welle mindestens haben?

Gegeben: $s = 4\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{2} \cdot s \\ &= \sqrt{2} \cdot 4\,\mathrm{mm} \\ &\approx 5{,}66\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Mindestens 5,66 mm, wenn die Ecken voll ausgebildet sein sollen.

Sechskant: Eckmaß

(1.21) GESELLE

$$e = \frac{2 \cdot s}{\sqrt{3}}$$

UMGESTELLT $s = \dfrac{\sqrt{3} \cdot e}{2}$

e	Eckmaß (über die Ecken gemessen)	mm
s	Schlüsselweite (über die Flächen gemessen)	mm

Beim Sechskant ist das Eckmaß rund 15,5 % größer als die Schlüsselweite. Die Fläche des Sechskants ist $0{,}866 \cdot s^2$.

Gilt: regelmäßiger, scharfkantiger Sechskant.

BEISPIEL Eine Sechskantmutter hat die Schlüsselweite 5,5 mm. Welchen Durchmesser braucht das Rundmaterial mindestens?

Gegeben: $s = 5{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} e &= \frac{2 \cdot s}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2 \cdot 5{,}5\,\mathrm{mm}}{\sqrt{3}} \\ &\approx 6{,}35\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Mindestens 6,35 mm.

Merksatz: Doppelter Durchmesser heißt doppelter Umfang, aber vierfache Fläche.

1.3 Körper und Masse

Aus dem Volumen und der Dichte des Werkstoffs folgt die Masse eines Teils. Das brauchen wir für Unruhreife, Pendellinsen, Gewichte und für den Materialbedarf bei Edelmetall.

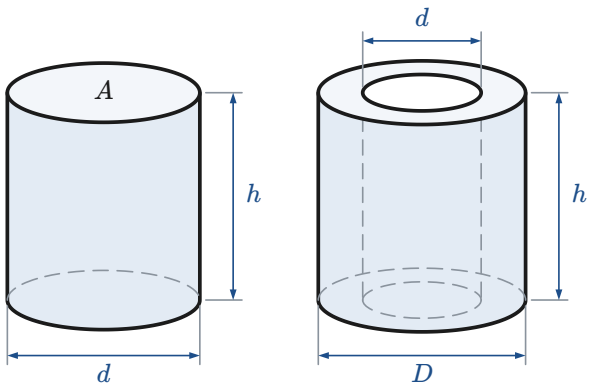


Abb. 1.9 Zylinder und Hohlzylinder; die Grundfläche A mal Höhe h ergibt das Volumen

Prisma: Körper mit gleichbleibendem Querschnitt

(1.22) GESELLE

$$V = A \cdot h$$

Jeder Körper, dessen Querschnitt über die ganze Höhe gleich bleibt, hat das Volumen Grundfläche mal Höhe: Stangen, Bleche, Profile. Die Grundfläche kommt aus Abschnitt 1.2.

Gilt: Querschnitt überall gleich, Höhe senkrecht zur Grundfläche.

V	Volumen	mm^3
A	Fläche (Grundfläche, Querschnitt des Körpers)	mm^2
h	Höhe (senkrecht zur Grundfläche)	mm

BEISPIEL Von einer Sechskantstange mit 5 mm Schlüsselweite (Querschnitt 21,65 mm²) wird ein Stück von 20 mm Länge abgestochen. Wie groß ist sein Volumen?

Gegeben: $A = 21{,}65\,\mathrm{mm}^2$; $h = 20\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h \\ &= 21{,}65\,\mathrm{mm}^2 \cdot 20\,\mathrm{mm} \\ &= 433\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

433 mm³, also 0,433 cm³.

Zylinder

(1.23) GESELLE

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

Der Zylinder ist das Prisma mit Kreisfläche: Wellen, Stifte, Rondelle, Scheiben.

Gilt: gerader Kreiszylinder.

V	Volumen	mm^3
d	Durchmesser	mm
h	Höhe (senkrecht zur Grundfläche)	mm

BEISPIEL Ein Messingrondell hat 30 mm Durchmesser und ist 2 mm dick. Wie groß ist sein Volumen?

Gegeben: $d = 30\,\mathrm{mm}$; $h = 2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \\ &= \frac{\pi \cdot (30\,\mathrm{mm})^2}{4} \cdot 2\,\mathrm{mm} \\ &\approx 1414\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

Rund 1414 mm³ oder 1,414 cm³.

Hohlzylinder

(1.24) GESELLE

$$V = \frac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4} \cdot h$$

V	Volumen	mm^3
D	Durchmesser (außen)	mm
d	Durchmesser (innen)	mm
h	Höhe (senkrecht zur Grundfläche)	mm

Kreisring mal Höhe: Rohre, Buchsen, Ringe und der Reif einer Unruh.

Gilt: gerader Hohlzylinder, Bohrung in der Mitte.

BEISPIEL Ein Unruhreif misst außen 10 mm, innen 8,4 mm und ist 0,8 mm hoch. Wie groß ist sein Volumen?

Gegeben: $D = 10\,\mathrm{mm}$; $d = 8{,}4\,\mathrm{mm}$; $h = 0{,}8\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4} \cdot h \\ &= \frac{\pi \cdot \left((10\,\mathrm{mm})^2 - (8{,}4\,\mathrm{mm})^2\right)}{4} \cdot 0{,}8\,\mathrm{mm} \\ &\approx 18{,}5\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

Rund 18,5 mm³. Aus Berylliumbronze wiegt dieser Reif etwa 0,15 g.

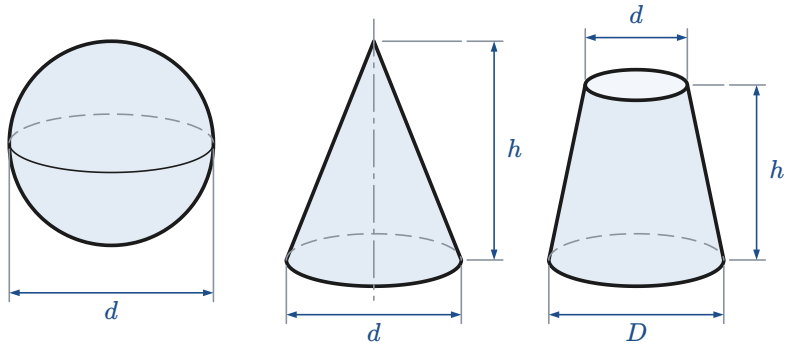


Abb. 1.10 Kugel, Kegel und Kegelstumpf

Kugel

(1.25) GESELLE

$$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$$

V	Volumen	mm^3
d	Durchmesser	mm

Die Kugel füllt gut die Hälfte des Würfels, in den sie gerade hineinpasst. Ihre Oberfläche ist $\pi \cdot d^2$.

Gilt: immer.

BEISPIEL Eine Stahlkugel hat 2 mm Durchmesser. Wie groß ist ihr Volumen?

Gegeben: $d = 2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot d^3}{6} \\ &= \frac{\pi \cdot (2\,\mathrm{mm})^3}{6} \\ &\approx 4{,}19\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

Rund 4,19 mm³; die Kugel wiegt damit etwa 33 mg.

Kegel

(1.26) GESELLE

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{12}$$

Der Kegel hat ein Drittel des Volumens des Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe. Dasselbe gilt für die Pyramide gegenüber dem Prisma.

Gilt: Höhe senkrecht zur Grundfläche gemessen.

V	Volumen	mm^3
d	Durchmesser (der Grundfläche)	mm
h	Höhe (senkrecht zur Grundfläche)	mm

BEISPIEL Eine Körnerspitze mit 60° hat an der Basis 3 mm Durchmesser und ist 2,6 mm hoch. Wie groß ist das Volumen der Spitze?

Gegeben: $d = 3\,\mathrm{mm}$; $h = 2{,}6\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{12} \\ &= \frac{\pi \cdot (3\,\mathrm{mm})^2 \cdot 2{,}6\,\mathrm{mm}}{12} \\ &\approx 6{,}13\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

Rund 6,13 mm³. Der Zylinder mit gleichen Maßen hätte das Dreifache.

Kegelstumpf

(1.27) GESELLE

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot \left(D^2 + D \cdot d + d^2\right)}{12}$$

Der Kegelstumpf ist ein Kegel ohne Spitze: kegelige Stifte, Reibahlen, konische Gehäuseteile. Mit $d = 0$ wird daraus der Kegel, mit $d = D$ der Zylinder.

Gilt: gerader Kegelstumpf, Deckfläche parallel zur Grundfläche.

V	Volumen	mm^3
h	Höhe (senkrecht zur Grundfläche)	mm
D	Durchmesser (am großen Ende)	mm
d	Durchmesser (am kleinen Ende)	mm

BEISPIEL Ein kegeliger Messingstopfen ist 10 mm lang und verjüngt sich von 6 mm auf 4 mm Durchmesser. Wie groß ist sein Volumen?

Gegeben: $h = 10\,\mathrm{mm}$; $D = 6\,\mathrm{mm}$; $d = 4\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot h \cdot \left(D^2 + D \cdot d + d^2\right)}{12} \\ &= \frac{\pi \cdot 10\,\mathrm{mm} \cdot \left((6\,\mathrm{mm})^2 + 6\,\mathrm{mm} \cdot 4\,\mathrm{mm} + (4\,\mathrm{mm})^2\right)}{12} \\ &\approx 199\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

Rund 199 mm³. Die Rechnung mit dem mittleren Durchmesser 5 mm als Zylinder ergäbe 196 mm³, also etwas zu wenig.

Masse aus Volumen und Dichte

(1.28) GESELLE

$$m = \varrho \cdot V$$

UMGESTELLT $\varrho = \dfrac{m}{V}$

m	Masse	g
ϱ	Dichte (des Werkstoffs)	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
V	Volumen	cm^3

Die Dichte sagt, wie viel Masse in einem Kubikzentimeter steckt. Umgestellt dient die Formel dazu, einen Werkstoff über Wiegen und Messen zu bestimmen.

Gilt: massives Teil ohne Hohlräume, einheitlicher Werkstoff. $1\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{mm}^3$.

BEISPIEL Das Messingrondell aus Formel (1.23) hat 1414 mm³ Volumen, das sind 1,414 cm³. Wie schwer ist es bei einer Dichte von $8{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$?

Gegeben: $\varrho = 8{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$; $\quad V = 1{,}414\,\mathrm{cm}^3$

$$\begin{aligned} m &= \varrho \cdot V \\ &= 8{,}5\ \tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 1{,}414\,\mathrm{cm}^3 \\ &\approx 12{,}0\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Rund 12 g. Aus Gold 750 wöge dasselbe Rondell etwa 22 g.

Dichte der Uhrmacher-Werkstoffe (Richtwerte bei 20 °C)

Werkstoff	ϱ in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
Aluminium	2,7
Titan	4,5
Stahl, unlegiert	7,85
Edelstahl (1.4404, 316L)	8,0
Berylliumbronze (CuBe2, Unruhreife)	8,3
Messing (CuZn39Pb3)	8,5
Neusilber	8,6 … 8,7
Silber 925	10,4
Gold 585	13 … 14
Gold 750	15 … 16
Feingold	19,3
Platin 950	20 … 21,5
Saphir und Rubin (Korund)	4,0
Mineralglas	2,5
Acrylglas	1,19

Bei Legierungen hängt die Dichte von der genauen Zusammensetzung ab; maßgeblich ist das Datenblatt des Herstellers. $1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ ist dasselbe wie $1\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{mm}^3}$.

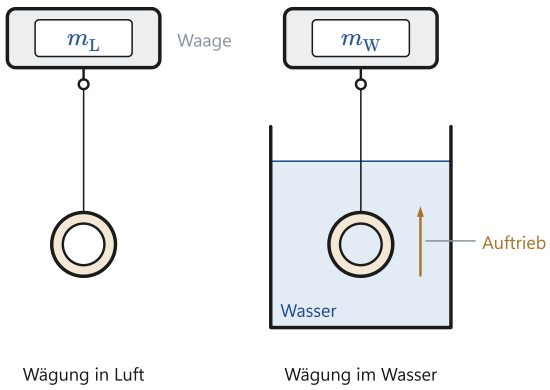


Abb. 1.11 Dichte aus zwei Wägungen: In Luft zeigt die Waage m_L, mit dem Teil im Wasser nur noch m_W. Der Unterschied ist die Masse des verdrängten Wassers

Dichte durch Wägen in Luft und in Wasser

(1.29) GESELLE

$$\varrho = \frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{L} - m_\mathrm{W}} \cdot \varrho_\mathrm{W}$$

Ein eingetauchtes Teil wird um so viel leichter, wie das verdrängte Wasser wiegt (Gesetz von Archimedes). Der Unterschied der beiden Wägungen liefert deshalb das Volumen, ohne dass man das Teil ausmessen muss. So lässt sich prüfen, ob die Dichte eines Rings oder Gehäuses zum gestempelten Feingehalt passt.

Gilt: massives Teil aus einem Werkstoff, ohne Hohlräume, Steine und Einlagen; ganz eingetaucht, ohne Luftblasen und ohne Berührung mit dem Gefäß; dünner Aufhängedraht. Der Auftrieb in der Luft ist vernachlässigt; der Fehler liegt bei rund 0,1 %.

ϱ	Dichte (des Teils)	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
m_L	Masse (Anzeige der Waage, Teil in Luft)	g
m_W	Anzeige der Waage, wenn das Teil ganz im Wasser hängt	g
ϱ_W	Dichte des Wassers (bei 20 °C $0{,}998\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

Aber Vorsicht: Die Dichte ist ein Hinweis, kein Beweis. Verschiedene Legierungen können dieselbe Dichte haben, und Wolfram ist fast genau so dicht wie Feingold. Lötstellen, Federn und Hohlräume verfälschen das Ergebnis.

BEISPIEL Ein Ehering wiegt in Luft 8,40 g. Hängt er an einem dünnen Draht ganz im Wasser von 20 °C, zeigt die Waage 7,86 g. Welche Dichte hat der Ring?

Gegeben: $m_\mathrm{L} = 8{,}40\,\mathrm{g}$; $m_\mathrm{W} = 7{,}86\,\mathrm{g}$; $\varrho_\mathrm{W} = 0{,}998\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{L} - m_\mathrm{W}} \cdot \varrho_\mathrm{W} \\ &= \frac{8{,}40\,\mathrm{g}}{8{,}40\,\mathrm{g} - 7{,}86\,\mathrm{g}} \cdot 0{,}998\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \\ &\approx 15{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\end{aligned}$$

Rund $15{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Das passt nach der Tabelle zu Gold 750, nicht zu Gold 585.

1.4 Dreiecke und Koordinaten

Mit dem rechtwinkligen Dreieck lösen wir fast jede Maßaufgabe: Abstände aus Koordinaten, Schrägen, Winkel am Teilapparat. Die Winkel eines Dreiecks ergeben zusammen immer 180°. Für die Winkelfunktionen muss der Taschenrechner auf Grad (DEG) stehen.

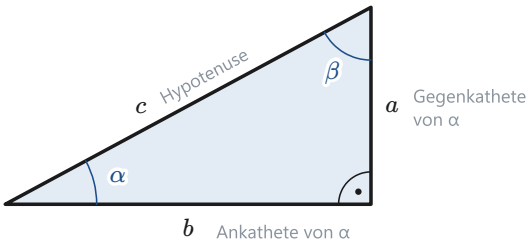


Abb. 1.12 Rechtwinkliges Dreieck: Die Hypotenuse c liegt dem rechten Winkel gegenüber

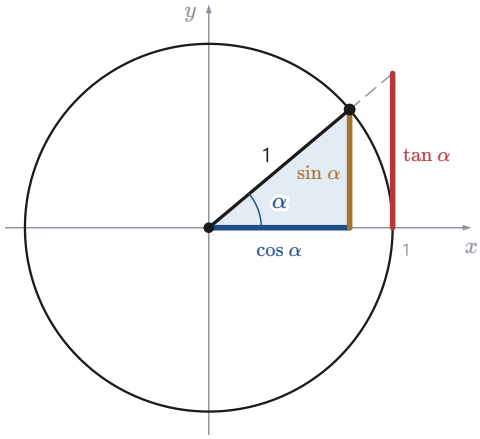


Abb. 1.13 Einheitskreis (Radius 1): Sinus, Kosinus und Tangens als Strecken

Satz des Pythagoras

(1.30) GESELLE

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

UMGESTELLT $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse so groß wie die Quadrate über den beiden Katheten zusammen.

Gilt: nur im rechtwinkligen Dreieck.

c	Hypotenuse (längste Seite, gegenüber dem rechten Winkel)	mm
a	Kathete	mm
b	Kathete	mm

BEISPIEL Aus einem runden Rohteil soll eine rechteckige Platine von 15,3 mm × 17,2 mm entstehen. Welchen Durchmesser muss das Rohteil mindestens haben?

Gegeben: $a = 15{,}3\,\mathrm{mm}; \quad b = 17{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(15{,}3\,\mathrm{mm})^2 + (17{,}2\,\mathrm{mm})^2} \\ &\approx 23{,}0\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Mindestens 23 mm, denn die Diagonale des Rechtecks ist der Durchmesser des kleinsten Kreises um die Platine.

Sinus

(1.31) GESELLE

$$a = c \cdot \sin\alpha$$

UMGESTELLT $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$

Der Sinus ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse. Die Umstellung liefert den Winkel aus zwei Seiten; die Taste dafür heißt meist $\sin^{-1}$.

Gilt: nur im rechtwinkligen Dreieck.

a	Kathete (Gegenkathete, liegt dem Winkel gegenüber)	mm
c	Hypotenuse	mm
α	Winkel	$^\circ$

BEISPIEL Ein Sinuslineal mit 100 mm Rollenabstand soll auf 15° eingestellt werden. Wie hoch muss der Endmaßstapel sein?

Gegeben: $c = 100\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 15^\circ$

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin\alpha \\ &= 100\,\mathrm{mm} \cdot \sin(15^\circ) \\ &\approx 25{,}88\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Unter die eine Rolle kommen Endmaße mit zusammen 25,88 mm.

Kosinus

(1.32) GESELLE

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

UMGESTELLT $\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$

b	Kathete (Ankathete, liegt am Winkel an)	mm
c	Hypotenuse	mm
α	Winkel	$^\circ$

Der Kosinus ist das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse. Er gibt an, wie viel von einer schrägen Strecke in einer Richtung wirksam bleibt.

Gilt: nur im rechtwinkligen Dreieck.

BEISPIEL Ein Hebel von 20 mm Länge steht um 30° schräg zur Waagerechten. Wie lang ist er in der Waagerechten gemessen?

Gegeben: $c = 20\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 30^\circ$

$$\begin{aligned} b &= c \cdot \cos \alpha \\ &= 20\,\mathrm{mm} \cdot \cos\left(30^\circ\right) \\ &\approx 17{,}32\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 17,32 mm. Senkrecht dazu sind es 20 mm mal sin 30°, also genau 10 mm.

Tangens

(1.33) GESELLE

$$a = b \cdot \tan \alpha$$

UMGESTELLT $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$

a	Kathete (Gegenkathete)	mm
b	Kathete (Ankathete)	mm
α	Winkel	$^\circ$

Der Tangens ist das Verhältnis der beiden Katheten, also die Steigung einer Schräge. Mit ihm rechnet man Fasen, Senkungen und Kegel; mehr zum Kegel in Kapitel 9.

Gilt: nur im rechtwinkligen Dreieck; α kleiner als 90°.

BEISPIEL Ein Kegel wird auf 12 mm Länge im Radius um 0,5 mm dünner. Auf welchen Winkel wird der Oberschlitten gestellt?

Gegeben: $a = 0{,}5\,\mathrm{mm}; \quad b = 12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{12\,\mathrm{mm}}\right) \\ &\approx 2{,}39^\circ \end{aligned}$$

Auf rund 2,39°. Das ist der halbe Kegelwinkel.

Merksatz: Sinus ist Gegenkathete durch Hypotenuse, Kosinus ist Ankathete durch Hypotenuse, Tangens ist Gegenkathete durch Ankathete.

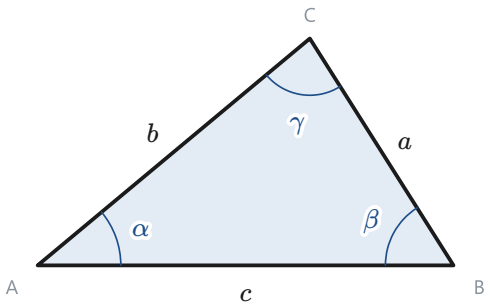


Abb. 1.14 Allgemeines Dreieck: Die Seite a liegt dem Winkel α gegenüber, b dem Winkel β, c dem Winkel γ

Sinussatz

(1.34) MEISTER

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel. Der Sinussatz passt, wenn eine Seite und zwei Winkel bekannt sind.

Gilt: in jedem Dreieck. Wird ein Winkel aus zwei Seiten gesucht, sind zwei Lösungen möglich (spitz oder stumpf).

a	Seite (gegenüber dem Winkel α)	mm
b	Seite (gegenüber dem Winkel β)	mm
α	Winkel (gegenüber der Seite a)	°
β	Winkel (gegenüber der Seite b)	°

BEISPIEL In einem Dreieck aus drei Lagerpunkten sind die Seite b = 6,0 mm und die Winkel α = 40° und β = 75° bekannt. Wie lang ist die Seite a?

Gegeben: $b = 6{,}0\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 75°$

$$\begin{aligned} a &= \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \\ &= \frac{6{,}0\,\mathrm{mm} \cdot \sin(40°)}{\sin(75°)} \\ &\approx 3{,}99\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 3,99 mm. Der dritte Winkel ist 180° − 40° − 75° = 65°.

Kosinussatz

(1.35) MEISTER

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

UMGESTELLT $\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$

Der Kosinussatz ist der Satz des Pythagoras für beliebige Dreiecke. Er passt, wenn zwei Seiten und der Winkel dazwischen bekannt sind, oder umgestellt, wenn aus drei Seiten ein Winkel gesucht ist.

Gilt: in jedem Dreieck; bei $\gamma = 90°$ entfällt das letzte Glied.

c	Seite (gegenüber dem Winkel γ)	mm
a	Seite (liegt am Winkel γ an)	mm
b	Seite (liegt am Winkel γ an)	mm
γ	Winkel (zwischen den Seiten a und b)	°

BEISPIEL Vom Kleinbodenrad aus liegt das Minutenrad 7,2 mm und das Sekundenrad 5,4 mm entfernt. Die beiden Verbindungslinien schließen 110° ein. Wie weit sind Minutenrad und Sekundenrad voneinander entfernt?

Gegeben: $a = 7{,}2\,\mathrm{mm}; \quad b = 5{,}4\,\mathrm{mm}; \quad \gamma = 110°$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \\ &= \sqrt{(7{,}2\,\mathrm{mm})^2 + (5{,}4\,\mathrm{mm})^2 - 2 \cdot 7{,}2\,\mathrm{mm} \cdot 5{,}4\,\mathrm{mm} \cdot \cos(110°)} \\ &\approx 10{,}37\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 10,37 mm von Achse zu Achse.

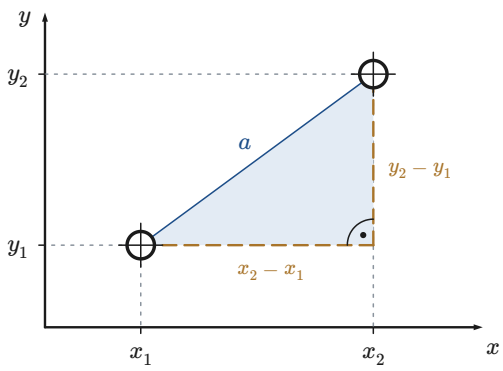


Abb. 1.15 Achsabstand a als Hypotenuse über den Koordinatendifferenzen

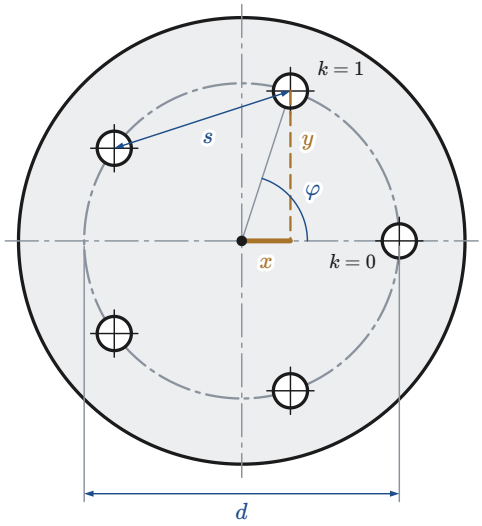


Abb. 1.16 Lochkreis mit $n = 5$ Bohrungen: Teilungswinkel φ, Sehne s, Koordinaten x und y der Bohrung $k = 1$

Achsabstand aus Koordinaten

(1.36) GESELLE

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Auf der Koordinatenbohrmaschine und in der CAD-Zeichnung sind Lagerbohrungen durch x und y festgelegt. Ihr Abstand ist die Hypotenuse über den beiden Koordinatendifferenzen.

Gilt: rechtwinkliges Koordinatensystem; beide Punkte auf denselben Nullpunkt bezogen.

a	Achsabstand (Eingriffsentfernung)	mm
x_1	Koordinate (x-Richtung, erste Bohrung)	mm
y_1	Koordinate (y-Richtung, erste Bohrung)	mm
x_2	Koordinate (x-Richtung, zweite Bohrung)	mm
y_2	Koordinate (y-Richtung, zweite Bohrung)	mm

BEISPIEL Zwei Lagerbohrungen liegen bei (2,50 mm | 1,20 mm) und (7,30 mm | 5,60 mm). Wie groß ist der Achsabstand?

Gegeben: $x_1 = 2{,}50\,\mathrm{mm}$; $y_1 = 1{,}20\,\mathrm{mm}$; $x_2 = 7{,}30\,\mathrm{mm}$; $y_2 = 5{,}60\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(7{,}30\,\mathrm{mm} - 2{,}50\,\mathrm{mm})^2 + (5{,}60\,\mathrm{mm} - 1{,}20\,\mathrm{mm})^2} \\ &\approx 6{,}51\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 6,51 mm. Dieser Wert wird mit der Eingriffsentfernung des Radpaares verglichen, siehe Kapitel 4.

Lochkreis: Abstand benachbarter Bohrungen

(1.37) GESELLE

$$s = d \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Mit der Sehne lässt sich ein Lochkreis mit dem Zirkel anreißen und nach dem Bohren mit dem Messschieber prüfen. Der Teilungswinkel zwischen zwei Bohrungen ist 360° geteilt durch n.

Gilt: gleichmäßige Teilung.

s	Sehne (von Bohrungsmitte zu Bohrungsmitte)	mm
d	Durchmesser (des Lochkreises)	mm
n	Anzahl (der gleichmäßig verteilten Bohrungen)	1

BEISPIEL Auf einem Lochkreis von 24 mm Durchmesser sitzen 5 Bohrungen. Wie groß ist der Abstand benachbarter Bohrungen?

Gegeben: $d = 24\,\mathrm{mm}$; $n = 5$

$$\begin{aligned} s &= d \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \\ &= 24\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{5}\right) \\ &\approx 14{,}11\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 14,11 mm von Mitte zu Mitte; der Teilungswinkel beträgt 72°.

Koordinaten auf dem Teilkreis: x

(1.38) GESELLE

$$x = \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi$$

Zum Bohren nach Koordinaten wird jeder Punkt des Teilkreises in x und y zerlegt. Die Bohrung mit der Nummer k liegt bei $\varphi = k \cdot 360^\circ$ geteilt durch n, gezählt ab $k = 0$ auf der x-Achse.

Gilt: Nullpunkt in der Kreismitte. Das Vorzeichen ergibt sich von selbst: links von der Mitte wird x negativ.

x	Koordinate (x-Richtung, von der Kreismitte aus)	mm
d	Durchmesser (des Teilkreises)	mm
φ	Winkel (von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn)	$^\circ$

BEISPIEL Lochkreis mit 24 mm Durchmesser und 5 Bohrungen: Wo liegt die Bohrung $k = 1$ in x-Richtung?

Gegeben: $d = 24\,\mathrm{mm}; \quad \varphi = 72^\circ$

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{24\,\mathrm{mm}}{2} \cdot \cos\left(72^\circ\right) \\ &\approx 3{,}71\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

3,71 mm rechts von der Mitte.

Koordinaten auf dem Teilkreis: y

(1.39) GESELLE

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi$$

Die zweite Koordinate desselben Punktes. Zur Probe müssen x und y nach dem Satz des Pythagoras wieder den Radius ergeben.

Gilt: wie bei Formel (1.38); unterhalb der Mitte wird y negativ.

y	Koordinate (y-Richtung, von der Kreismitte aus)	mm
d	Durchmesser (des Teilkreises)	mm
φ	Winkel (von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn)	$^\circ$

BEISPIEL Wo liegt dieselbe Bohrung in y-Richtung?

Gegeben: $d = 24\,\mathrm{mm}; \quad \varphi = 72^\circ$

$$\begin{aligned} y &= \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi \\ &= \frac{24\,\mathrm{mm}}{2} \cdot \sin\left(72^\circ\right) \\ &\approx 11{,}41\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

11,41 mm über der Mitte. Probe: Aus 3,71 mm und 11,41 mm ergibt der Satz des Pythagoras den Radius 12,00 mm.

1.5 Mittelwert und Abweichung

Zwei kleine Werkzeuge für jede Messreihe. Spannweite, Standardabweichung und die Auswertung ganzer Messreihen stehen in Abschnitt 12.1, das Messen des Gangs in Kapitel 8.

Mittelwert

(1.40) GESELLE

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Der Mittelwert gleicht zufällige Schwankungen einzelner Messungen aus. Er sagt nichts darüber, wie weit die Einzelwerte auseinanderliegen.

Gilt: alle Werte in derselben Einheit; Vorzeichen beachten.

$\bar{x}$	Mittelwert (Einheit wie die Einzelwerte)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
$\sum x_i$	Summe aller Messwerte (mit Vorzeichen)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
n	Anzahl (der Messwerte)	1

BEISPIEL Eine Uhr zeigt in fünf Lagen die Gänge +4, +7, −2, +5 und +6 Sekunden je Tag. Die Summe ist +20 Sekunden je Tag. Wie groß ist der mittlere Gang?

Gegeben: $\sum x_i = 20\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}; \quad n = 5$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} \\ &= \frac{20\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{5} \\ &= 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Im Mittel +4 s am Tag. Die größte Differenz zwischen zwei Lagen beträgt dabei 9 s am Tag.

Abweichung in Prozent

(1.41) GESELLE

$$p = \frac{x_{\text{ist}} - x_{\text{soll}}}{x_{\text{soll}}}$$

Die Abweichung wird immer auf den Sollwert bezogen. Als Zahl mal 100 ergibt sie Prozent, mal 1000 Promille.

Gilt: Sollwert nicht null; beide Werte in derselben Einheit.

p	relative Abweichung (+ heißt: Istwert zu groß)	$\%$
x_{ist}	Istwert (gemessen)	mm
x_{soll}	Sollwert (Einheit wie der Istwert)	mm

BEISPIEL Eine Welle soll 2,50 mm Durchmesser haben, gemessen werden 2,47 mm. Wie groß ist die Abweichung?

Gegeben: $x_{\text{ist}} = 2{,}47\,\mathrm{mm}; \quad x_{\text{soll}} = 2{,}50\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}p &= \frac{x_{\text{ist}} - x_{\text{soll}}}{x_{\text{soll}}} \\ &= \frac{2{,}47\,\mathrm{mm} - 2{,}50\,\mathrm{mm}}{2{,}50\,\mathrm{mm}} \\ &= -1{,}2\,\%\end{aligned}$$

Die Welle ist um 1,2 % zu dünn.

2 Mechanik

Eine mechanische Uhr ist angewandte Mechanik: Eine Feder oder ein Gewicht liefert Kraft, Räder und Hebel leiten sie weiter, Reibung zehrt daran, und am Ende hält eine träge Masse den Takt. Dieses Kapitel sammelt die Formeln, auf denen alle folgenden Kapitel aufbauen.

Die Beispiele rechnen mit Größen aus der Werkstatt, von der Unruh mit wenigen Milligramm bis zum Antriebsgewicht der Standuhr. Was Antrieb, Räderwerk, Unruh und Pendel im Einzelnen betrifft, steht in den Kapiteln 3 bis 6. Einige Formelzeichen folgen hier dem Brauch der Mechanik: A ist eine Fläche, s meist ein Weg, m eine Masse, P eine Leistung, G der Schubmodul und α auch ein Neigungswinkel. Maßgeblich ist immer die Größentabelle neben der Formel.

2.1 Bewegung

Teile einer Uhr bewegen sich geradlinig, wie ein sinkendes Gewicht, oder sie drehen sich, wie Räder und Unruh. Für beide Arten gibt es eine Geschwindigkeit; die Drehzahl verbindet sie.

Geschwindigkeit

(2.1) GESELLE

$$v = \frac{s}{t}$$

v	Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
s	Weg (zurückgelegt)	m
t	Zeit (dafür gebraucht)	s

Geschwindigkeit ist Weg je Zeit.

Gilt: gleichförmige Bewegung. Ändert sich die Geschwindigkeit unterwegs, liefert die Formel den Mittelwert.

BEISPIEL Das Gewicht einer Standuhr sinkt in 8 Tagen um 1,2 m. Wie schnell sinkt es?

Gegeben: $s = 1{,}2\,\mathrm{m}; \quad t = 8\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{1{,}2\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{d}} \\ &= \frac{1200\,\mathrm{mm}}{192\,\mathrm{h}} \\ &= 6{,}25\ \tfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Das Gewicht sinkt 6,25 mm je Stunde, also 150 mm am Tag. Am Stand des Gewichts lässt sich so ablesen, wann die Uhr wieder aufgezogen werden muss.

Beschleunigung

(2.2) GESELLE

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit je Zeit. Stöße sind sehr große Beschleunigungen über sehr kurze Zeit.

Gilt: gleichmäßige Beschleunigung; sonst Mittelwert über Δt.

a	Beschleunigung (beim Bremsen: Verzögerung)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Δv	Änderung der Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Δt	Zeitspanne (in der sich die Geschwindigkeit ändert)	s

BEISPIEL Eine Armbanduhr fällt aus 1 m Höhe und trifft mit $4{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf den Boden. Der Boden bremst sie in etwa 1 ms auf null ab. Wie groß ist die Verzögerung?

Gegeben: $\Delta v = 4{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \quad \Delta t = 1\,\mathrm{ms}$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{4{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\,\mathrm{ms}} \\ &= 4400\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Das ist rund das 450-Fache der Fallbeschleunigung. Je härter der Boden, desto kürzer die Bremszeit und desto größer die Verzögerung.

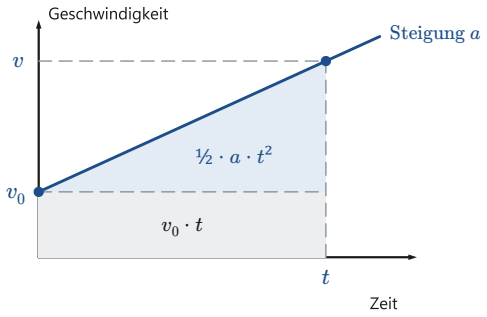


Abb. 2.1 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Die Geschwindigkeit wächst gleichmäßig von v_0 auf v. Die Fläche unter der Geraden ist der Weg s

Geschwindigkeit bei gleichmäßiger Beschleunigung

(2.3) MEISTER

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Bei gleichmäßiger Beschleunigung wächst die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um denselben Betrag. Im freien Fall ist die Beschleunigung die Fallbeschleunigung g.

Gilt: Beschleunigung nach Betrag und Richtung konstant, Bewegung auf einer Geraden. Freier Fall ohne Luftwiderstand: $a = g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

v	Geschwindigkeit (am Ende)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
v_0	Anfangsgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
a	Beschleunigung (beim Bremsen negativ)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
t	Zeit (seit Beginn der Beschleunigung)	s

BEISPIEL Eine Armbanduhr rutscht vom Werktisch und fällt 0,45 s lang, bis sie auf dem Boden aufschlägt. Wie schnell ist sie dann?

Gegeben: $v_0 = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \quad a = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}; \quad t = 0{,}45\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ &= 0\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}45\,\mathrm{s} \\ &\approx 4{,}4\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund $4{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind 16 km in der Stunde. Mit dieser Geschwindigkeit rechnet das Beispiel zu Formel (2.2).

Weg bei gleichmäßiger Beschleunigung

(2.4) MEISTER

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Der Weg hat zwei Teile: den Weg mit der Anfangsgeschwindigkeit und den Zuwachs durch die Beschleunigung. Im Diagramm der Geschwindigkeit über der Zeit sind das ein Rechteck und ein Dreieck.

Gilt: wie Formel (2.3).

s	Weg (in dieser Zeit zurückgelegt)	m
v_0	Anfangsgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
t	Zeit (seit Beginn der Beschleunigung)	s
a	Beschleunigung (beim Bremsen negativ)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

BEISPIEL Wie tief fällt die Uhr aus dem Beispiel davor in 0,45 s?

Gegeben: $v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$; $a = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned} s &= v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \\ &= 0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}45\,\mathrm{s} + \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}45\,\mathrm{s})^2}{2} \\ &\approx 0{,}99\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Rund 1 m. Einem Fall aus dieser Höhe auf einen Holzboden ist die Stoßprüfung stoßsicherer Uhren nachempfunden.

Geschwindigkeit und Weg ohne die Zeit

(2.5) MEISTER

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$$

UMGESTELLT $v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s}$ $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$

Die Formel verbindet Geschwindigkeit und Weg, ohne dass man die Zeit kennen muss. Aus der Ruhe heraus wird daraus $v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$, beim freien Fall aus der Höhe h also $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

Gilt: wie Formel (2.3); beim Bremsen ist a negativ.

v	Geschwindigkeit (am Ende)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
v_0	Anfangsgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
a	Beschleunigung (beim Bremsen negativ)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
s	Weg (auf dem beschleunigt oder gebremst wird)	m

Gut zu wissen: Bremsweg bis zum Stillstand: Mit $v = 0$ wird $s = \frac{v_0^2}{2 \cdot \lvert a \rvert}$. Doppelte Geschwindigkeit heißt vierfacher Bremsweg. Der Anhalteweg ist der Bremsweg plus der Weg, der in der Reaktionszeit ungebremst zurückgelegt wird.

BEISPIEL Kurz nach dem Aufziehen reißt das Seil einer Standuhr. Das Gewicht fällt 1,3 m tief. Wie schnell trifft es auf den Kastenboden?

Gegeben: $v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $a = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $s = 1{,}3\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} \\ &= \sqrt{\left(0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}3\,\mathrm{m}} \\ &\approx 5{,}05\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind 18 km in der Stunde. Ein Gewicht von 4 kg schlägt mit 51 J auf; deshalb gehören mürbe Darmsaiten und Seile rechtzeitig ersetzt.

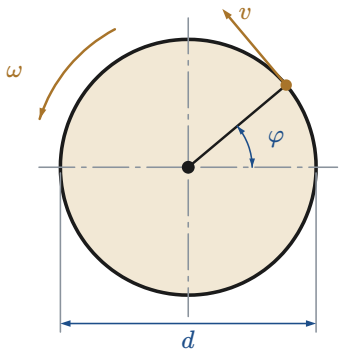


Abb. 2.2 Drehendes Rad: Drehwinkel φ, Winkelgeschwindigkeit ω und Umfangsgeschwindigkeit v

Umfangsgeschwindigkeit

(2.6) GESELLE

$$v = \pi \cdot d \cdot n$$

Je Umdrehung legt ein Punkt am Umfang einmal den Umfang $\pi \cdot d$ zurück. Mit derselben Formel wird in Kapitel 9 die Schnittgeschwindigkeit berechnet.

Gilt: d und n gehören zum selben Teil. Für das Ergebnis in Metern je Sekunde den Durchmesser in Metern und die Drehzahl je Sekunde einsetzen.

v	Umfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit eines Punktes am Umfang)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
d	Durchmesser	mm
n	Drehzahl (Umdrehungen je Zeit)	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Eine Polierscheibe von 100 mm Durchmesser läuft mit 2800 Umdrehungen je Minute. Wie schnell bewegt sich ihr Umfang?

Gegeben: $d = 100\,\mathrm{mm}; \quad n = 2800\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} v &= \pi \cdot d \cdot n \\ &= \pi \cdot 100\,\mathrm{mm} \cdot 2800\,\tfrac{1}{\mathrm{min}} \\ &= \pi \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot \frac{2800}{60\,\mathrm{s}} \\ &\approx 14{,}7\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Der Umfang läuft mit rund $14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind 53 km in der Stunde.

Winkelgeschwindigkeit

(2.7) MEISTER

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
φ	Drehwinkel (im Bogenmaß, eine Umdrehung = 2π)	rad
t	Zeit (dafür gebraucht)	s

Die Winkelgeschwindigkeit ist der überstrichene Winkel je Zeit. Alle Punkte eines Rades haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit, aber je nach Abstand von der Achse verschiedene Umfangsgeschwindigkeiten.

Gilt: gleichförmige Drehung; Winkel im Bogenmaß: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

> **Gut zu wissen:** Umfangsgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit hängen über den Radius zusammen: $v = \omega \cdot r$.

BEISPIEL Das Sekundenrad dreht sich in 60 s einmal ganz herum (360°). Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Gegeben: $\varphi = 360°$; $t = 60\,\text{s}$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\varphi}{t} \\ &= \frac{360°}{60\,\text{s}} \\ &= \frac{2\pi}{60\,\text{s}} \\ &\approx 0{,}105\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Rund $0{,}105\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Das Minutenrad ist 60-mal langsamer.

Winkelgeschwindigkeit aus der Drehzahl

(2.8) MEISTER

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

UMGESTELLT $\quad n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$

ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
n	Drehzahl (Umdrehungen je Zeit)	$\frac{1}{\text{min}}$

Jede Umdrehung überstreicht den Winkel 2π. Die Winkelgeschwindigkeit wird für Leistung und Bewegungsenergie drehender Teile gebraucht (Abschnitt 2.4).

Gilt: Drehzahl je Sekunde einsetzen, wenn ω in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ herauskommen soll.

BEISPIEL Eine Welle läuft auf dem Drehstuhl mit 3000 Umdrehungen je Minute, das sind 50 Umdrehungen je Sekunde.

Gegeben: $n = 3000\ \frac{1}{\text{min}}$

$$\begin{aligned}\omega &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 3000\ \frac{1}{\text{min}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 50\ \frac{1}{\text{s}} \\ &\approx 314\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Die Welle dreht sich mit $314\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

2.2 Kraft, Druck und schiefe Ebene

Kräfte haben eine Größe und eine Richtung. Trifft eine Kraft schräg auf eine Fläche, wirkt nur ein Teil von ihr in die gewünschte Richtung. Das Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften ist die Grundlage für Hemmung, Gewinde und Keil.

Kraft und Beschleunigung

(2.9) GESELLE

$$F = m \cdot a$$

Eine Kraft beschleunigt eine Masse. Die Einheit Newton folgt aus dieser Formel: 1 N beschleunigt 1 kg mit $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

F	Kraft	N
m	Masse	kg
a	Beschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

BEISPIEL Beim Aufprall aus dem Beispiel zur Beschleunigung wird auch die Unruh (Masse 60 mg) mit $4400\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gebremst. Welche Kraft wirkt auf sie?

Gegeben: $m = 60\,\mathrm{mg}$; $a = 4400\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ &= 60\,\mathrm{mg} \cdot 4400\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &\approx 0{,}26\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Rund 0,26 N, das 450-Fache ihrer Gewichtskraft. Diese Kraft müssten ohne Stoßsicherung zwei Zapfen von rund 0,1 mm Durchmesser aufnehmen.

Gewichtskraft

(2.10) GESELLE

$$F_\mathrm{G} = m \cdot g$$

Die Gewichtskraft ist die Kraft, mit der die Erde eine Masse anzieht. Sie wirkt immer senkrecht nach unten.

F_G	Gewichtskraft	N
m	Masse	kg
g	Fallbeschleunigung (in Mitteleuropa $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

BEISPIEL Welche Kraft übt ein Antriebsgewicht von 3,5 kg auf das Seil aus?

Gegeben: $m = 3{,}5\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned} F_\mathrm{G} &= m \cdot g \\ &= 3{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &\approx 34{,}3\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Das Gewicht zieht mit 34,3 N. Als Faustwert: 1 kg wiegt rund 10 N, 100 g wiegen rund 1 N.

Druck

(2.11) GESELLE

$$p = \frac{F}{A}$$

UMGESTELLT $F = p \cdot A$

p	Druck	bar
F	Kraft	N
A	Fläche (auf die die Kraft senkrecht wirkt)	mm^2

Druck ist Kraft je Fläche. Umrechnung: $1\,\mathrm{bar} = 0{,}1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 100\,000\,\mathrm{Pa}$.

Gilt: Kraft gleichmäßig über die Fläche verteilt.

Gut zu wissen: 10 bar entsprechen dem Wasserdruck in rund 100 m Tiefe.

BEISPIEL Eine Uhr wird mit 10 bar Überdruck geprüft. Das Glas hat 30 mm Durchmesser, also 707 mm² Fläche. Mit welcher Kraft drückt das Wasser auf das Glas?

Gegeben: $p = 10\,\mathrm{bar}$; $A = 707\,\mathrm{mm}^2$

$$\begin{aligned} F &= p \cdot A \\ &= 10\,\mathrm{bar} \cdot 707\,\mathrm{mm}^2 \\ &= 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot 707\,\mathrm{mm}^2 \\ &= 707\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

707 N, so viel wie die Gewichtskraft von 72 kg. Darum brauchen druckfeste Uhren dicke Gläser und steife Böden.

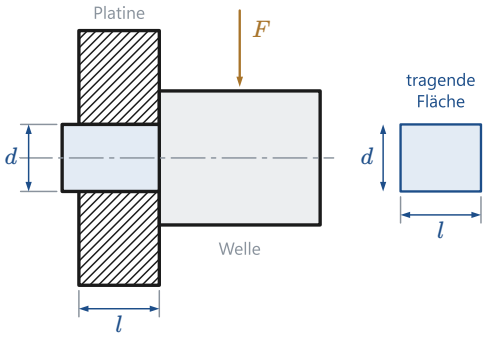


Abb. 2.3 Flächenpressung: Der Zapfen trägt auf der projizierten Fläche $d \cdot l$

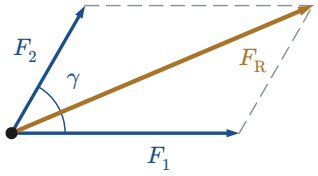


Abb. 2.4 Kräfteparallelogramm: F_R ersetzt F_1 und F_2

Flächenpressung im Zapfenlager

(2.12) MEISTER

$$p = \frac{F}{d \cdot l}$$

Flächenpressung ist der Druck zwischen zwei festen Körpern. Beim Zapfen rechnet man mit der projizierten Fläche $d \cdot l$, also mit dem Rechteck, das der Zapfen im Lager als Schatten wirft.

Gilt: Mittelwert. An den Kanten und bei verkantetem Zapfen ist die Pressung örtlich höher.

p	Flächenpressung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
F	Kraft (Lagerkraft quer zur Achse)	N
d	Durchmesser (des Zapfens)	mm
l	Länge (tragende Länge des Lagers, Platinenstärke)	mm

BEISPIEL Der Zapfen einer Seilwalze trägt 20 N. Er hat 4 mm Durchmesser und läuft in einer 3 mm starken Messingplatine.

Gegeben: $F = 20\,\mathrm{N}; \quad d = 4\,\mathrm{mm}; \quad l = 3\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{d \cdot l} \\ &= \frac{20\,\mathrm{N}}{4\,\mathrm{mm} \cdot 3\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 1{,}67\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \end{aligned}$$

Rund $1{,}7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Eine stärkere Platine oder ein längeres Futter senkt die Pressung, ein dünnerer Zapfen erhöht sie.

Zwei Kräfte zusammensetzen

(2.13) MEISTER

$$F_\mathrm{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma}$$

Zwei Kräfte, die am selben Punkt angreifen, lassen sich durch eine einzige ersetzen: die Diagonale des Kräfteparallelogramms. Stehen die Kräfte senkrecht aufeinander, bleibt der Satz des Pythagoras: $F_\mathrm{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Gilt: beide Kräfte greifen am selben Punkt an oder ihre Wirkungslinien schneiden sich.

F_R	Resultierende (Ersatzkraft)	N
F_1	erste Kraft	N
F_2	zweite Kraft	N
γ	Winkel (zwischen den beiden Kraftrichtungen)	$^\circ$

BEISPIEL Auf ein Rad wirken die Zahnkräfte aus zwei Eingriffen: 0,8 N und 0,5 N, die Richtungen schließen 60° ein. Wie groß ist die Kraft auf die Lager?

Gegeben: $F_1 = 0{,}8\,\mathrm{N}; \quad F_2 = 0{,}5\,\mathrm{N}; \quad \gamma = 60^\circ$

$$\begin{aligned} F_\mathrm{R} &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma} \\ &= \sqrt{(0{,}8\,\mathrm{N})^2 + (0{,}5\,\mathrm{N})^2 + 2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5\,\mathrm{N} \cdot \cos(60^\circ)} \\ &= \sqrt{1{,}29\,\mathrm{N}^2} \\ &\approx 1{,}14\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Die Lager tragen zusammen 1,14 N. Wirkten beide Kräfte in dieselbe Richtung, wären es 1,3 N, bei entgegengesetzter Richtung nur 0,3 N.

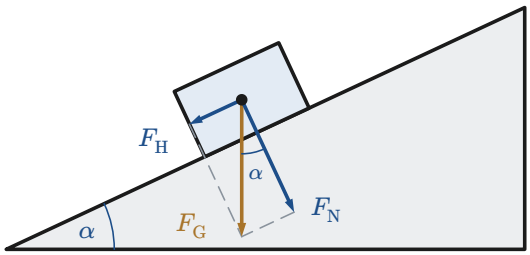


Abb. 2.5 Schiefe Ebene: Die Gewichtskraft zerfällt in Hangabtriebskraft und Normalkraft

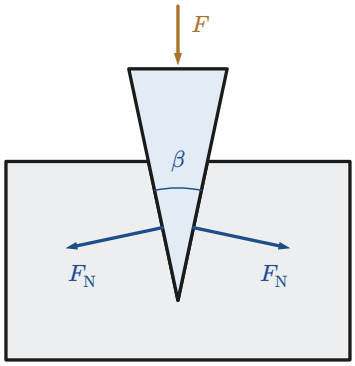


Abb. 2.6 Keil mit dem Keilwinkel β

Schiefe Ebene: Hangabtriebskraft

(2.14) GESELLE

$$F_H = F_G \cdot \sin \alpha$$

Auf der schiefen Ebene zerlegt man eine Kraft in zwei Anteile: einen parallel zur Ebene und einen senkrecht dazu. So rechnet man überall, wo eine Kraft schräg auf eine Fläche trifft: an Hebeflächen der Hemmung, Gewindeflanken, Keilen und Schrägen von Hebeln.

Gilt: Die Zerlegung gilt immer. Ob der Körper wirklich rutscht, entscheidet die Reibung (Abschnitt 2.5).

F_H	Hangabtriebskraft (parallel zur Ebene, abwärts)	N
F_G	Gewichtskraft	N
α	Neigungswinkel (der Ebene gegen die Waagerechte)	°

BEISPIEL Ein Teil mit 4,9 N Gewichtskraft (0,5 kg) liegt auf einer um 15° geneigten Platte. Mit welcher Kraft will es abrutschen?

Gegeben: $F_G = 4{,}9\,\mathrm{N}; \quad \alpha = 15°$

$$\begin{aligned} F_H &= F_G \cdot \sin \alpha \\ &= 4{,}9\,\mathrm{N} \cdot \sin(15°) \\ &\approx 1{,}27\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Nur 1,27 N ziehen das Teil hangabwärts, gut ein Viertel seiner Gewichtskraft.

Schiefe Ebene: Normalkraft

(2.15) GESELLE

$$F_N = F_G \cdot \cos \alpha$$

Die Normalkraft presst den Körper auf die Unterlage. Je steiler die Ebene, desto kleiner wird sie.

F_N	Normalkraft (senkrecht auf die Ebene)	N
F_G	Gewichtskraft	N
α	Neigungswinkel (der Ebene gegen die Waagerechte)	°

BEISPIEL Mit welcher Kraft drückt das Teil aus dem Beispiel davor auf die Platte?

Gegeben: $F_G = 4{,}9\,\mathrm{N}; \quad \alpha = 15°$

$$\begin{aligned} F_N &= F_G \cdot \cos \alpha \\ &= 4{,}9\,\mathrm{N} \cdot \cos(15°) \\ &\approx 4{,}73\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Mit 4,73 N. Diese Normalkraft bestimmt die Reibung (Abschnitt 2.5).

Keil

(2.16) MEISTER

$$F_{\mathrm{N}} = \frac{F}{2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

F_{N}	Normalkraft (senkrecht auf jede Flanke)	N
F	Kraft (treibt den Keil ein)	N
β	Keilwinkel (zwischen den beiden Flanken)	$^\circ$

Der Keil ist eine doppelte schiefe Ebene. Er verwandelt eine kleine Kraft mit langem Weg in zwei große Kräfte mit kurzem Weg.

Gilt: symmetrischer Keil, ohne Reibung. Reibung an den Flanken verkleinert die Flankenkräfte deutlich (Abschnitt 2.5).

BEISPIEL Ein Gehäusemesser mit 20° Keilwinkel wird mit 30 N in die Fuge zwischen Boden und Gehäuse gedrückt.

Gegeben: $F = 30\,\mathrm{N}; \quad \beta = 20^\circ$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{N}} &= \frac{F}{2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{30\,\mathrm{N}}{2 \cdot \sin\left(\frac{20^\circ}{2}\right)} \\ &\approx 86{,}4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Jede Flanke drückt mit rund 86 N, fast dem Dreifachen der Handkraft. Je schlanker der Keil, desto größer die Kraft und desto kleiner der Hub.

Merksatz: Je flacher die schiefe Ebene und je schlanker der Keil, desto größer die Kraftübersetzung und desto länger der Weg.

2.3 Hebel und Drehmoment

Fast jedes bewegliche Teil der Uhr ist ein Hebel: Anker, Wippen, Sperrklinken, Schlagwerkshebel und jedes Zahnrad. Entscheidend ist nie die Kraft allein, sondern Kraft mal Hebelarm.

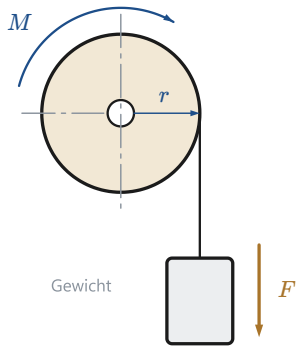


Abb. 2.7 Drehmoment: Kraft F am Hebelarm r

Drehmoment

(2.17) GESELLE

$$M = F \cdot r$$

Das Drehmoment ist die Drehwirkung einer Kraft: Kraft mal Hebelarm.

Gilt: Der Hebelarm steht senkrecht auf der Kraftrichtung. Greift die Kraft schräg an, zählt nur dieser senkrechte Abstand.

M	Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
F	Kraft	N
r	Hebelarm (senkrechter Abstand der Kraftrichtung von der Drehachse)	mm

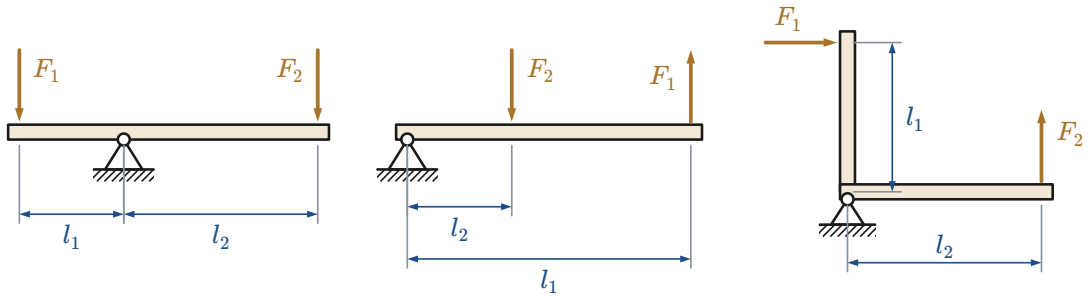
Gut zu wissen: Umrechnung: $1\,\mathrm{N \cdot m} = 1000\,\mathrm{N \cdot mm}$. Ältere Unterlagen geben Federmomente in Pond mal Zentimeter an (oft „g·cm" geschrieben): $1\,\mathrm{p \cdot cm}$ sind rund $0{,}098\,\mathrm{N \cdot mm}$.

BEISPIEL Das Antriebsgewicht zieht mit 34,3 N am Seil einer Walze mit 20 mm Radius. Welches Drehmoment treibt das Werk?

Gegeben: $F = 34{,}3\,\mathrm{N}$; $r = 20\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} M &= F \cdot r \\ &= 34{,}3\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{mm} \\ &= 686\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

686 N·mm, also knapp 0,7 N·m. Eine dickere Walze gibt mehr Drehmoment, lässt das Gewicht aber schneller sinken.



zweiseitiger Hebel — einseitiger Hebel — Winkelhebel

Abb. 2.8 Hebelarten. Die Hebelarme werden immer vom Drehpunkt aus und senkrecht zur Kraft gemessen

Hebelgesetz

(2.18) GESELLE

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

UMGESTELLT $F_2 = \dfrac{F_1 \cdot l_1}{l_2}$

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn beide Drehmomente gleich groß sind und entgegengesetzt drehen. Das gilt für jede Hebelart. Greifen mehrere Kräfte an, vergleicht man die Summe der linksdrehenden mit der Summe der rechtsdrehenden Momente.

Gilt: Hebelarme senkrecht zur jeweiligen Kraftrichtung gemessen; ohne Reibung im Drehpunkt.

F_1	erste Kraft (am ersten Hebelarm)	N
l_1	erster Hebelarm	mm
F_2	zweite Kraft (am zweiten Hebelarm)	N
l_2	zweiter Hebelarm	mm

BEISPIEL Ein Drücker wirkt mit 2 N im Abstand von 12 mm vom Drehpunkt auf einen Winkelhebel. Der kurze Arm ist 3 mm lang. Mit welcher Kraft drückt er auf das nächste Teil?

Gegeben: $F_1 = 2\,\mathrm{N}$; $l_1 = 12\,\mathrm{mm}$; $l_2 = 3\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2} \\ &= \frac{2\,\mathrm{N} \cdot 12\,\mathrm{mm}}{3\,\mathrm{mm}} \\ &= 8\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Mit 8 N. Was der Hebel an Kraft gewinnt, verliert er an Weg: Der kurze Arm bewegt sich nur ein Viertel so weit.

Merksatz: Kraft mal Kraftarm gleich Last mal Lastarm.

Im Räderwerk gilt dasselbe: Jedes Rad ist ein umlaufender Hebel. Wie sich das Drehmoment von Rad zu Trieb ändert, steht in Kapitel 4.

2.4 Arbeit, Energie, Leistung und Wirkungsgrad

Beim Aufziehen wird Arbeit in die Uhr gesteckt und als Energie gespeichert, in der gespannten Feder oder im gehobenen Gewicht. Das Werk gibt sie über Tage als winzige Leistung wieder ab. Energie geht dabei nie verloren, sie wird aber durch Reibung zu Wärme und fehlt dann dem Gangregler.

Arbeit

(2.19) GESELLE

$$W = F \cdot s$$

Arbeit ist Kraft mal Weg. Einheit: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{s}$.

Gilt: gleichbleibende Kraft in Richtung des Weges.

W	Arbeit	J
F	Kraft	N
s	Weg (in Richtung der Kraft)	m

BEISPIEL Beim Aufziehen einer Kettenzuguhr wird die Kette mit 25 N um 0,9 m gezogen.

Gegeben: $F = 25\,\mathrm{N}$; $s = 0{,}9\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} W &= F \cdot s \\ &= 25\,\mathrm{N} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m} \\ &= 22{,}5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Die Hand verrichtet 22,5 J Arbeit. Der größte Teil steckt danach als Lageenergie im gehobenen Gewicht.

Arbeit bei Drehung

(2.20) MEISTER

$$W = M \cdot \varphi$$

Bei drehenden Teilen tritt das Drehmoment an die Stelle der Kraft und der Drehwinkel an die Stelle des Weges.

Gilt: gleichbleibendes Drehmoment; sonst mit dem mittleren Drehmoment rechnen.

W	Arbeit	J
M	Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}m}$
φ	Drehwinkel (im Bogenmaß, eine Umdrehung = 2π)	rad

BEISPIEL Die Zugfeder einer Armbanduhr gibt im Mittel 8 N·mm ab, während sich das Federhaus 7-mal dreht. Wie viel Arbeit gibt sie ab?

Gegeben: $M = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\varphi = 7\,\mathrm{U}$

$$\begin{aligned} W &= M \cdot \varphi \\ &= 8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 7\,\mathrm{U} \\ &= 8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 7 \cdot 2\pi \\ &\approx 352\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

Rund 0,35 J. Das ist der ganze Energievorrat der Uhr für fast zwei Tage.

Lageenergie (potentielle Energie)

(2.21) GESELLE

$$E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

Ein gehobenes Gewicht speichert die Hubarbeit. Beim Sinken gibt es sie an das Werk ab.

E_{pot}	Lageenergie	J
m	Masse	kg
g	Fallbeschleunigung (in Mitteleuropa $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h	Höhe (über der tiefsten Stellung)	m

BEISPIEL Das Gewicht einer Standuhr (3,5 kg) wird um 1,2 m hochgezogen.

Gegeben: $m = 3{,}5\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 1{,}2\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pot}} &= m \cdot g \cdot h \\ &= 3{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} \\ &\approx 41{,}2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Im aufgezogenen Gewicht stecken 41,2 J, gut hundertmal so viel wie in der Zugfeder einer Armbanduhr.

Bewegungsenergie (kinetische Energie)

(2.22) MEISTER

$$E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Die Geschwindigkeit zählt im Quadrat: doppelt so schnell heißt vierfache Energie.

E_{kin}	Bewegungsenergie	J
m	Masse	kg
v	Geschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gut zu wissen: Fällt ein Körper aus der Höhe h, wird Lageenergie zu Bewegungsenergie. Daraus folgt die Aufprallgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Aus 1 m Höhe sind das $4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; mit dieser Geschwindigkeit trifft auch der Hammer der genormten Stoßprüfung auf die Uhr.

BEISPIEL Eine Armbanduhr von 80 g trifft nach 1 m freiem Fall mit $4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf.

Gegeben: $m = 80\,\text{g}$; $v = 4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ &= \frac{80\,\text{g} \cdot \left(4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \\ &\approx 0{,}785\,\text{J} \end{aligned}$$

Beim Aufprall müssen 0,785 J aufgenommen werden. Das ist genau die Lageenergie der Uhr in 1 m Höhe.

Rotationsenergie

(2.23) MEISTER

$$E_{\text{rot}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

Bei drehenden Teilen tritt das Trägheitsmoment an die Stelle der Masse und die Winkelgeschwindigkeit an die Stelle der Geschwindigkeit.

E_{rot}	Rotationsenergie	J
J	Trägheitsmoment (um die Drehachse, Abschnitt 2.6)	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Gilt: J in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ und ω in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ergeben Joule.

BEISPIEL Eine Unruh mit $10\,\text{mg} \cdot \text{cm}^2$ schwingt mit 4 Hz und 270° Amplitude. Im Nulldurchgang dreht sie sich mit $118{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Gegeben: $J = 10\,\text{mg}\cdot\text{cm}^2$; $\omega = 118{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{J \cdot \omega^2}{2} \\ &= \frac{10\,\text{mg}\cdot\text{cm}^2 \cdot \left(118{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2} \\ &= \frac{10^{-9}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot \left(118{,}4\ \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{2} \\ &\approx 7{,}01\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

In der schwingenden Unruh stecken rund 7 µJ. Davon geht bei jeder Schwingung ein kleiner Teil durch Reibung verloren, den die Hemmung ersetzt.

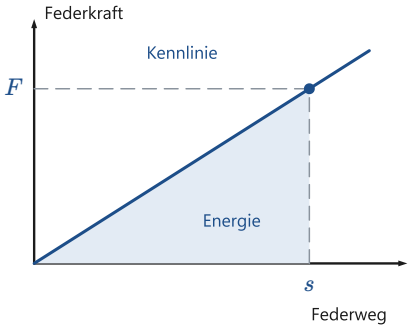


Abb. 2.9 Kennlinie einer Feder: Die Fläche unter der Kennlinie ist die gespeicherte Energie

Federkraft

(2.24) GESELLE

$$F = c \cdot s$$

Die Kraft einer Feder wächst im gleichen Verhältnis wie ihr Federweg. Die Federrate sagt, wie viel Kraft je Millimeter Weg nötig ist.

Gilt: elastischer Bereich und geradlinige Kennlinie, zum Beispiel Schraubenfedern und wenig gebogene Blattfedern.

F	Kraft	N
c	Federrate (Federkonstante; in Normen auch R)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$
s	Federweg (aus der entspannten Lage)	mm

BEISPIEL Eine Drückerfeder mit der Federrate 0,8 N je Millimeter wird um 2 mm zusammengedrückt.

Gegeben: $c = 0{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $s = 2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} F &= c \cdot s \\ &= 0{,}8\ \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot 2\,\mathrm{mm} \\ &= 1{,}6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Die Feder drückt mit 1,6 N zurück.

Energie einer gespannten Feder

(2.25) MEISTER

$$E_\mathrm{F} = \frac{c \cdot s^2}{2}$$

Beim Spannen wächst die Kraft von null auf den Endwert, im Mittel wirkt die halbe Endkraft. Die Energie ist die Dreiecksfläche unter der Kennlinie.

Gilt: wie bei der Federkraft; $1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{mm} = 1\,\mathrm{mJ}$.

E_F	Energie der gespannten Feder	mJ
c	Federrate	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$
s	Federweg (aus der entspannten Lage)	mm

BEISPIEL Wie viel Energie speichert die Drückerfeder aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $c = 0{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $s = 2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} E_\mathrm{F} &= \frac{c \cdot s^2}{2} \\ &= \frac{0{,}8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot (2\,\mathrm{mm})^2}{2} \\ &= 1{,}6\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

1,6 mJ. Bei doppeltem Federweg wäre es das Vierfache.

Energie einer Drehfeder

(2.26) MEISTER

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{D \cdot \varphi^2}{2}$$

Für Spiralfedern und andere Drehfedern mit geradliniger Kennlinie $M = D \cdot \varphi$ (Kapitel 5).

Gilt: elastischer Bereich; Winkel im Bogenmaß.

E_{F}	Energie der gespannten Feder	J
D	Richtmoment (Drehmoment je Winkel)	$\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$
φ	Verdrehwinkel (aus der Ruhelage, im Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Die Spiralfeder der Unruh aus dem Beispiel zur Rotationsenergie hat das Richtmoment 0,632 µN·m je Radiant. Wie viel Energie speichert sie im Umkehrpunkt bei 270° Amplitude, das sind 4,71 rad?

Gegeben: $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $\varphi = 4{,}71\ \mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{F}} &= \frac{D \cdot \varphi^2}{2} \\ &= \frac{0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}} \cdot (4{,}71\ \mathrm{rad})^2}{2} \\ &= \frac{0{,}632\ \mu\mathrm{N \cdot m} \cdot 4{,}71^2}{2} \\ &\approx 7{,}01\ \mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 7 µJ, so viel wie die Bewegungsenergie der Unruh im Nulldurchgang. Die Energie pendelt bei jeder Halbschwingung zwischen Spiralfeder und Unruh hin und her.

Leistung

(2.27) GESELLE

$$P = \frac{W}{t}$$

Leistung ist Arbeit je Zeit. Einheit: 1 W = 1 J je Sekunde.

P	Leistung	W
W	Arbeit	J
t	Zeit (in der die Arbeit verrichtet wird)	s

BEISPIEL Das Gewicht der Standuhr gibt seine 41,2 J gleichmäßig in 8 Tagen ab. Welche Leistung treibt die Uhr?

Gegeben: $W = 41{,}2\ \mathrm{J}$; $t = 8\ \mathrm{d}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{41{,}2\ \mathrm{J}}{8\ \mathrm{d}} \\ &= \frac{41{,}2\ \mathrm{J}}{691\,200\ \mathrm{s}} \\ &\approx 59{,}6\ \mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Knapp 60 µW, also 60 Millionstel Watt. Eine Armbanduhr kommt mit wenigen Mikrowatt aus.

Leistung bei Drehung

(2.28) MEISTER

$$P = M \cdot \omega$$

Leistung ist Drehmoment mal Winkelgeschwindigkeit. Mit der Drehzahl geschrieben gilt $P = 2\pi \cdot M \cdot n$, die Drehzahl in Umdrehungen je Sekunde.

P	Leistung	W
M	Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}m}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

BEISPIEL Ein Federhaus gibt 8 N·mm ab und dreht sich in 6 Stunden einmal, das sind $0{,}000\,291\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Gegeben: $M = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}; \quad \omega = 0{,}000\,291\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$$\begin{aligned} P &= M \cdot \omega \\ &= 8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 0{,}000\,291\ \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 2{,}33\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Das Federhaus liefert 2,33 µW. Ein schnelles Rad am Ende des Räderwerks überträgt, von den Verlusten abgesehen, dieselbe Leistung mit kleinem Drehmoment und hoher Drehzahl.

Wirkungsgrad

(2.29) GESELLE

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{zu}}}$$

Der Wirkungsgrad sagt, welcher Teil des Aufwands als Nutzen ankommt. Statt der Leistungen können auch Arbeiten oder Energien ins Verhältnis gesetzt werden.

η	Wirkungsgrad (immer kleiner als 1)	1
P_{ab}	abgegebene (nutzbare) Leistung	W
P_{zu}	zugeführte Leistung	W

BEISPIEL Das Federhaus gibt 2,33 µW in das Räderwerk, am Hemmungsrad kommen 1,63 µW an.

Gegeben: $P_{\mathrm{ab}} = 1{,}63\,\mu\mathrm{W}; \quad P_{\mathrm{zu}} = 2{,}33\,\mu\mathrm{W}$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{zu}}} \\ &= \frac{1{,}63\,\mu\mathrm{W}}{2{,}33\,\mu\mathrm{W}} \\ &\approx 0{,}70 \end{aligned}$$

Das Räderwerk hat einen Wirkungsgrad von 0,70 oder 70 %. Die übrigen 30 % werden in den Lagern und Eingriffen zu Wärme.

Gesamtwirkungsgrad

(2.30) MEISTER

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$

Liegen mehrere Stufen hintereinander, werden die einzelnen Wirkungsgrade multipliziert. Das gilt für beliebig viele Stufen.

Gilt: Stufen hintereinander geschaltet, jede bekommt nur, was die vorige abgibt.

η_{ges}	Gesamtwirkungsgrad	1
η_1	Wirkungsgrad der ersten Stufe	1
η_2	Wirkungsgrad der zweiten Stufe	1
η_3	Wirkungsgrad der dritten Stufe	1

BEISPIEL Angenommen, das Federhaus gibt 85 % der Federenergie weiter, das Räderwerk 70 % und die Hemmung 35 %. Welcher Teil erreicht die Unruh?

Gegeben: $\eta_1 = 0{,}85;\quad \eta_2 = 0{,}70;\quad \eta_3 = 0{,}35$

$$\begin{aligned}\eta_{\text{ges}} &= \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \\ &= 0{,}85 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}35 \\ &\approx 0{,}21\end{aligned}$$

Nur rund ein Fünftel der Federenergie kommt bei der Unruh an. Die Zahlen sind Größenordnungen; sie zeigen, warum saubere Lager und richtige Eingriffe so viel Amplitude bringen.

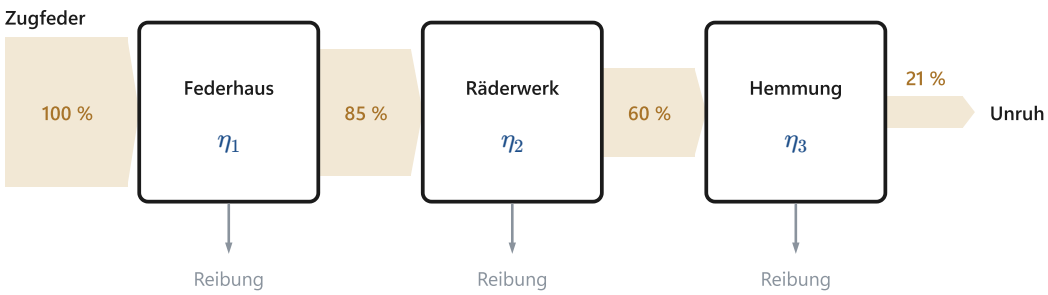


Abb. 2.10 Energiefluss von der Zugfeder zur Unruh mit den Wirkungsgraden aus dem Beispiel zu Formel (2.30)

2.5 Reibung

Reibung bremst jedes Lager und jeden Eingriff, sie hält aber auch Schrauben, Zeiger und Stellreibungen fest. Gerechnet wird mit der Reibungszahl der beiden Werkstoffe, die aufeinander gleiten.

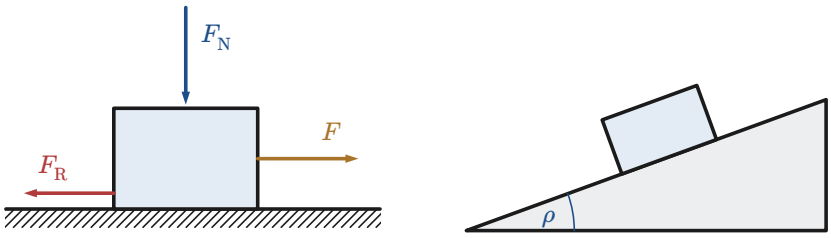


Abb. 2.11 Gleitreibung (links) und Reibungswinkel ρ (rechts)

Gleitreibung

(2.31) GESELLE

$$F_{\mathrm{R}} = \mu \cdot F_{\mathrm{N}}$$

Die Reibungskraft hängt von der Normalkraft und von der Werkstoffpaarung ab, nicht von der Größe der Berührfläche.

Gilt: trockene und dünn geölte Flächen. Trägt ein geschlossener Ölfilm, hängt die Reibung zusätzlich von Geschwindigkeit und Zähigkeit des Öls ab.

F_{R}	Reibungskraft (wirkt gegen die Bewegung)	N
μ	Reibungszahl (Gleitreibung, hängt von der Werkstoffpaarung ab)	1
F_{N}	Normalkraft (senkrecht auf die Berührfläche)	N

BEISPIEL Eine Stahlfeder drückt mit 2 N auf einen gleitenden Hebel aus Stahl. Die Stelle ist geölt, gerechnet wird mit der Reibungszahl 0,15.

Gegeben: $\mu = 0{,}15$; $F_{\mathrm{N}} = 2\,\mathrm{N}$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{R}} &= \mu \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &= 0{,}15 \cdot 2\,\mathrm{N} \\ &= 0{,}3\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Die Reibung bremst mit 0,3 N.

Haftreibung

(2.32) GESELLE

$$F_{\mathrm{R0}} = \mu_0 \cdot F_{\mathrm{N}}$$

Solange ein Körper ruht, hält ihn die Haftreibung fest. Sie ist so groß wie die angreifende Kraft, höchstens aber $\mu_0 \cdot F_{\mathrm{N}}$. Haften ist etwas stärker als Gleiten: Ein Teil braucht zum Losbrechen mehr Kraft als zum Weitergleiten.

F_{R0}	größte Haftreibungskraft (Losbrechkraft)	N
μ_0	Haftreibungszahl	1
F_{N}	Normalkraft	N

BEISPIEL Eine Schraube presst eine Brücke mit 150 N auf die Platine. Die Haftreibungszahl Messing auf Messing wird vorsichtig mit 0,2 angesetzt.

Gegeben: $\mu_0 = 0{,}2$; $F_{\mathrm{N}} = 150\,\mathrm{N}$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{R0}} &= \mu_0 \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &= 0{,}2 \cdot 150\,\mathrm{N} \\ &= 30\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Bis 30 N Querkraft hält allein die Reibung die Brücke fest. Die Stellstifte sichern zusätzlich ihre genaue Lage.

Gleitreibungszahlen μ (Richtwerte)

Paarung	trocken	geölt
Stahl gehärtet auf Rubin oder Saphir	0,12 … 0,25	0,05 … 0,15
Stahl gehärtet auf Messing	0,18 … 0,30	0,08 … 0,20
Stahl gehärtet auf Bronze	0,15 … 0,30	0,07 … 0,12
Stahl gehärtet auf Stahl gehärtet	0,15 … 0,35	0,05 … 0,12
Stahl auf Kunststoff (POM)	0,20 … 0,35	0,07 … 0,12
Stahl auf PTFE	0,05 … 0,15	–

Die Werte schwanken stark mit Oberflächengüte, Öl, Belastung und Geschwindigkeit. Die Haftreibungszahl liegt etwas höher. Übliche Rechenwerte für geölte Zapfenlager: 0,15 für Stahl in Rubin, 0,2 für Stahl in Messing.

Reibungswinkel

(2.33) MEISTER

$$\rho = \arctan \mu$$

UMGESTELLT $\mu = \tan \rho$

ρ	Reibungswinkel	°
μ	Reibungszahl	1

Der Reibungswinkel ist der Neigungswinkel einer schiefen Ebene, bei dem ein Körper gerade zu rutschen beginnt. Dort ist die Hangabtriebskraft so groß wie die Reibungskraft. Ist die Ebene flacher, bleibt der Körper liegen: Selbsthemmung.

Gilt: für den Beginn des Rutschens mit der Haftreibungszahl μ_0 rechnen, für das Weitergleiten mit μ.

BEISPIEL Wie groß ist der Reibungswinkel bei der Reibungszahl 0,15?

Gegeben: $\mu = 0{,}15$

$$\begin{aligned}\rho &= \arctan \mu \\ &= \arctan 0{,}15 \\ &\approx 8{,}53^\circ\end{aligned}$$

8,53°. Eine Fläche, die flacher als etwa 8,5° geneigt ist, hält ein Teil bei dieser Reibungszahl von selbst fest.

Schiefe Ebene, Keil und Gewinde mit Reibung

(2.34) VERTIEFUNG

$$F = F_\mathrm{Q} \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

F	Kraft (Verschiebekraft parallel zur Grundfläche, beim Gewinde Umfangskraft)	N
F_Q	Last senkrecht zur Grundfläche (beim Gewinde: Längskraft der Schraube)	N
α	Neigungswinkel (beim Gewinde: Steigungswinkel)	°
ρ	Reibungswinkel	°

Schiebt eine Kraft einen Körper eine schiefe Ebene hinauf, wirkt die Reibung wie ein um ρ steilerer Anstieg. Ein Gewinde ist eine um den Bolzen gewickelte schiefe Ebene, ein Keil eine verschiebbare.

Gilt: Bewegung gegen die Last (Anziehen, Eintreiben). Bei Spitzgewinde ist die wirksame Reibung wegen der schrägen Flanken etwas größer. Gleitet ein Keil zusätzlich auf einer zweiten Fläche, kommt deren Reibung hinzu.

Gut zu wissen: In Richtung der Last (Lösen) gilt $F = F_\mathrm{Q} \cdot \tan(\alpha - \rho)$. Ist α kleiner als ρ, wird diese Kraft negativ: Die Verbindung hält von selbst und muss aktiv gelöst werden. Befestigungsschrauben und Keile sind deshalb selbsthemmend.

BEISPIEL Ein Gewinde hat 3° Steigungswinkel, der Reibungswinkel beträgt 8,53°. Die Schraube soll mit 100 N spannen. Welche Umfangskraft ist beim Anziehen im Gewinde nötig?

Gegeben: $F_\mathrm{Q} = 100\,\mathrm{N}; \quad \alpha = 3^\circ; \quad \rho = 8{,}53^\circ$

$$\begin{aligned}F &= F_\mathrm{Q} \cdot \tan(\alpha + \rho) \\ &= 100\,\mathrm{N} \cdot \tan(3^\circ + 8{,}53^\circ) \\ &= 100\,\mathrm{N} \cdot \tan 11{,}53^\circ \\ &\approx 20{,}4\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

20,4 N. Ohne Reibung wären es nur 5,2 N: Der größte Teil der Anziehkraft geht in die Reibung, dazu kommt noch die Reibung unter dem Schraubenkopf.

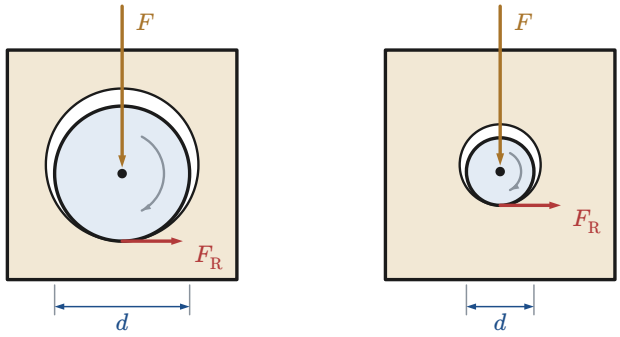


Abb. 2.12 Zapfenreibung: Bei gleicher Last hat die Reibungskraft am dünnen Zapfen den kleineren Hebelarm

Reibmoment im Zapfenlager

(2.35) MEISTER

$$M_\mathrm{R} = \frac{\mu \cdot F \cdot d}{2}$$

Die Reibungskraft greift am Umfang des Zapfens an, ihr Hebelarm ist der Zapfenradius. Ein dünner Zapfen bremst deshalb weniger als ein dicker.

Gilt: Zapfen mit Lagerspiel, der an einer Linie anliegt; Reibungszahl als Rechenwert.

M_R	Reibmoment (bremst die Drehung)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
μ	Reibungszahl (Zapfen im Lager)	1
F	Kraft (Lagerkraft quer zur Achse)	N
d	Durchmesser (des Zapfens)	mm

Gut zu wissen: Darum werden die Zapfen zum Ende des Räderwerks hin immer dünner: Dort ist das Drehmoment klein, und jedes Reibmoment zählt. Liegt die Uhr flach, läuft die Unruh auf der Stirnfläche eines Zapfens; der Hebelarm der Reibung ist dann noch kleiner und die Amplitude größer als in den hängenden Lagen.

BEISPIEL Ein Zapfen von 1,2 mm Durchmesser trägt 3 N und läuft geölt in Messing (Rechenwert der Reibungszahl 0,2).

Gegeben: $\mu = 0{,}2$; $F = 3\,\mathrm{N}$; $d = 1{,}2\,\mathrm{mm}$

$$M_\mathrm{R} = \frac{\mu \cdot F \cdot d}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 3\,\mathrm{N} \cdot 1{,}2\,\mathrm{mm}}{2} = 0{,}36\,\mathrm{N{\cdot}mm}$$

Die Reibung bremst mit 0,36 N·mm. Mit 0,6 mm Zapfendurchmesser wäre es bei gleicher Last nur die Hälfte.

Merksatz: Kleine Reibung braucht harte, glatte Flächen, wenig Normalkraft und einen kleinen Hebelarm.

2.6 Trägheitsmoment

Was die Masse für die geradlinige Bewegung ist, ist das Trägheitsmoment für die Drehung: der Widerstand gegen Beschleunigen und Abbremsen. Es hängt davon ab, wie weit die Masse von der Drehachse entfernt ist. In der Kleinuhr wird es in $\mathrm{mg \cdot cm^2}$ angegeben. Wie das Trägheitsmoment der Unruh die Schwingungsdauer bestimmt, steht in Kapitel 5.

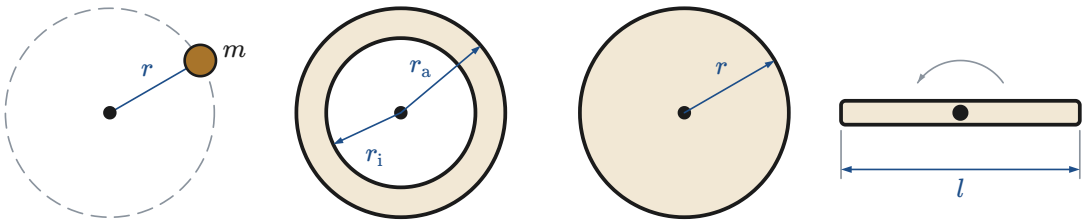


Abb. 2.13 Körper, deren Trägheitsmoment sich einfach berechnen lässt; die Drehachse steht senkrecht auf der Zeichenebene

Massenpunkt und dünner Reif

(2.36) MEISTER

$$J = m \cdot r^2$$

Jedes Massenteilchen zählt mit dem Quadrat seines Abstands von der Achse. Die Formel gilt auch für einen dünnen Reif, weil dort alle Masse denselben Abstand hat.

Gilt: Abmessungen der Masse klein gegenüber ihrem Abstand von der Achse; beim Reif Wandstärke klein gegenüber dem Radius.

J	Trägheitsmoment (um die Drehachse)	$\mathrm{mg \cdot cm^2}$
m	Masse	mg
r	Abstand (der Masse von der Drehachse)	mm

Gut zu wissen: Umrechnung: $1\,\mathrm{mg \cdot cm^2} = 10^{-10}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ und $1\,\mathrm{g \cdot cm^2} = 10^{-7}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Unruhen von Armbanduhren liegen bei etwa 2 bis $25\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$.

BEISPIEL Eine Regulierschraube von 5 mg sitzt 4,5 mm von der Unruhachse entfernt.

Gegeben: $m = 5\,\mathrm{mg}$; $r = 4{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &= m \cdot r^2 \\ &= 5\,\mathrm{mg} \cdot (4{,}5\,\mathrm{mm})^2 \\ &= 5\,\mathrm{mg} \cdot (0{,}45\,\mathrm{cm})^2 \\ &\approx 1{,}01\,\mathrm{mg \cdot cm^2} \end{aligned}$$

Die Schraube trägt rund $1\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$ bei. Bei einer Unruh von $10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$ sind das 10 %; deshalb wirken schon kleine Änderungen an den Schrauben deutlich auf den Gang.

Reif und Hohlzylinder

(2.37) MEISTER

$$J = \frac{m \cdot \left(r_\mathrm{a}^2 + r_\mathrm{i}^2\right)}{2}$$

Der Reif der Unruh ist ein Hohlzylinder. Weil seine ganze Masse weit außen liegt, liefert er fast das gesamte Trägheitsmoment der Unruh.

Gilt: gleichmäßig dichter Werkstoff, Drehachse ist die Mittelachse.

J	Trägheitsmoment (um die Mittelachse)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
m	Masse (des Reifs)	mg
r_a	Außenradius	mm
r_i	Innenradius	mm

BEISPIEL Ein Unruhreif hat 9 mm Außen- und 8 mm Innendurchmesser und wiegt 55 mg.

Gegeben: $m = 55\,\mathrm{mg}$; $r_\mathrm{a} = 4{,}5\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 4\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{m \cdot \left(r_\mathrm{a}^2 + r_\mathrm{i}^2\right)}{2} \\ &= \frac{55\,\mathrm{mg} \cdot \left((4{,}5\,\mathrm{mm})^2 + (4\,\mathrm{mm})^2\right)}{2} \\ &= \frac{55\,\mathrm{mg} \cdot (0{,}2025 + 0{,}16)\ \mathrm{cm}^2}{2} \\ &\approx 9{,}97\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \end{aligned}$$

Der Reif allein hat $9{,}97\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$. Die Näherung als dünner Reif mit dem mittleren Radius 4,25 mm ergibt $9{,}93\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$, also fast dasselbe.

Vollscheibe und Zylinder

(2.38) MEISTER

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

Eine Scheibe hat nur das halbe Trägheitsmoment eines dünnen Reifs gleicher Masse und gleichen Durchmessers, weil ein großer Teil ihrer Masse nahe der Achse liegt.

Gilt: gleichmäßig dichter Werkstoff, Drehachse ist die Mittelachse; die Dicke spielt keine Rolle.

J	Trägheitsmoment (um die Mittelachse)	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$
m	Masse	kg
r	Radius	m

BEISPIEL Eine scheibenförmige Pendellinse hat 1,2 kg Masse und 60 mm Radius. Wie groß ist ihr Trägheitsmoment um die eigene Mitte?

Gegeben: $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$; $r = 60\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{m \cdot r^2}{2} \\ &= \frac{1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot (60\,\mathrm{mm})^2}{2} \\ &= 0{,}002\,16\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} \end{aligned}$$

Mit diesem Wert wird in Abschnitt 6.3 das Pendel berechnet.

Dünner Stab um seine Mitte

(2.39) MEISTER

$$J = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

Für Schenkel, Stege und Zeiger, die sich quer zu ihrer Länge drehen.

Gilt: Stab dünn gegenüber seiner Länge, gleichmäßiger Querschnitt.

J	Trägheitsmoment (um die Querachse durch die Stabmitte)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
m	Masse (des Stabs)	mg
l	Länge (ganze Länge des Stabs)	mm

Gut zu wissen: Dreht sich der Stab um sein Ende, wie ein Zeiger ohne Gegengewicht, ist das Trägheitsmoment viermal so groß: $J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$.

BEISPIEL Der Schenkel einer zweischenkligen Unruh ist 8 mm lang und wiegt 6 mg.

Gegeben: $m = 6\,\mathrm{mg}$; $l = 8\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{m \cdot l^2}{12} \\ &= \frac{6\,\mathrm{mg} \cdot (8\,\mathrm{mm})^2}{12} \\ &= 0{,}32\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \end{aligned}$$

Der Schenkel trägt nur $0{,}32\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$ bei, rund 3 % dessen, was der Reif aus dem Beispiel davor liefert.

Satz von Steiner

(2.40) MEISTER

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + m \cdot a^2$$

Liegt die Drehachse nicht im Schwerpunkt, kommt der Anteil Masse mal Abstand im Quadrat hinzu. Für zusammengesetzte Teile werden die Anteile aller Bauteile addiert. Die Anwendung auf das Pendel steht in Abschnitt 6.3.

Gilt: beide Achsen parallel; eine davon geht durch den Schwerpunkt.

J_A	Trägheitsmoment um die Drehachse	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
J_S	Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
m	Masse (des Bauteils)	mg
a	Abstand (der beiden Achsen)	mm

BEISPIEL Ein Minutenzeiger (20 mg, 12 mm lang, gleichmäßig) dreht sich um sein Ende. Um seine Mitte hat er $J_\mathrm{S} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 = 2{,}4\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$, der Schwerpunkt liegt 6 mm von der Drehachse.

Gegeben: $J_\mathrm{S} = 2{,}4\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$; $m = 20\,\mathrm{mg}$; $a = 6\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J_\mathrm{A} &= J_\mathrm{S} + m \cdot a^2 \\ &= 2{,}4\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} + 20\,\mathrm{mg} \cdot (6\,\mathrm{mm})^2 \\ &= 2{,}4\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} + 7{,}2\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \\ &= 9{,}6\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \end{aligned}$$

$9{,}6\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$, das Vierfache des Werts um die Mitte. Ein Minutenzeiger kann also so träge sein wie eine ganze Unruh.

Merksatz: Masse außen macht träge: Der Abstand von der Achse zählt im Quadrat.

2.7 Festigkeit und Elastizität

Jedes belastete Teil verformt sich. Bleibt die Spannung klein genug, federt es vollständig zurück; davon leben alle Federn der Uhr. Wird sie zu groß, verbiegt sich das Teil bleibend oder bricht.

Zug- und Druckspannung

(2.41) GESELLE

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Spannung ist die Kraft je Querschnittsfläche. Sie sagt, wie stark der Werkstoff beansprucht ist, unabhängig von der Größe des Teils. Umrechnung: $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} = 1\,\mathrm{MPa}$.

Gilt: Kraft in Richtung der Stabachse, gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.

σ	Spannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
F	Kraft (Zug oder Druck)	N
A	Fläche (Querschnitt quer zur Kraft)	$\mathrm{mm^2}$

BEISPIEL Das Antriebsgewicht (34,3 N) hängt an einem Stahldraht von 1 mm Durchmesser, also 0,785 mm² Querschnitt.

Gegeben: $F = 34{,}3\,\mathrm{N}; \quad A = 0{,}785\,\mathrm{mm^2}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{34{,}3\,\mathrm{N}}{0{,}785\,\mathrm{mm^2}} \\ &\approx 43{,}7\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}\end{aligned}$$

Im Draht herrschen $43{,}7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, weit unter der Festigkeit von Stahl.

Dehnung

(2.42) GESELLE

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Die Dehnung ist eine Verhältniszahl ohne Einheit, oft in Prozent angegeben.

ε	Dehnung (Längenänderung je Länge)	1
Δl	Längenänderung (+ heißt: länger)	mm
l_0	Ausgangslänge (ohne Last)	mm

BEISPIEL Ein Draht von 1200 mm Länge wird unter Last 0,25 mm länger.

Gegeben: $\Delta l = 0{,}25\,\mathrm{mm}; \quad l_0 = 1200\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta l}{l_0} \\ &= \frac{0{,}25\,\mathrm{mm}}{1200\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 0{,}0208\,\%\end{aligned}$$

Der Draht dehnt sich um 0,0208 %, also um rund zwei Zehntausendstel seiner Länge.

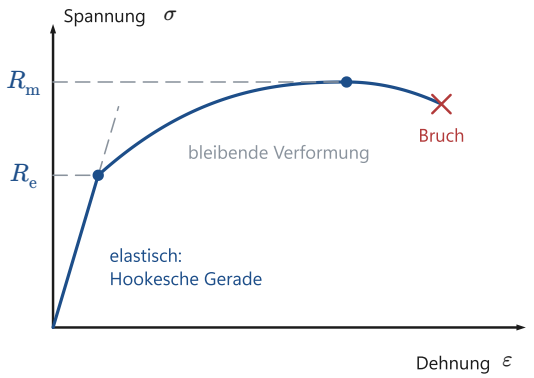


Abb. 2.14 Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines zähen Metalls (schematisch): bis R_e elastisch, höchste Spannung R_m

Hookesches Gesetz

(2.43) GESELLE

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

UMGESTELLT $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

σ	Spannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
E	Elastizitätsmodul (des Werkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
ε	Dehnung	1

Im elastischen Bereich wächst die Spannung im gleichen Verhältnis wie die Dehnung. Der Elastizitätsmodul ist die Steifigkeit des Werkstoffs: Stahl ist doppelt so steif wie Messing.

Gilt: nur bis zur Streckgrenze R_e. Darüber verformt sich das Teil bleibend. Die Zugfestigkeit R_m ist die höchste Spannung, die der Werkstoff erträgt.

BEISPIEL Wie stark dehnt sich der Stahldraht aus dem Beispiel zur Spannung ($\sigma = 43{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $E = 210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$)?

Gegeben: $\sigma = 43{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$; $E = 210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\\ &= \frac{43{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}\\ &\approx 0{,}0208\,\%\end{aligned}$$

Um 0,0208 %. Ein Draht von 1,2 m Länge wird also 0,25 mm länger und federt nach dem Entlasten wieder ganz zurück.

Zulässige Spannung und Sicherheit

(2.44) MEISTER

$$\sigma_\mathrm{zul} = \frac{R_\mathrm{e}}{\nu}$$

σ_zul	zulässige Spannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
R_e	Streckgrenze (bei harten Werkstoffen die 0,2-%-Dehngrenze $R_{\mathrm{p0,2}}$)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
ν	Sicherheitszahl (üblich 1,2 bis 2)	1

Ein Teil soll sich im Betrieb nicht bleibend verformen. Deshalb bleibt man mit der Spannung um einen Sicherheitsabstand unter der Streckgrenze. Soll das Teil nur nicht brechen, rechnet man entsprechend mit der Zugfestigkeit.

Gilt: ruhende Belastung. Bei ständig wechselnder Belastung ermüdet der Werkstoff und verträgt deutlich weniger.

BEISPIEL Ein Federstahl hat die Dehngrenze $1500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Gerechnet wird mit 1,5-facher Sicherheit.

Gegeben: $R_\mathrm{e} = 1500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$; $\nu = 1{,}5$

$$\begin{aligned}\sigma_\mathrm{zul} &= \frac{R_\mathrm{e}}{\nu}\\ &= \frac{1500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{1{,}5}\\ &= 1000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

Die Feder darf bis $1000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ belastet werden.

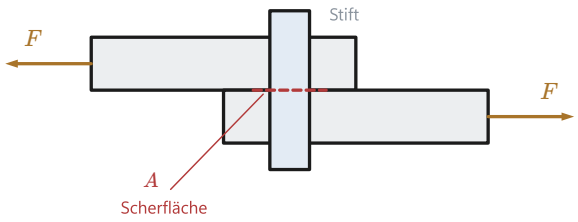


Abb. 2.15 Abscherung eines Stifts in der Trennfuge

Abscherung

(2.45) MEISTER

$$\tau = \frac{F}{A}$$

τ	Scherspannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
F	Kraft (quer zum Stift)	N
A	Fläche (Scherfläche: Querschnitt in der Trennfuge)	mm^2

Bei Stiften, Nieten und Schrauben unter Querkraft wird der Querschnitt in der Trennfuge abgeschert. Die Spannung liegt dann in der Fläche, nicht senkrecht zu ihr.

Gilt: eine Scherfläche (einschnittige Verbindung). Sitzt der Stift in einer Gabel, tragen zwei Scherflächen: A doppelt ansetzen.

Gut zu wissen: Richtwert für Stahl: Die Scherfestigkeit beträgt rund 80 % der Zugfestigkeit.

BEISPIEL Ein Stahlstift von 0,8 mm Durchmesser (0,503 mm² Querschnitt) verbindet zwei Teile und wird quer mit 60 N belastet.

Gegeben: $F = 60\,\mathrm{N}; \quad A = 0{,}503\,\mathrm{mm}^2$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{60\,\mathrm{N}}{0{,}503\,\mathrm{mm}^2} \\ &\approx 119\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

$119\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Ein weicher Stahlstift hält etwa das Dreifache aus.

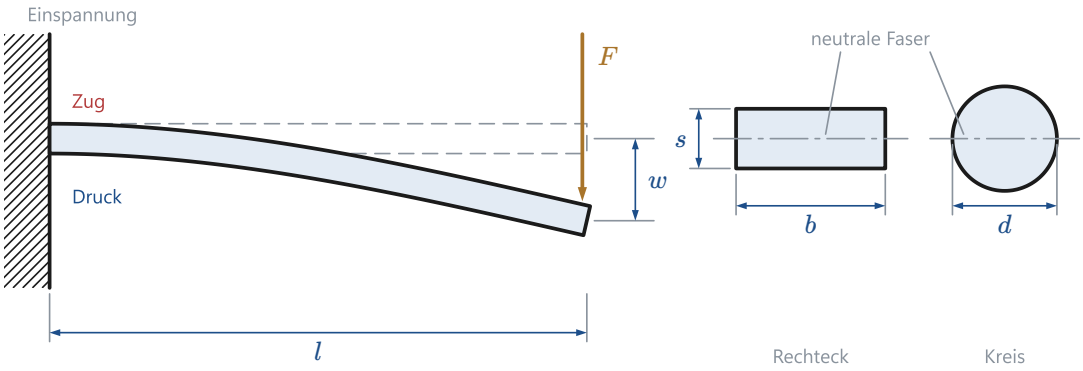


Abb. 2.16 Einseitig eingespannter Stab unter der Kraft F (links); Querschnitte mit neutraler Faser (rechts)

Biegespannung

(2.46) MEISTER

$$\sigma_\mathrm{b} = \frac{M_\mathrm{b}}{W_\mathrm{b}}$$

Beim Biegen wird eine Seite gedehnt und die andere gestaucht, dazwischen liegt die spannungsfreie neutrale Faser. Die größte Spannung sitzt außen am Rand. Beim einseitig eingespannten Stab mit der Kraft F am Ende ist das Biegemoment an der Einspannung am größten: $M_\mathrm{b} = F \cdot l$. Dort verbiegt sich oder bricht eine Feder zuerst.

Gilt: elastischer Bereich, gerader Stab, Querschnitt symmetrisch zur neutralen Faser.

σ_b	größte Biegespannung (in der Randfaser)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
M_b	Biegemoment (an der betrachteten Stelle)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
W_b	Widerstandsmoment gegen Biegung	mm^3

BEISPIEL Eine Blattfeder (1 mm hoch, 0,2 mm stark) ist 10 mm lang und wird am Ende mit 0,42 N belastet. An der Einspannung wirkt das Biegemoment 0,42 N · 10 mm = 4,2 N·mm; das Widerstandsmoment beträgt 0,00667 mm³.

Gegeben: $M_\mathrm{b} = 4{,}2\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $W_\mathrm{b} = 0{,}006\,67\,\mathrm{mm}^3$

$$\begin{aligned}\sigma_\mathrm{b} &= \frac{M_\mathrm{b}}{W_\mathrm{b}} \\ &= \frac{4{,}2\,\mathrm{N{\cdot}mm}}{0{,}006\,67\,\mathrm{mm}^3} \\ &\approx 630\ \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

$630\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Gehärteter Federstahl verträgt das, weiches Messing wäre längst bleibend verbogen.

Widerstandsmoment: Rechteck

(2.47) MEISTER

$$W_\mathrm{b} = \frac{b \cdot s^2}{6}$$

Das Widerstandsmoment sagt, wie viel Biegemoment ein Querschnitt bei gegebener Spannung trägt.

Gilt: Biegung über die flache Seite, wie bei jeder Blatt-, Zug- und Spiralfeder.

W_b	Widerstandsmoment gegen Biegung	mm^3
b	Klingenhöhe (Breite des Rechtecks quer zur Biegerichtung)	mm
s	Klingenstärke (Stärke in Biegerichtung)	mm

BEISPIEL Blattfeder mit 1 mm Höhe und 0,2 mm Stärke.

Gegeben: $b = 1\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}W_\mathrm{b} &= \frac{b \cdot s^2}{6} \\ &= \frac{1\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}2\,\mathrm{mm})^2}{6} \\ &\approx 0{,}006\,67\,\mathrm{mm}^3\end{aligned}$$

0,00667 mm³. Mit 0,3 mm Stärke wäre es das 2,25-Fache: Die Stärke zählt im Quadrat.

Widerstandsmoment: Kreis

(2.48) MEISTER

$$W_\mathrm{b} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

Für Wellen, Zapfen, Stifte und runde Federdrähte.

W_b	Widerstandsmoment gegen Biegung	mm^3
d	Durchmesser	mm

BEISPIEL Runder Draht oder Zapfen mit 1 mm Durchmesser.

Gegeben: $d = 1\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} W_\mathrm{b} &= \frac{\pi \cdot d^3}{32} \\ &= \frac{\pi \cdot (1\,\mathrm{mm})^3}{32} \\ &\approx 0{,}0982\,\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

0,0982 mm³. Ein Zapfen von 0,5 mm Durchmesser hat nur ein Achtel davon: Der Durchmesser zählt in der dritten Potenz. Darum brechen dünne Zapfen so leicht.

Flächenträgheitsmoment: Rechteck

(2.49) MEISTER

$$I = \frac{b \cdot s^3}{12}$$

Das Flächenträgheitsmoment beschreibt, wie steif ein Querschnitt gegen Biegung ist. Die Stärke geht mit der dritten Potenz ein: 10 % mehr Stärke machen eine Feder um ein Drittel steifer. Das ist der Grund, warum Zug- und Spiralfedern auf Tausendstelmillimeter genau gewalzt werden.

Gilt: Biegung über die flache Seite.

I	Flächenträgheitsmoment (Flächenmoment 2. Grades)	mm^4
b	Klingenhöhe (Breite des Rechtecks quer zur Biegerichtung)	mm
s	Klingenstärke (Stärke in Biegerichtung)	mm

Aber Vorsicht: Das Flächenträgheitsmoment I (Einheit mm⁴) beschreibt einen Querschnitt. Es hat nichts mit dem Trägheitsmoment J einer drehenden Masse aus Abschnitt 2.6 zu tun.

BEISPIEL Blattfeder mit 1 mm Höhe und 0,2 mm Stärke.

Gegeben: $b = 1\,\mathrm{mm}; \quad s = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{b \cdot s^3}{12} \\ &= \frac{1\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}2\,\mathrm{mm})^3}{12} \\ &\approx 0{,}000\,667\,\mathrm{mm}^4 \end{aligned}$$

0,000667 mm⁴. Eine Feder von nur 0,1 mm Stärke hätte bei gleicher Höhe ein Achtel davon.

Flächenträgheitsmoment: Kreis

(2.50) MEISTER

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

I	Flächenträgheitsmoment	mm^4
d	Durchmesser	mm

Der Durchmesser zählt in der vierten Potenz.

BEISPIEL Runder Draht mit 1 mm Durchmesser.

Gegeben: $d = 1\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi \cdot d^4}{64} \\ &= \frac{\pi \cdot (1\,\mathrm{mm})^4}{64} \\ &\approx 0{,}0491\,\mathrm{mm}^4 \end{aligned}$$

0,0491 mm⁴. Bei halbem Durchmesser bleibt nur ein Sechzehntel.

Durchbiegung des einseitig eingespannten Stabs

(2.51) MEISTER

$$w = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

w	Durchbiegung am freien Ende (in Tabellenbüchern oft f)	mm
F	Kraft (am freien Ende, quer zum Stab)	N
l	Länge (frei, von der Einspannung bis zur Kraft)	mm
E	Elastizitätsmodul (des Werkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
I	Flächenträgheitsmoment	mm^4

Das ist die Grundformel aller Blattfedern: Sperrfedern, Rastfedern, Drückerfedern. Die Länge zählt in der dritten Potenz, eine doppelt so lange Feder ist achtmal so weich.

Gilt: elastischer Bereich, gleichbleibender Querschnitt, Durchbiegung klein gegenüber der Länge.

BEISPIEL Die Blattfeder aus Stahl ($E = 210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$) mit $I = 0{,}000\,667\,\mathrm{mm}^4$ ist 10 mm lang und wird am Ende mit 0,42 N belastet.

Gegeben: $F = 0{,}42\,\mathrm{N}$; $l = 10\,\mathrm{mm}$; $E = 210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$; $I = 0{,}000\,667\,\mathrm{mm}^4$

$$\begin{aligned} w &= \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \\ &= \frac{0{,}42\,\mathrm{N} \cdot (10\,\mathrm{mm})^3}{3 \cdot 210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot 0{,}000\,667\,\mathrm{mm}^4} \\ &\approx 1{,}00\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Federende gibt um 1 mm nach.

Federrate der Blattfeder

(2.52) VERTIEFUNG

$$c = \frac{E \cdot b \cdot s^3}{4 \cdot l^3}$$

Die Formel fasst Durchbiegung und Flächenträgheitsmoment des Rechtecks zusammen. Sie zeigt, womit eine Feder weicher wird: am stärksten durch weniger Stärke und mehr Länge, durch weniger Höhe nur im einfachen Verhältnis.

Gilt: einseitig eingespannte Blattfeder mit gleichbleibendem Rechteckquerschnitt, kleine Durchbiegung.

c	Federrate (am freien Ende)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$
E	Elastizitätsmodul (des Werkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
b	Klingenhöhe	mm
s	Klingenstärke	mm
l	Länge (frei, von der Einspannung bis zur Kraft)	mm

Gut zu wissen: Die Biegespannung an der Einspannung folgt aus dem Federweg: $\sigma_\mathrm{b} = \frac{3 \cdot E \cdot s \cdot w}{2 \cdot l^2}$. Eine dünnere oder längere Feder verträgt bei gleicher Spannung mehr Weg.

BEISPIEL Blattfeder aus Stahl, 1 mm hoch, 0,2 mm stark, 10 mm lang.

Gegeben: $E = 210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}2\,\mathrm{mm}$; $l = 10\,\mathrm{mm}$

$$c = \frac{E \cdot b \cdot s^3}{4 \cdot l^3}$$

$$= \frac{210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 1\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}2\,\mathrm{mm})^3}{4 \cdot (10\,\mathrm{mm})^3}$$

$$= 0{,}42\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

0,42 N je Millimeter Federweg. Wird die Feder auf 0,15 mm Stärke abgezogen, bleiben davon nur 42 %.

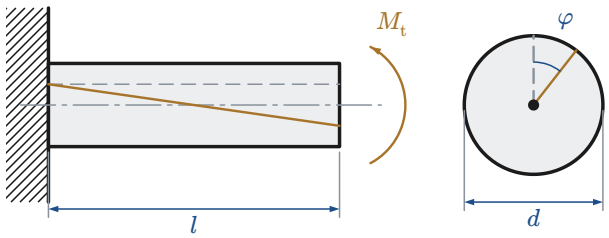


Abb. 2.17 Torsion: Das Moment M_t verdreht das freie Ende um den Winkel φ

Torsion: Spannung in einer runden Welle

(2.53) VERTIEFUNG

$$\tau_t = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$$

Ein Drehmoment um die Längsachse verdreht die Welle. Die Spannung ist am Umfang am größten und in der Mitte null.

Gilt: runder Vollquerschnitt, elastischer Bereich.

τ_t	größte Torsionsspannung (am Umfang)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
M_t	Torsionsmoment (Drehmoment um die Längsachse)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
d	Durchmesser	mm

BEISPIEL Eine Aufzugwelle überträgt 10 N·mm über einen Ansatz von 1 mm Durchmesser.

Gegeben: $M_t = 10\,\mathrm{N{\cdot}mm}; \quad d = 1\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\tau_t &= \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \\ &= \frac{16 \cdot 10\,\mathrm{N{\cdot}mm}}{\pi \cdot (1\,\mathrm{mm})^3} \\ &\approx 50{,}9\ \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

Rund $51\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, für gehärteten Stahl kein Problem. Am Vierkant und an Einstichen ist die Spannung örtlich aber deutlich höher; dort brechen Aufzugwellen.

Torsion: Verdrehwinkel

(2.54) VERTIEFUNG

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4}$$

Ein runder Draht wirkt als Drehfeder. Der Durchmesser zählt in der vierten Potenz: Ein nur 10 % dünnerer Draht verdreht sich um die Hälfte mehr.

Gilt: runder Vollquerschnitt, elastischer Bereich. Für flache Bänder, wie sie Drehpendeluhren als Torsionsfeder haben, gelten andere Beiwerte.

φ	Verdrehwinkel (zwischen den Enden, im Bogenmaß)	rad
M_t	Torsionsmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
l	Länge (verdrehter Abschnitt)	mm
G	Schubmodul (des Werkstoffs; hier nicht der Gang)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
d	Durchmesser	mm

BEISPIEL Der Ansatz der Aufzugwelle (1 mm Durchmesser) ist 10 mm lang, Stahl mit $G = 80\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, Drehmoment 10 N·mm.

Gegeben: $M_t = 10\,\mathrm{N{\cdot}mm}; \quad l = 10\,\mathrm{mm}; \quad G = 80\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}; \quad d = 1\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot d^4} \\ &= \frac{32 \cdot 10\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 10\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot 80\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot (1\,\mathrm{mm})^4} \\ &= 0{,}0127\,\mathrm{rad} \\ &\approx 0{,}73^\circ\end{aligned}$$

Die Welle verdreht sich um 0,73°, das spürt man beim Aufziehen nicht.

Elastizitätsmodul, Schubmodul und Zugfestigkeit von Uhrenwerkstoffen (Richtwerte bei 20 °C)

Werkstoff	E in 1000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$	G in 1000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$	R_m in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
Stahl, unlegiert, weich	210	80	350 … 700
Federstahl, gehärtet und angelassen	206 … 210	80	1500 … 2200
Kobalt-Nickel-Chrom-Federlegierung (Nivaflex)	200 … 225	75 … 85	2400 … 3200
Nichtrostender Stahl 1.4435 (316L)	200	77	500 … 700
Messing (CuZn37, CuZn39Pb3), hart	95 … 110	36 … 40	400 … 550
Neusilber (CuNi18Zn20), hart	125 … 135	47 … 50	500 … 700
Berylliumbronze (CuBe2), ausgehärtet	125 … 135	48 … 50	1100 … 1400
Titan Grade 5	114	42	900 … 1000
Silizium, einkristallin	130 … 190	50 … 80	spröde
Rubin, Saphir	350 … 450	150 … 175	spröde

Der Elastizitätsmodul hängt kaum vom Härtezustand ab, die Festigkeit dagegen stark. Silizium ist je nach Kristallrichtung verschieden steif. Spröde Werkstoffe brechen ohne bleibende Verformung; ihre Festigkeit hängt vor allem von der Oberfläche ab. Für die meisten Metalle gilt $G \approx 0{,}38 \cdot E$.

2.8 Wärmeausdehnung

Wärme macht Teile größer. In der Uhr verändert das Passungen, die Länge des Pendels und die Abmessungen von Unruh und Spirale.

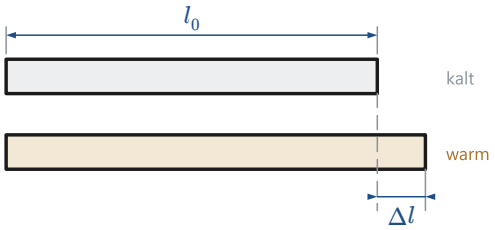


Abb. 2.18 Längenausdehnung beim Erwärmen

Längenausdehnung

(2.55) GESELLE

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\vartheta$$

Fast alle Werkstoffe dehnen sich beim Erwärmen aus, und zwar in jeder Richtung um denselben Bruchteil. Auch Bohrungen und Innendurchmesser werden größer.

Gilt: Temperaturänderungen bis etwa 100 K; darüber ändert sich α merklich. Eine Temperaturdifferenz in °C hat denselben Zahlenwert wie in K.

Δl	Längenänderung (+ heißt: länger)	mm
α	Längenausdehnungskoeffizient (des Werkstoffs)	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
l_0	Ausgangslänge (auch ein Durchmesser)	mm
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung (+ heißt: wärmer)	K

BEISPIEL Ein Messingreif ($\alpha = 19 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$) mit 30 mm Innendurchmesser wird um 100 K erwärmt. Um wie viel wächst der Durchmesser?

Gegeben: $\alpha = 19 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\quad l_0 = 30\,\mathrm{mm}$; $\quad \Delta\vartheta = 100\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\Delta l &= \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\vartheta \\ &= 19 \cdot 10^{-6}\ \tfrac{1}{\mathrm{K}} \cdot 30\,\mathrm{mm} \cdot 100\,\mathrm{K} \\ &= 0{,}057\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

Um 0,057 mm, also knapp 6 Hundertstel. Das genügt, um einen Reif aufzuschrumpfen: warm aufschieben, beim Abkühlen sitzt er fest.

Längenausdehnungskoeffizienten (Richtwerte bei 20 °C)

Werkstoff	α in $10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$
Zink	30
Aluminium	23
Silber	19
Messing	18 … 21
Neusilber	17 … 18
Berylliumbronze (CuBe2)	17
Nichtrostender Stahl 1.4435 (316L)	16
Gold	14
Stahl, unlegiert	11 … 13
Platin	9
Titan	8,5 … 9
Mineralglas	8 … 9
Saphir, Rubin	5 … 7
Silizium	2,6
Invar (FeNi36)	1,2 … 2
Quarzglas	0,5

Die Werte schwanken mit Legierung und Wärmebehandlung. Wie sich die Ausdehnung der Pendelstange auf den Gang auswirkt, steht in Abschnitt 6.5.

Volumenausdehnung

(2.56) MEISTER

$$\Delta V = \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta\vartheta$$

ΔV	Volumenänderung (+ heißt: größer)	cm^3
γ	Volumenausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
V_0	Ausgangsvolumen	cm^3
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung (+ heißt: wärmer)	K

Für feste Körper ist der Volumenausdehnungskoeffizient das Dreifache des Längenausdehnungskoeffizienten: $\gamma \approx 3 \cdot \alpha$.

Flüssigkeiten dehnen sich viel stärker aus, Öle um rund $700 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$.

Gilt: kleine Temperaturänderungen.

BEISPIEL Das Gefäß eines Quecksilberpendels enthält 100 cm³ Quecksilber ($\gamma = 181 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$). Die Temperatur steigt um 10 K.

Gegeben: $\gamma = 181 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$; $V_0 = 100\,\mathrm{cm}^3$; $\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\Delta V &= \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta\vartheta \\ &= 181 \cdot 10^{-6}\,\tfrac{1}{\mathrm{K}} \cdot 100\,\mathrm{cm}^3 \cdot 10\,\mathrm{K} \\ &= 0{,}181\,\mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

Das Quecksilber dehnt sich um 0,181 cm³ aus und steigt im Gefäß. Sein Schwerpunkt wandert nach oben und gleicht aus, dass die Pendelstange länger wird.

3 Antrieb

Der Antrieb liefert die Energie, die Räderwerk, Hemmung und Gangregler verbrauchen. In der Kleinuhr und in vielen Großuhren speichert sie eine Zugfeder im Federhaus, in der Pendeluhr oft ein Gewicht. Die Feder ist kompakt, ihr Drehmoment lässt beim Ablauf aber nach. Das Gewicht braucht Fallhöhe und zieht dafür immer gleich stark.

Gerechnet wird mit den Einheiten der Werkstatt: Maße in mm, Kräfte in N, Drehmomente in $\mathrm{N} \cdot \mathrm{mm}$. Wie das Drehmoment durch das Räderwerk zur Hemmung gelangt, steht in Kapitel 4. Abweichend von der sonstigen Belegung steht P in diesem Kapitel für die Leistung und m für die Masse des Gewichts; N zählt Windungen, Umgänge und Umdrehungen.

3.1 Zugfeder im Federhaus: Geometrie

Die Zugfeder liegt als Paket im Federhaus: abgelaufen an der Wand, aufgezogen um den Federkern. Für die Rechnung denken wir uns die Windungen dicht an dicht. Dann bedeckt die Feder in beiden Lagen dieselbe Fläche, nämlich Länge mal Klingenstärke. Daraus folgen alle Formeln dieses Abschnitts.

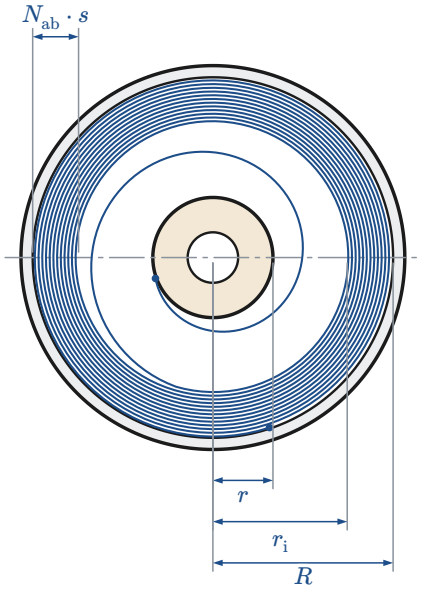


Abb. 3.1 Abgelaufen: Das Paket liegt an der Wand und reicht innen bis r_{i}

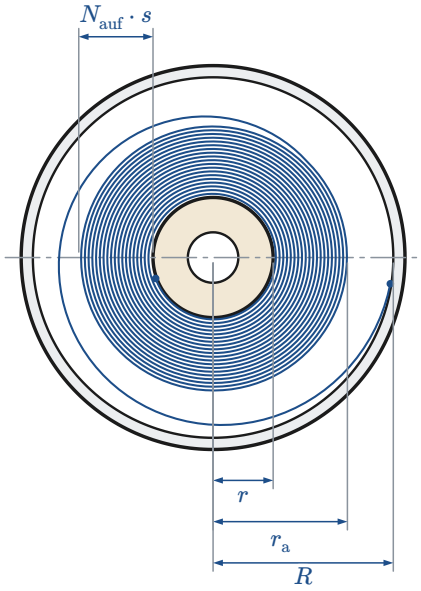


Abb. 3.2 Aufgezogen: Das Paket liegt am Kern und reicht außen bis r_{a}

Radius des Federkerns (Richtwert)

(3.1) NÄHERUNG GESELLE

$$r \approx \frac{R}{3}$$

r	Radius (des Federkerns)	mm
R	Innenradius (des Federhauses)	mm

Der Federkern nimmt etwa ein Drittel des Innenradius ein. Ein dünnerer Kern brächte mehr Umgänge, biegt die innerste Windung aber zu scharf.

Gilt: Richtwert für Klein- und Großuhren.

Gut zu wissen: Zweite Bedingung: Der Kernradius soll je nach Federwerkstoff mindestens etwa das 10- bis 16-Fache der Klingenstärke betragen (Richtwert). Ein dünnerer Kern biegt die Feder zu scharf; sie ermüdet am Kern und bricht dort.

BEISPIEL Ein Federhaus hat innen 11,4 mm Durchmesser, also 5,7 mm Radius. Wie groß soll der Radius des Federkerns sein?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{R}{3} \\ &= \frac{5{,}7\,\mathrm{mm}}{3} \\ &= 1{,}9\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kern bekommt rund 1,9 mm Radius, also 3,8 mm Durchmesser. Mit einer Klinge von 0,12 mm ist das knapp das 16-Fache der Klingenstärke.

Windungen der aufgezogenen Feder

(3.2) MEISTER

$$N_{\text{auf}} = \frac{\sqrt{r^2 + \dfrac{l \cdot s}{\pi}} - r}{s}$$

N_{auf}	Windungen der aufgezogenen Feder (am Kern)	1
r	Radius (des Federkerns)	mm
l	Länge (der Zugfeder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm

Die Wurzel ist der Außenradius r_{a} des aufgezogenen Pakets. Er folgt aus der Flächengleichheit $l \cdot s = \pi \cdot (r_{\text{a}}^2 - r^2)$. Die Paketbreite $r_{\text{a}} - r$ geteilt durch die Klingenstärke ergibt die Windungen.

Gilt: Windungen liegen dicht aneinander; Federenden, Haken und Zaum nicht mitgerechnet.

BEISPIEL Eine Zugfeder von 420 mm Länge und 0,12 mm Klingenstärke liegt aufgezogen um einen Kern mit 1,9 mm Radius. Wie viele Windungen hat das Paket?

Gegeben: $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}; \quad l = 420\,\mathrm{mm}; \quad s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\text{auf}} &= \frac{\sqrt{r^2 + \dfrac{l \cdot s}{\pi}} - r}{s} \\ &= \frac{\sqrt{(1{,}9\,\mathrm{mm})^2 + \dfrac{420\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}{\pi}} - 1{,}9\,\mathrm{mm}}{0{,}12\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 21{,}1 \end{aligned}$$

Rund 21 Windungen. Das Paket reicht bis zum Radius 4,43 mm.

Windungen der abgelaufenen Feder

(3.3) MEISTER

$$N_{\text{ab}} = \frac{R - \sqrt{R^2 - \dfrac{l \cdot s}{\pi}}}{s}$$

N_{ab}	Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand)	1
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
l	Länge (der Zugfeder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm

Hier ist die Wurzel der Innenradius r_{i} des Pakets an der Wand, wieder aus der Flächengleichheit: $l \cdot s = \pi \cdot (R^2 - r_{\text{i}}^2)$.

Gilt: Windungen liegen dicht an der Wand. Die Feder muss ins Federhaus passen: $l \cdot s$ kleiner als $\pi \cdot (R^2 - r^2)$.

BEISPIEL Dieselbe Feder (420 mm lang, 0,12 mm stark) liegt abgelaufen an der Wand eines Federhauses mit 5,7 mm Innenradius.

Gegeben: $R = 5{,}7\,\text{mm}$; $l = 420\,\text{mm}$; $s = 0{,}12\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\text{ab}} &= \frac{R - \sqrt{R^2 - \dfrac{l \cdot s}{\pi}}}{s} \\ &= \frac{5{,}7\,\text{mm} - \sqrt{(5{,}7\,\text{mm})^2 - \dfrac{420\,\text{mm} \cdot 0{,}12\,\text{mm}}{\pi}}}{0{,}12\,\text{mm}} \\ &\approx 13{,}7 \end{aligned}$$

Knapp 14 Windungen. Innen endet das Paket beim Radius 4,06 mm.

Umgänge des Federhauses

(3.4) GESELLE

$$N = N_{\text{auf}} - N_{\text{ab}}$$

N	Umgänge (des Federhauses)	1
N_{auf}	Windungen der aufgezogenen Feder (am Kern)	1
N_{ab}	Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand)	1

Beim Ablaufen wandern die Windungen vom Kern an die Wand. Das Federhaus dreht sich dabei um so viele Umgänge, wie die Feder aufgezogen mehr Windungen hat als abgelaufen.

Gilt: Windungen in beiden Lagen im Federhaus gezählt. Der Wert ist die obere Grenze: Die Federenden arbeiten nicht mit, in der Praxis fehlt bis zu einem Umgang.

BEISPIEL Die Feder aus den beiden Beispielen davor hat aufgezogen 21,1 und abgelaufen 13,7 Windungen.

Gegeben: $N_{\text{auf}} = 21{,}1$; $N_{\text{ab}} = 13{,}7$

$$\begin{aligned} N &= N_{\text{auf}} - N_{\text{ab}} \\ &= 21{,}1 - 13{,}7 \\ &= 7{,}4 \end{aligned}$$

Das Federhaus macht rechnerisch 7,4 Umgänge.

Günstigste Federlänge

(3.5) MEISTER

$$l = \frac{\pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)}{2 \cdot s}$$

l	Länge (der Zugfeder)	mm
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
r	Radius (des Federkerns)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm

Die meisten Umgänge liefert die Feder, die genau die Hälfte der freien Fläche zwischen Kern und Wand bedeckt. Eine kürzere Feder hat zu wenige Windungen, eine längere lässt ihnen keinen Platz zum Abwickeln.

Gilt: Windungen dicht liegend; Zuschlag für die Befestigung der Enden nicht enthalten.

Gut zu wissen: Das Maximum ist flach (Abb. 3.3). Im Beispiel kostet eine um 20 % kürzere oder längere Feder nur rund 3 % der Umgänge. Auf den Millimeter kommt es bei der Länge also nicht an, auf die Klingenstärke dagegen sehr (Abschnitt 3.2).

BEISPIEL Welche Länge ist für eine Klinge von 0,12 mm im Federhaus mit 5,7 mm Innenradius und 1,9 mm Kernradius am günstigsten?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$l = \frac{\pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)}{2 \cdot s}$$

$$= \frac{\pi \cdot \left((5{,}7\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}9\,\mathrm{mm})^2\right)}{2 \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}$$

$$\approx 378\,\mathrm{mm}$$

Rund 378 mm. Die Feder mit 420 mm aus den Beispielen davor ist also etwas zu lang, verliert dadurch aber kaum Umgänge.

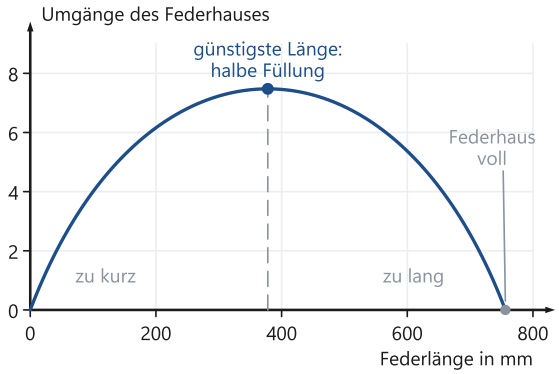


Abb. 3.3 Umgänge abhängig von der Federlänge, gerechnet für $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$, $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$, $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

Füllgrad des Federhauses

(3.6) MEISTER

$$k_\mathrm{F} = \frac{l \cdot s}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Der Füllgrad zeigt, ob eine vorhandene oder bestellte Feder zum Federhaus passt. Am günstigsten ist 0,5.

Gilt: Windungen dicht liegend.

k_F	Füllgrad: Anteil der freien Fläche, den die Feder bedeckt	1
l	Länge (der Zugfeder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
r	Radius (des Federkerns)	mm

BEISPIEL Wie stark füllt die Feder mit 420 mm Länge und 0,12 mm Klingenstärke das Federhaus (Innenradius 5,7 mm, Kernradius 1,9 mm)?

Gegeben: $l = 420\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} k_\mathrm{F} &= \frac{l \cdot s}{\pi \cdot (R^2 - r^2)} \\ &= \frac{420\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot \left((5{,}7\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}9\,\mathrm{mm})^2\right)} \\ &\approx 0{,}56 \end{aligned}$$

Die Feder bedeckt 56 % der freien Fläche, etwas mehr als die günstige Hälfte.

Trennkreis bei günstigster Länge

(3.7) MEISTER

$$\rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Bei günstigster Länge reicht das aufgezogene Paket genau so weit nach außen, wie das abgelaufene nach innen reicht. Dieser Trennkreis teilt die freie Fläche in zwei gleich große Hälften.

Gilt: Feder mit günstigster Länge, Füllgrad 0,5.

ρ	Radius (des Trennkreises)	mm
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
r	Radius (des Federkerns)	mm

Gut zu wissen: Prüfen am offenen Federhaus: Reicht die abgelaufene Feder weiter nach innen als bis zum Trennkreis, ist sie zu lang. Bleibt sie weiter außen, ist sie zu kurz.

BEISPIEL Wo liegt der Trennkreis im Federhaus mit 5,7 mm Innenradius und 1,9 mm Kernradius?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r = 1{,}9\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(5{,}7\,\mathrm{mm})^2 + (1{,}9\,\mathrm{mm})^2}{2}} \\ &\approx 4{,}25\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Beim Radius 4,25 mm. Das abgelaufene Paket ist dann 1,45 mm breit, das aufgezogene 2,35 mm.

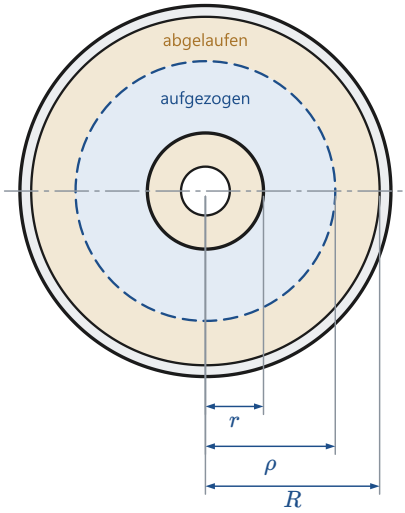


Abb. 3.4 Der Trennkreis ρ halbiert die freie Fläche: innen liegt die aufgezogene, außen die abgelaufene Feder

Größte Zahl der Umgänge

(3.8) MEISTER

$$N_{\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{s}$$

UMGESTELLT $$s = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{N_{\max}}$$

So viele Umgänge sind mit der günstigsten Federlänge möglich. Umgestellt liefert die Formel die Klingenstärke für eine verlangte Zahl von Umgängen.

Gilt: Feder mit günstigster Länge (Füllgrad 0,5), Windungen dicht liegend. Theoretische Obergrenze wie bei Formel (3.4).

$N_{\max}$	größtmögliche Umgänge des Federhauses	1
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
r	Radius (des Federkerns)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm

BEISPIEL Wie viele Umgänge schafft das Federhaus (Innenradius 5,7 mm, Kernradius 1,9 mm) mit einer Klinge von 0,12 mm höchstens?

Gegeben: $R = 5{,}7\,\text{mm}$; $r = 1{,}9\,\text{mm}$; $s = 0{,}12\,\text{mm}$

$$N_{\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - R - r}{s} = \frac{\sqrt{2 \cdot \left((5{,}7\,\text{mm})^2 + (1{,}9\,\text{mm})^2\right)} - 5{,}7\,\text{mm} - 1{,}9\,\text{mm}}{0{,}12\,\text{mm}} \approx 7{,}5$$

Rund 7,5 Umgänge. Mit einer Klinge von 0,10 mm wären es 9, mit 0,14 mm nur 6,4.

Richtwerte für den Kernradius $r = \frac{1}{3} R$ und günstigste Federlänge

Größe	Wert
Radius des Trennkreises	$\rho = 0{,}745 \cdot R$
Breite des abgelaufenen Pakets	$0{,}255 \cdot R$, rund ein Viertel des Innenradius
Breite des aufgezogenen Pakets	$0{,}412 \cdot R$
günstigste Federlänge	$l = 1{,}40 \cdot \frac{R^2}{s}$
größte Zahl der Umgänge	$N_{\max} = 0{,}157 \cdot \frac{R}{s}$

Aus den Formeln (3.5), (3.7) und (3.8) gerechnet. Die Werte gelten nur, wenn der Kern ein Drittel des Innenradius misst.

Federlänge aus den Windungen der abgelaufenen Feder

(3.9) GESELLE

$$l = \pi \cdot (R + r_\mathrm{i}) \cdot N_\mathrm{ab}$$

Die Länge ist der mittlere Umfang des Pakets mal die Zahl der Windungen. So lässt sich die Federlänge bestimmen, ohne die Feder herauszunehmen. Die Klingenstärke folgt aus der Paketbreite: $s = (R - r_\mathrm{i}) : N_\mathrm{ab}$.

Gilt: Windungen liegen dicht an der Wand. Das Stück vom Paket zum Kern ist nicht mitgerechnet; die wirkliche Feder ist um etwa eine innere Windung länger.

l	Länge (der Zugfeder)	mm
R	Innenradius (des Federhauses)	mm
r_i	Innenradius des abgelaufenen Federpakets	mm
N_ab	Windungen der abgelaufenen Feder (an der Wand)	1

BEISPIEL In einem Federhaus mit 5,7 mm Innenradius liegt die abgelaufene Feder mit 13,75 Windungen an der Wand. Der innere Rand des Pakets hat 4,05 mm Radius.

Gegeben: $R = 5{,}7\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 4{,}05\,\mathrm{mm}$; $N_\mathrm{ab} = 13{,}75$

$$\begin{aligned} l &= \pi \cdot (R + r_\mathrm{i}) \cdot N_\mathrm{ab} \\ &= \pi \cdot (5{,}7\,\mathrm{mm} + 4{,}05\,\mathrm{mm}) \cdot 13{,}75 \\ &\approx 421\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Im Paket liegen rund 421 mm Feder. Die Klingenstärke beträgt 1,65 mm geteilt durch 13,75, also 0,12 mm.

Merksatz: Die Feder soll die halbe freie Fläche des Federhauses füllen. Mehr Umgänge gibt es dann nur noch mit einer dünneren Klinge.

3.2 Drehmoment und Energie der Zugfeder

Die aufgezogene Feder will sich zurückbiegen und dreht dabei das Federhaus. Ihr Drehmoment hängt vor allem von der Klingenstärke ab, die gespeicherte Energie vom Volumen der Feder und vom Werkstoff.

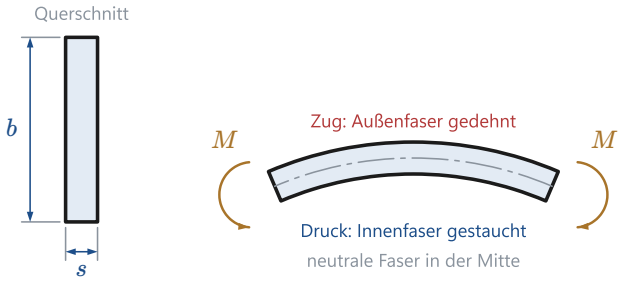


Abb. 3.5 Klingenquerschnitt mit Höhe b und Stärke s (Stärke übertrieben); beim Biegen wird die Außenseite gedehnt, die Innenseite gestaucht

Drehmoment der Zugfeder

(3.10) MEISTER

$$M = \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot \varphi}{12 \cdot l}$$

Das Drehmoment wächst mit dem Verdrehwinkel, mit der Klingenhöhe und mit der dritten Potenz der Klingenstärke. Eine längere Feder ist weicher. Eine Umdrehung entspricht $\varphi = 2\pi$.

Gilt: elastischer Bereich, Rechteckquerschnitt, Windungen berühren sich nicht und reiben nicht aneinander. Der Winkel zählt von der entspannten Form der Feder außerhalb des Federhauses an.

M	Drehmoment (der Feder)	$\mathrm{N \cdot mm}$
E	Elastizitätsmodul (des Federwerkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
b	Klingenhöhe (Breite der Feder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm
φ	Verdrehwinkel (gegenüber der entspannten Form, im Bogenmaß)	rad
l	Länge (der Zugfeder)	mm

Aber Vorsicht: Im Federhaus liegen Windungen aneinander, am Kern und an der Wand. Sie arbeiten nicht mit und reiben. Die wirkliche Kennlinie ist deshalb keine Gerade (Abb. 3.6). Die Formel zeigt, wovon das Drehmoment abhängt; das Drehmoment einer bestimmten Feder wird gemessen.

BEISPIEL Eine Zugfeder ($E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, Höhe 1,3 mm, Stärke 0,12 mm, Länge 420 mm) ist gegenüber ihrer entspannten Form um 12 Umdrehungen gespannt, das sind 75,4 rad.

Gegeben: $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $\varphi = 75{,}4\,\mathrm{rad}$; $l = 420\,\mathrm{mm}$

$$M = \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot \varphi}{12 \cdot l}$$

$$= \frac{200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}12\,\mathrm{mm})^3 \cdot 75{,}4\,\mathrm{rad}}{12 \cdot 420\,\mathrm{mm}}$$

$$\approx 6{,}72\,\mathrm{N \cdot mm}$$

Rund 6,7 $\mathrm{N \cdot mm}$, eine übliche Größenordnung für das Federhaus einer Herrenarmbanduhr.

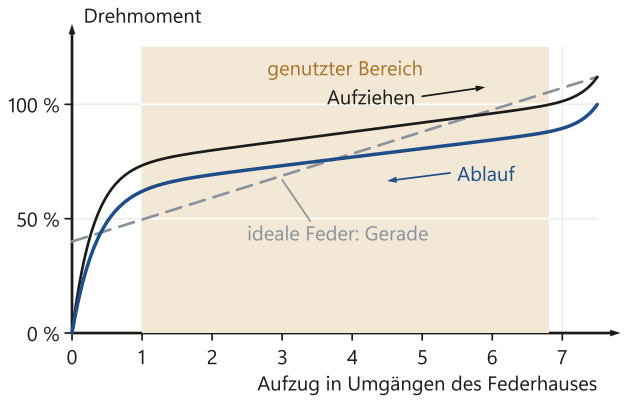


Abb. 3.6 Drehmoment im Federhaus beim Aufziehen und beim Ablauf (Prinzipskizze, keine Messkurve); 100 % ist das Drehmoment, mit dem der Ablauf bei Vollaufzug beginnt

Abb. 3.6 zeigt den Verlauf im Federhaus. Ganz oben und ganz unten ändert sich das Drehmoment stark, dazwischen fällt es nur langsam. Genutzt wird der flache Teil. Beim Aufziehen liegt die Kurve höher als beim Ablauf; der Unterschied ist die Reibung zwischen den Windungen. Federn mit S-Form (Abb. 3.8) sind in entspanntem Zustand gegen ihre spätere Wickelrichtung gebogen. Sie werden über die ganze Länge gleichmäßiger beansprucht und geben ein gleichmäßigeres Drehmoment ab als Federn mit einfacher Spiralform.

Größtes Drehmoment aus der zulässigen Biegespannung

(3.11) MEISTER

$$M_{\max} = \frac{\sigma_{\text{zul}} \cdot b \cdot s^2}{6}$$

$M_{\max}$	größtes elastisch übertragbares Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
σ_{zul}	zulässige Biegespannung (Elastizitätsgrenze des Federwerkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
b	Klingenhöhe (Breite der Feder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm

Mehr Drehmoment hält die Klinge nicht elastisch aus: Die Randfaser erreicht die zulässige Spannung. Der Bruch $\frac{b \cdot s^2}{6}$ ist das Widerstandsmoment des Rechtecks (Kapitel 2).

Gilt: Rechteckquerschnitt, reine Biegung. Über der Elastizitätsgrenze verformt sich die Feder bleibend, sie setzt sich.

BEISPIEL Welches Drehmoment überträgt eine Klinge von 1,3 mm Höhe und 0,12 mm Stärke bei einer zulässigen Biegespannung von $2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$?

Gegeben: $\sigma_{\text{zul}} = 2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{\sigma_{\text{zul}} \cdot b \cdot s^2}{6} \\ &= \frac{2500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}12\,\mathrm{mm})^2}{6} \\ &= 7{,}8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Höchstens 7,8 $\mathrm{N \cdot mm}$. Das Beispiel davor liegt mit 6,72 $\mathrm{N \cdot mm}$ darunter.

Federwerkstoffe für Zugfedern (Richtwerte)

Werkstoff	E in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$	σ_{zul} in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
Federstahl (Kohlenstoffstahl, gehärtet und angelassen)	206 000 … 210 000	1 500 … 2 000
Kobalt-Nickel-Chrom-Legierung (zum Beispiel Nivaflex)	200 000 … 225 000	2 200 … 2 800

Grobe Richtwerte zum Überschlagen. Die zulässige Spannung hängt stark von Legierung, Walzgrad und Wärmebehandlung ab. Maßgeblich sind die Angaben des Federherstellers. Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit weiterer Werkstoffe stehen in Abschnitt 2.7.

Einfluss der Klingenstärke

(3.12) GESELLE

$$M_2 = M_1 \cdot \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^3$$

M_2	Drehmoment der Ersatzfeder	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
M_1	Drehmoment der Originalfeder	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
s_2	Klingenstärke der Ersatzfeder	mm
s_1	Klingenstärke der Originalfeder	mm

Das Drehmoment ändert sich mit der dritten Potenz der Klingenstärke. Schon ein Hundertstelmillimeter macht sich deutlich bemerkbar.

Gilt: gleiche Klingenhöhe, gleiche Länge, gleicher Werkstoff, gleicher Verdrehwinkel.

Aber Vorsicht: Eine stärkere Klinge füllt das Federhaus mehr und schafft weniger Umgänge. Darum bei einer anderen Klingenstärke auch Länge und Umgänge nach Abschnitt 3.1 nachrechnen.

BEISPIEL Statt einer Feder mit 0,12 mm Klingenstärke und 6,0 $\mathrm{N \cdot mm}$ wird eine mit 0,125 mm eingesetzt. Wie groß wird das Drehmoment?

Gegeben: $M_1 = 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $s_2 = 0{,}125\,\mathrm{mm}$; $s_1 = 0{,}12\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 \cdot \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^3 \\ &= 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot \left(\frac{0{,}125\,\mathrm{mm}}{0{,}12\,\mathrm{mm}}\right)^3 \\ &\approx 6{,}8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Rund 6,8 $\mathrm{N \cdot mm}$. Die nur 0,005 mm stärkere Klinge bringt 13 % mehr Drehmoment.

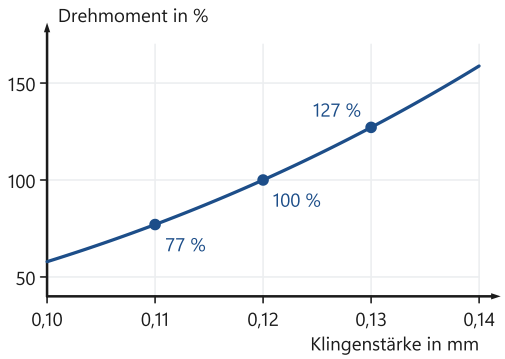


Abb. 3.7 Das Drehmoment wächst mit der dritten Potenz der Klingenstärke (100 % bei $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$)

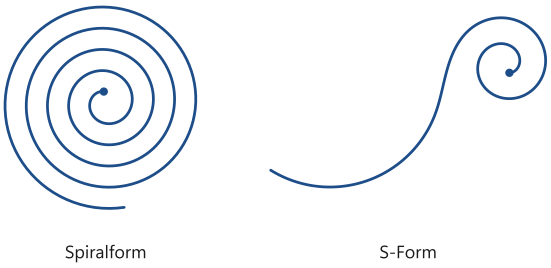


Abb. 3.8 Entspannte Zugfedern: einfache Spiralform und S-Form mit Gegenkrümmung

Ersatzfeder mit gleicher Wirkung

(3.13) GESELLE

$$b_1 \cdot s_1^3 = b_2 \cdot s_2^3$$

UMGESTELLT $\quad s_2 = s_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}}$

Ist die Originalfeder nicht lieferbar, gleicht eine etwas stärkere Klinge eine geringere Höhe aus und umgekehrt. Das Drehmoment bleibt gleich, wenn das Produkt aus Höhe und dritter Potenz der Stärke gleich bleibt.

Gilt: gleiche Länge, gleicher Werkstoff. Die Ersatzfeder darf nicht höher sein, als das Federhaus zulässt.

b_1	Klingenhöhe der Originalfeder	mm
s_1	Klingenstärke der Originalfeder	mm
b_2	Klingenhöhe der Ersatzfeder	mm
s_2	Klingenstärke der Ersatzfeder	mm

BEISPIEL Die Originalfeder misst 1,50 mm × 0,12 mm. Lieferbar ist nur eine Feder mit 1,40 mm Höhe. Welche Klingenstärke gibt dasselbe Drehmoment?

Gegeben: $s_1 = 0{,}12\,\mathrm{mm}; \quad b_1 = 1{,}50\,\mathrm{mm}; \quad b_2 = 1{,}40\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} \\ &= 0{,}12\,\mathrm{mm} \cdot \sqrt[3]{\frac{1{,}50\,\mathrm{mm}}{1{,}40\,\mathrm{mm}}} \\ &\approx 0{,}1228\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rechnerisch knapp 0,123 mm. Aus der Liste wählt man die nächste Stärke, hier 0,125 mm, und nimmt etwas mehr Drehmoment in Kauf.

Gespeicherte Energie der idealen Feder

(3.14) MEISTER

$$W = \frac{M \cdot \varphi}{2}$$

Weil das Drehmoment vom entspannten Zustand an gleichmäßig ansteigt, zählt im Mittel das halbe Enddrehmoment. Es gilt $1\,\mathrm{N \cdot mm} = 1\,\mathrm{mJ}$.

Gilt: ideale Feder mit gerader Kennlinie nach Formel (3.10).

W	Arbeit (in der Feder gespeicherte Energie, Spannarbeit)	mJ
M	Drehmoment (der Feder)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
φ	Verdrehwinkel (gegenüber der entspannten Form, im Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Die Feder aus dem Beispiel zu Formel (3.10) hat bei 75,4 rad ein Drehmoment von 6,72 $\mathrm{N \cdot mm}$.

Gegeben: $M = 6{,}72\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\varphi = 75{,}4\,\mathrm{rad}$

$$W = \frac{M \cdot \varphi}{2} = \frac{6{,}72\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 75{,}4\,\mathrm{rad}}{2} \approx 253\,\mathrm{mJ}$$

In der Feder stecken rund 253 mJ, also 0,25 J. Nutzbar ist davon nur der Teil, den das Federhaus beim Ablauf abgibt (Formel 3.16).

Größte speicherbare Energie

(3.15) VERTIEFUNG

$$W_{\max} = \frac{\sigma_{\mathrm{zul}}^2 \cdot b \cdot s \cdot l}{6 \cdot E}$$

Das Produkt $b \cdot s \cdot l$ ist das Volumen der Feder. Die speicherbare Energie wächst also mit dem Federvolumen und mit $\sigma_{\mathrm{zul}}^2 : E$. Darum bekommt das Federhaus im Werk so viel Platz wie möglich, und darum lohnen sich Werkstoffe mit hoher Elastizitätsgrenze.

Gilt: ideale Feder, über die ganze Länge bis zur zulässigen Spannung gebogen. Obere Grenze; wirkliche Federn erreichen sie nicht.

$W_{\max}$	größte elastisch speicherbare Energie	mJ
σ_{zul}	zulässige Biegespannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
b	Klingenhöhe (Breite der Feder)	mm
s	Klingenstärke (Dicke der Feder)	mm
l	Länge (der Zugfeder)	mm
E	Elastizitätsmodul (des Federwerkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$

BEISPIEL Feder 1,3 mm × 0,12 mm × 420 mm, $\sigma_{\mathrm{zul}} = 2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, $E = 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$.

Gegeben: $\sigma_{\mathrm{zul}} = 2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 1{,}3\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}12\,\mathrm{mm}$; $l = 420\,\mathrm{mm}$; $E = 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$

$$W_{\max} = \frac{\sigma_{\mathrm{zul}}^2 \cdot b \cdot s \cdot l}{6 \cdot E} = \frac{\left(2500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}\right)^2 \cdot 1{,}3\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}12\,\mathrm{mm} \cdot 420\,\mathrm{mm}}{6 \cdot 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}} \approx 341\,\mathrm{mJ}$$

Höchstens rund 0,34 J. Das ist die Energie, mit der man 35 g einen Meter hoch hebt.

Abgegebene Arbeit beim Ablauf

(3.16) GESELLE

$$W = 2 \cdot \pi \cdot N \cdot M_{\mathrm{m}}$$

Arbeit ist Drehmoment mal Drehwinkel; je Umgang dreht sich das Federhaus um 2π. Das mittlere Drehmoment liest man aus der gemessenen Ablaufkurve ab.

Gilt: Drehmoment über den Ablauf gemittelt.

W	Arbeit (vom Federhaus beim Ablauf abgegeben)	mJ
N	Umgänge (des Federhauses)	1
M_{m}	mittleres Drehmoment über diese Umgänge	$\mathrm{N{\cdot}mm}$

BEISPIEL Ein Federhaus gibt über 6,5 Umgänge im Mittel 6,0 $\mathrm{N \cdot mm}$ ab.

Gegeben: $N = 6{,}5; \quad M_{\mathrm{m}} = 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} W &= 2 \cdot \pi \cdot N \cdot M_{\mathrm{m}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 6{,}5 \cdot 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}mm} \\ &\approx 245\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

Das Werk erhält rund 245 mJ, knapp ein Viertel Joule für fast zwei Tage Gang.

Wirkungsgrad der Zugfeder

(3.17) MEISTER

$$\eta_{\mathrm{F}} = \frac{W_{\mathrm{ab}}}{W_{\mathrm{auf}}}$$

Die Reibung zwischen den Windungen und an der Wand frisst einen Teil der Aufzugsarbeit. Saubere Klingen und das richtige Fett im Federhaus halten den Verlust klein.

Gilt: beide Arbeiten über dieselben Umgänge gemessen.

η_{F}	Wirkungsgrad der Feder im Federhaus	1
W_{ab}	beim Ablauf abgegebene Arbeit (Fläche unter der Ablaufkurve)	mJ
W_{auf}	beim Aufziehen aufgewendete Arbeit (Fläche unter der Aufzugskurve)	mJ

BEISPIEL Das Federhaus aus dem Beispiel davor gibt beim Ablauf 245 mJ ab. Beim Aufziehen wurden über dieselben Umgänge 288 mJ aufgewendet.

Gegeben: $W_{\mathrm{ab}} = 245\,\mathrm{mJ}; \quad W_{\mathrm{auf}} = 288\,\mathrm{mJ}$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{F}} &= \frac{W_{\mathrm{ab}}}{W_{\mathrm{auf}}} \\ &= \frac{245\,\mathrm{mJ}}{288\,\mathrm{mJ}} \\ &= 0{,}85 \end{aligned}$$

Die Feder gibt 85 % der Aufzugsarbeit wieder ab; 15 % gehen als Reibung verloren.

Merksatz: Doppelte Klingenhöhe, doppeltes Drehmoment. Doppelte Klingenstärke, achtfaches Drehmoment.

3.3 Gangdauer

Die Gangdauer ist die Zeit, die das Werk mit einem vollen Aufzug läuft. Sie ergibt sich aus den Umgängen des Federhauses und der Zeit, die ein Umgang dauert. Die Gangreserve ist der Teil der Gangdauer, der noch vor dem Werk liegt. Wie in Kapitel 4 trägt die Zähnezahl eines Triebes einen Strich und den Index seiner Welle.

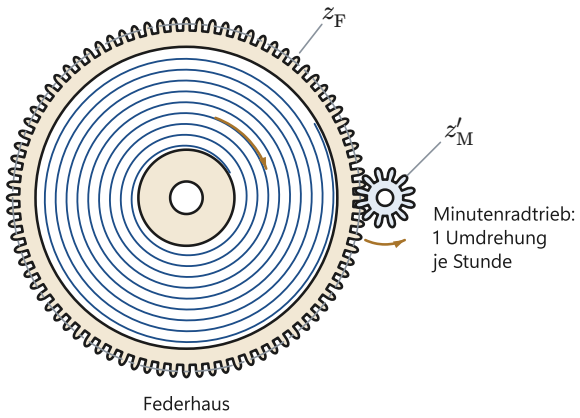


Abb. 3.9 Das Federhaus mit z_F Zähnen treibt den Minutenradtrieb mit z'_M Zähnen

Umlaufzeit des Federhauses

(3.18) GESELLE

$$t_\mathrm{F} = \frac{z_\mathrm{F}}{z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M}$$

Das Federhaus greift in den Trieb des Minutenrads, das sich einmal je Stunde dreht. Hat das Federhaus siebenmal so viele Zähne wie der Trieb, dauert ein Umgang sieben Stunden.

Gilt: Federhaus greift direkt in den Trieb eines Rades, das einmal je Stunde umläuft. Dreht das angetriebene Rad anders, dessen Umlaufzeit einsetzen.

t_F	Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang)	h
z_F	Zähnezahl des Federhauses	1
z'_M	Zähnezahl des Minutenradtriebs	1
t_M	Umlaufzeit des Minutenrads (1 h)	h

BEISPIEL Ein Federhaus mit 84 Zähnen treibt einen Minutenradtrieb mit 12 Zähnen.

Gegeben: $z_\mathrm{F} = 84; \quad z'_\mathrm{M} = 12; \quad t_\mathrm{M} = 1\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{F} &= \frac{z_\mathrm{F}}{z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M} \\ &= \frac{84}{12} \cdot 1\,\mathrm{h} \\ &= 7\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Das Federhaus braucht 7 Stunden für einen Umgang.

Gangdauer aus den Umgängen des Federhauses

(3.19) GESELLE

$$t_\mathrm{G} = N \cdot t_\mathrm{F}$$

UMGESTELLT $N = \dfrac{t_\mathrm{G}}{t_\mathrm{F}}$

t_G	Gangdauer	h
N	Umgänge (des Federhauses)	1
t_F	Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang)	h

Mit den Umgängen, die das Federhaus wirklich abgibt, erhält man die Gangdauer. Umgestellt liefert die Formel die Umgänge, die eine verlangte Gangdauer braucht.

Gilt: gleichmäßig laufendes Werk; Umgänge vom Vollaufzug bis zum Stillstand. Für die nutzbare Gangdauer nur die Umgänge zählen, in denen das Drehmoment für eine ausreichende Amplitude genügt.

Gut zu wissen: Die Gangreserve ist die Gangdauer, die nach einer bestimmten Laufzeit noch übrig ist: restliche Umgänge mal Umlaufzeit des Federhauses.

BEISPIEL Das Federhaus aus dem Beispiel davor (7 h je Umgang) gibt 6,5 nutzbare Umgänge ab.

Gegeben: $N = 6{,}5; \quad t_\mathrm{F} = 7\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{G} &= N \cdot t_\mathrm{F} \\ &= 6{,}5 \cdot 7\,\mathrm{h} \\ &= 45{,}5\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Die Uhr läuft 45,5 Stunden. Nach 24 Stunden bleiben 21,5 Stunden Gangreserve.

Umlaufzeit des Federhauses mit Beisatzrad

(3.20) GESELLE

$$t_\mathrm{F} = \frac{z_\mathrm{F} \cdot z_\mathrm{B}}{z'_\mathrm{B} \cdot z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M}$$

t_F	Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang)	h
z_F	Zähnezahl des Federhauses	1
z_B	Zähnezahl des Beisatzrads	1
z'_B	Zähnezahl des Beisatzradtriebs	1
z'_M	Zähnezahl des Minutenradtriebs	1
t_M	Umlaufzeit des Minutenrads (1 h)	h

Für lange Gangdauern sitzt zwischen Federhaus und Minutenrad ein Beisatzrad. Im Zähler stehen die treibenden Räder, im Nenner die getriebenen Triebe.

Gilt: Federhaus treibt den Beisatzradtrieb, das Beisatzrad den Minutenradtrieb; Minutenrad einmal je Stunde.

BEISPIEL Achttagewerk: Federhaus 84 Zähne, Beisatzradtrieb 12, Beisatzrad 72, Minutenradtrieb 12.

Gegeben: $z_\mathrm{F} = 84; \quad z_\mathrm{B} = 72; \quad z'_\mathrm{B} = 12; \quad z'_\mathrm{M} = 12; \quad t_\mathrm{M} = 1\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{F} &= \frac{z_\mathrm{F} \cdot z_\mathrm{B}}{z'_\mathrm{B} \cdot z'_\mathrm{M}} \cdot t_\mathrm{M} \\ &= \frac{84 \cdot 72}{12 \cdot 12} \cdot 1\,\mathrm{h} \\ &= 42\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Ein Umgang dauert 42 Stunden. Für acht Tage, also 192 Stunden, braucht das Werk nach Formel (3.19) rund 4,6 Umgänge.

Im Automatikwerk ist das äußere Federende nicht eingehängt. Es trägt eine Schleppfeder (Gleitzaum), die sich gegen die Federhauswand spreizt und durchrutscht, sobald die Feder voll aufgezogen ist. Ihr Gleitmoment legt fest, wie viel Drehmoment die Feder höchstens an das Werk abgibt. Rutscht die Schleppfeder zu früh, wird die Feder nie ganz aufgezogen und es fehlt Gangreserve. Hält sie zu fest, wird das Drehmoment zu groß und die Unruh prellt.

3.4 Gewichtsantrieb

Ein Gewicht zieht über Seil, Darmsaite oder Kette an der Walze. Sein Drehmoment bleibt über die ganze Gangdauer gleich; das macht den Gewichtsantrieb zum gleichmäßigsten Antrieb. Der Preis ist die Fallhöhe.

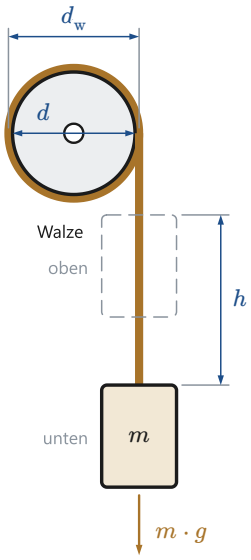


Abb. 3.10 Gewicht direkt am Seil ($k = 1$): wirksamer Durchmesser d_w bis Seilmitte, Fallhöhe h

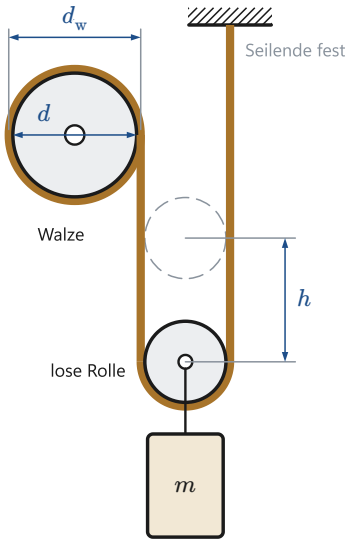


Abb. 3.11 Gewicht an loser Rolle ($k = 2$): Das Seil läuft doppelt so weit ab, wie das Gewicht sinkt

Wirksamer Walzendurchmesser

(3.21) GESELLE

$$d_w = d + d_S$$

Die Seilkraft greift in der Seilmitte an. Der Hebelarm ist deshalb der halbe Walzendurchmesser plus die halbe Seildicke.

Gilt: glatte Walze, Seil in einer Lage. Bei Walzen mit Rillen den Durchmesser bis zur Seilmitte messen.

d_w	wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte)	mm
d	Durchmesser (der Walze)	mm
d_S	Dicke des Seils oder der Saite	mm

BEISPIEL Auf einer Walze von 36 mm Durchmesser liegt ein Seil von 1,5 mm Dicke.

Gegeben: $d = 36\,\mathrm{mm}$; $d_S = 1{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} d_w &= d + d_S \\ &= 36\,\mathrm{mm} + 1{,}5\,\mathrm{mm} \\ &= 37{,}5\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Gerechnet wird mit 37,5 mm.

Drehmoment an der Walze

(3.22) GESELLE

$$M = \frac{m \cdot g \cdot d_\mathrm{w}}{2 \cdot k}$$

Die Gewichtskraft wirkt am halben wirksamen Durchmesser. Hängt das Gewicht an einer losen Rolle, trägt jeder der beiden Stränge die halbe Last, an der Walze zieht also nur die halbe Gewichtskraft.

Gilt: Reibung der Rolle sowie Gewicht von Seil und Rolle vernachlässigt.

M	Drehmoment (an der Walze)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
m	Masse (des Gewichts)	kg
g	Fallbeschleunigung ($9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
d_w	wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte)	mm
k	Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle)	1

BEISPIEL Eine Standuhr hat ein Gewicht von 4 kg an einer losen Rolle; wirksamer Walzendurchmesser 37,5 mm.

Gegeben: $m = 4\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $d_\mathrm{w} = 37{,}5\,\mathrm{mm}$; $k = 2$

$$\begin{aligned} M &= \frac{m \cdot g \cdot d_\mathrm{w}}{2 \cdot k} \\ &= \frac{4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 37{,}5\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 2} \\ &\approx 368\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

Rund $368\,\mathrm{N \cdot mm}$, das sind $0{,}368\,\mathrm{N \cdot m}$ und damit etwa das Fünfzigfache einer Armbanduhr. Ohne Rolle wäre das Drehmoment doppelt so groß.

Fallhöhe des Gewichts

(3.23) GESELLE

$$h = \frac{\pi \cdot d_\mathrm{w} \cdot N_\mathrm{W}}{k}$$

Je Umdrehung gibt die Walze einen Umfang Seil frei. Mit loser Rolle verteilt sich das Seil auf zwei Stränge, das Gewicht sinkt nur halb so weit.

Gilt: Seil in einer Lage auf der Walze.

h	Höhe (Fallhöhe des Gewichts)	mm
d_w	wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte)	mm
N_W	Umdrehungen der Walze	1
k	Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle)	1

Gut zu wissen: Zum Platz im Gehäuse kommen die Höhe des Gewichts und bei loser Rolle die Rolle mit Haken hinzu.

BEISPIEL Die Walze der Standuhr (wirksamer Durchmesser 37,5 mm, lose Rolle) macht in acht Tagen 16 Umdrehungen.

Gegeben: $d_\mathrm{w} = 37{,}5\,\mathrm{mm}$; $N_\mathrm{W} = 16$; $k = 2$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\pi \cdot d_\mathrm{w} \cdot N_\mathrm{W}}{k} \\ &= \frac{\pi \cdot 37{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 16}{2} \\ &\approx 942\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Gewicht sinkt in acht Tagen um rund 94 cm. Ohne Rolle wären es 1,88 m, mehr als ein übliches Gehäuse hergibt.

Gangdauer aus der Fallhöhe

(3.24) GESELLE

$$t_\mathrm{G} = \frac{k \cdot h}{\pi \cdot d_\mathrm{w}} \cdot t_\mathrm{W}$$

Der Bruch ist die Zahl der Walzenumdrehungen, die in die Fallhöhe passen. Die Umlaufzeit der Walze folgt wie beim Federhaus aus den Zähnezahlen (Formel 3.18).

Gilt: Seil in einer Lage. Als Fallhöhe zählt nur der Weg, den das Gewicht wirklich sinken kann, ohne die Höhe von Gewicht und Rolle.

t_G	Gangdauer	h
k	Anzahl (der tragenden Seilstränge: 1 ohne Rolle, 2 mit loser Rolle)	1
h	Höhe (Fallhöhe des Gewichts)	mm
d_w	wirksamer Walzendurchmesser (bis Seilmitte)	mm
t_W	Umlaufzeit der Walze	h

BEISPIEL In einem Wandregulator kann das Gewicht 1100 mm sinken. Die Walze (wirksamer Durchmesser 31 mm) dreht sich einmal in 12 Stunden. Wie lange läuft die Uhr mit loser Rolle?

Gegeben: $k = 2$; $h = 1100\,\mathrm{mm}$; $d_\mathrm{w} = 31\,\mathrm{mm}$; $t_\mathrm{W} = 12\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{G} &= \frac{k \cdot h}{\pi \cdot d_\mathrm{w}} \cdot t_\mathrm{W} \\ &= \frac{2 \cdot 1100\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot 31\,\mathrm{mm}} \cdot 12\,\mathrm{h} \\ &\approx 271\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Rund 271 Stunden, das sind gut 11 Tage. Ohne Rolle wären es nur 5,6 Tage; für ein Achttagewerk braucht dieses Gehäuse also die lose Rolle.

Energie des Gewichts

(3.25) GESELLE

$$W = m \cdot g \cdot h$$

Die Energie hängt nur von Masse und Fallhöhe des Gewichts ab. Eine lose Rolle ändert daran nichts: halbe Kraft an der Walze, dafür doppelte Seillänge.

Gilt: Reibung der Rolle vernachlässigt.

W	Arbeit (vom Gewicht abgegeben, Lageenergie)	J
m	Masse (des Gewichts)	kg
g	Fallbeschleunigung ($9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h	Höhe (Fallhöhe des Gewichts)	m

BEISPIEL Das Gewicht der Standuhr (4 kg) sinkt in acht Tagen um 0,942 m.

Gegeben: $m = 4\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 0{,}942\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} W &= m \cdot g \cdot h \\ &= 4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}942\,\mathrm{m} \\ &\approx 37{,}0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Die Standuhr setzt in acht Tagen 37 J um. Die Armbanduhr aus Abschnitt 3.2 kommt in knapp zwei Tagen mit 0,245 J aus.

Merksatz: Die lose Rolle halbiert Fallhöhe und Drehmoment, die Gangdauer bleibt. Für dasselbe Drehmoment braucht sie das doppelte Gewicht.

3.5 Schnecke und Kette

Die Schnecke gleicht das nachlassende Drehmoment der Zugfeder aus. Bei voller Feder zieht die Kette am kleinen Radius der Schnecke, bei fast abgelaufener Feder am großen. So bleibt das Drehmoment am Schneckenrad nahezu gleich.

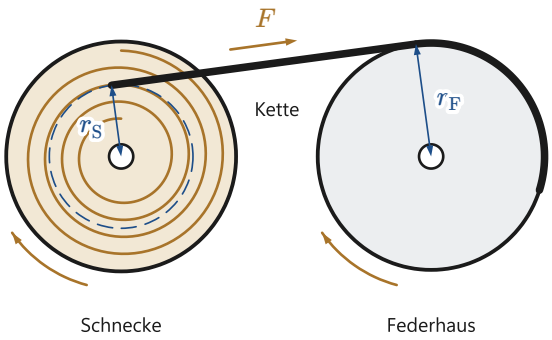


Abb. 3.12 Schnecke und Federhaus von oben: Die Kette zieht mit der Kraft F am Wirkradius r_S

Drehmoment an der Schnecke

(3.26) VERTIEFUNG

$$M_S = \frac{M_F \cdot r_S}{r_F}$$

UMGESTELLT $r_S = \dfrac{M_S \cdot r_F}{M_F}$

Die Kette überträgt die Kraft $F = M_F : r_F$ vom Federhaus auf die Schnecke; dort wirkt sie am Radius r_S. Umgestellt liefert die Formel für jeden Aufzugszustand den Radius, an dem die Schnecke das verlangte Drehmoment abgibt.

Gilt: beide Radien bis zur Kettenmitte gemessen; Reibung von Kette und Zapfen vernachlässigt.

M_S	Drehmoment an der Schnecke	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
M_F	Drehmoment des Federhauses im selben Augenblick	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
r_S	Wirkradius der Schnecke an der Stelle, an der die Kette abläuft	mm
r_F	Radius des Federhauses (bis Kettenmitte)	mm

BEISPIEL Das Federhaus einer Taschenuhr mit Schnecke hat 9 mm Radius. Die Schnecke soll gleichbleibend $32\ \mathrm{N \cdot mm}$ abgeben. Voll aufgezogen liefert die Feder $48\ \mathrm{N \cdot mm}$. Welchen Radius braucht die Schnecke an dieser Stelle?

Gegeben: $M_S = 32\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $r_F = 9\,\mathrm{mm}$; $M_F = 48\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{M_S \cdot r_F}{M_F} \\ &= \frac{32\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 9\,\mathrm{mm}}{48\,\mathrm{N{\cdot}mm}} \\ &= 6{,}0\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

6 mm am dünnen Ende der Schnecke. Ist die Feder auf $32\ \mathrm{N \cdot mm}$ abgefallen, muss der Radius 9 mm betragen.

3.6 Leistung des Antriebs

Leistung ist Energie je Zeit. Eine mechanische Uhr braucht sehr wenig davon: Am Federhaus einer Armbanduhr sind es ein bis wenige Mikrowatt, an der Walze einer Standuhr einige zehn Mikrowatt.

Mittlere Leistung

(3.27) GESELLE

$$P = \frac{W}{t_\mathrm{G}}$$

Zum Einsetzen die Gangdauer in Sekunden umrechnen: $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$. Dann gilt $1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}$.

Gilt: Mittelwert über die ganze Gangdauer.

P	Leistung (des Antriebs)	$\mu\mathrm{W}$
W	Arbeit (in der Gangdauer abgegeben)	mJ
t_G	Gangdauer	h

BEISPIEL Das Federhaus aus Abschnitt 3.2 gibt in 45,5 Stunden 245 mJ ab.

Gegeben: $W = 245\,\mathrm{mJ}$; $t_\mathrm{G} = 45{,}5\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{t_\mathrm{G}} \\ &= \frac{245\,\mathrm{mJ}}{45{,}5\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{0{,}245\,\mathrm{J}}{163\,800\,\mathrm{s}} \\ &\approx 1{,}5\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Rund 1,5 Mikrowatt. Eine Leuchtdiode mit 1 W braucht rund 700 000-mal so viel.

Leistung aus Drehmoment und Umlaufzeit

(3.28) MEISTER

$$P = \frac{2 \cdot \pi \cdot M}{t_\mathrm{U}}$$

Leistung ist Drehmoment mal Winkelgeschwindigkeit. Die Antriebswelle dreht sich in der Umlaufzeit einmal um 2π.

Gilt: Drehmoment in dem betrachteten Zeitraum gleichbleibend; Umlaufzeit in Sekunden einsetzen.

P	Leistung (des Antriebs)	$\mu\mathrm{W}$
M	Drehmoment (an der Antriebswelle: Federhaus oder Walze)	$\mathrm{N{\cdot}m}$
t_U	Umlaufzeit der Antriebswelle	h

BEISPIEL An der Walze der Standuhr wirken $0{,}368\,\mathrm{N \cdot m}$; sie dreht sich einmal in 12 Stunden.

Gegeben: $M = 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}$; $t_\mathrm{U} = 12\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2 \cdot \pi \cdot M}{t_\mathrm{U}} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}}{12\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}368\,\mathrm{N{\cdot}m}}{43\,200\,\mathrm{s}} \\ &\approx 53{,}5\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Rund 54 Mikrowatt, etwa 36-mal so viel wie bei der Armbanduhr. Dieselbe Rechnung mit $6\,\mathrm{N \cdot mm}$ und 7 Stunden ergibt für die Armbanduhr wieder 1,5 Mikrowatt.

Leistung am Gangregler

(3.29) MEISTER

$$P_{\mathrm{U}} = \eta \cdot P$$

Auf dem Weg durch Räderwerk und Hemmung geht der größere Teil der Antriebsleistung verloren. Der Gesamtwirkungsgrad ist das Produkt der Einzelwirkungsgrade (Kapitel 2 und 4).

Gilt: eingeschwungener Gang mit gleichbleibender Amplitude. Der Wirkungsgrad 0,3 im Beispiel ist ein grober Richtwert für Kleinuhren mit Ankerhemmung.

P_{U}	Leistung, die Unruh oder Pendel erreicht	$\mu\mathrm{W}$
η	Wirkungsgrad (von Räderwerk und Hemmung zusammen)	1
P	Leistung (des Antriebs)	$\mu\mathrm{W}$

BEISPIEL Vom Federhaus kommen 1,5 Mikrowatt. Räderwerk und Hemmung haben zusammen einen Wirkungsgrad von 0,3.

Gegeben: $\eta = 0{,}3$; $P = 1{,}5\,\mu\mathrm{W}$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{U}} &= \eta \cdot P \\ &= 0{,}3 \cdot 1{,}5\,\mu\mathrm{W} \\ &= 0{,}45\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

An der Unruh kommt rund ein halbes Mikrowatt an. Je nach Kaliber und Schlagzahl liegt die Leistung an der Unruh zwischen einigen Zehnteln und rund einem Mikrowatt.

3.7 Aufzug und Zeigerstellung

Beim Handaufzug dreht die Krone über Aufzugtrieb, Kronrad und Sperrrad den Federkern. Im Automatikwerk übernimmt das die Schwungmasse, der Rotor, über ein stark untersetzendes Räderwerk. In der gezogenen Stellung treibt die Krone über den Kupplungstrieb das Zeigerwerk. Im Aufzug treiben kleine Räder große; es wird ins Langsame übersetzt. Gerechnet wird deshalb wie beim Zeigerwerk (Abschnitt 4.3) mit der Untersetzung: Zähnezahlen der getriebenen Räder geteilt durch die der treibenden. Das ist der Kehrwert der Übersetzung aus Abschnitt 4.1.

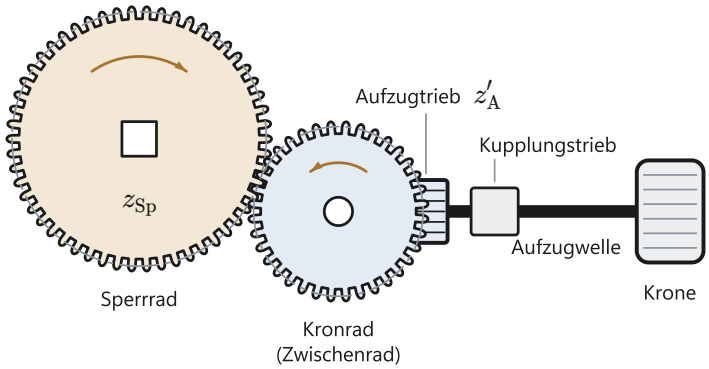


Abb. 3.13 Kronenaufzug von oben (Schema): Der Aufzugtrieb mit z'_{A} Zähnen treibt über das Kronrad das Sperrrad mit z_{Sp} Zähnen auf dem Federkern

Kronenumdrehungen für den Aufzug

(3.30) GESELLE

$$N_{\mathrm{K}} = \frac{N \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{A}}}$$

UMGESTELLT $$N = \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{Sp}}}$$

N_{K}	Umdrehungen der Krone	1
N	Umgänge (um die der Federkern die Feder spannt)	1
z_{Sp}	Zähnezahl des Sperrrads	1
z'_{A}	Zähnezahl des Aufzugtriebs (auf der Aufzugwelle)	1

Das Kronrad sitzt zwischen Aufzugtrieb und Sperrrad und ist nur Zwischenrad: Seine Zähnezahl fällt aus der Rechnung. Die Untersetzung des Aufzugs ist die Zähnezahl des Sperrrads geteilt durch die des Aufzugtriebs.

Gilt: Aufzugtrieb, Kronrad und Sperrrad in einer Kette; das Kronrad greift mit derselben Verzahnung in beide. Trägt die Welle des Kronrads zwei verschiedene Räder, zählt diese Stufe mit wie in Formel (4.3).

Gut zu wissen: Jede Umdrehung der Krone bringt so viel Gangdauer, wie die Umlaufzeit des Federhauses geteilt durch die Untersetzung ergibt. Im Beispiel sind das bei 7 Stunden je Umgang knapp 2 Stunden je Umdrehung der Krone.

BEISPIEL Der Aufzugtrieb hat 15 Zähne, das Kronrad 36, das Sperrrad 54. Die Feder lässt sich um 6,5 Umgänge spannen. Wie oft muss die Krone für den Vollaufzug gedreht werden?

Gegeben: $N = 6{,}5$; $z_{\mathrm{Sp}} = 54$; $z'_{\mathrm{A}} = 15$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{K}} &= \frac{N \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{A}}} \\ &= \frac{6{,}5 \cdot 54}{15} \\ &= 23{,}4 \end{aligned}$$

23,4 volle Umdrehungen. Von Hand dreht man meist halbe Umdrehungen, also rund 47 Griffe. Die 36 Zähne des Kronrads spielen für die Rechnung keine Rolle.

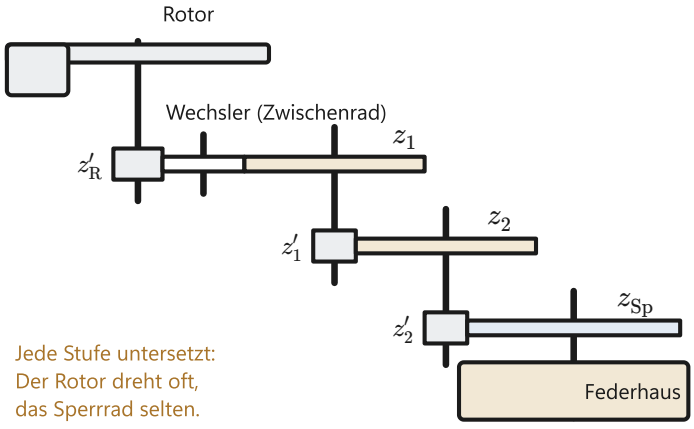


Abb. 3.14 Automatikaufzug, in der Seitenansicht abgewickelt (Schema): Rotortrieb, Wechsler, zwei Reduktionsstufen und Sperrrad

Untersetzung des Automatikaufzugs

(3.31) MEISTER

$$i_{\mathrm{R}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{R}} \cdot z'_1 \cdot z'_2}$$

Der Rotor hat wenig Drehmoment, aber viel Weg. Das Reduktionsräderwerk untersetzt deshalb stark: Im Zähler stehen die getriebenen Räder, im Nenner die treibenden Triebe. Räder des Wechslers, die nur die Drehrichtung gleichrichten und mit derselben Verzahnung in beide Nachbarn greifen, sind Zwischenräder und fallen heraus.

Gilt: zwei Reduktionsstufen zwischen Rotortrieb und Sperrrad; bei anderer Stufenzahl entsprechend mehr oder weniger Faktoren. Richtwert: Die Untersetzung liegt meist zwischen 100 und 180.

i_{R}	Untersetzung des Automatikaufzugs (Rotorumdrehungen je Umgang des Sperrrads)	1
z_1	Zähnezahl des ersten Reduktionsrads	1
z_2	Zähnezahl des zweiten Reduktionsrads	1
z_{Sp}	Zähnezahl des Sperrrads	1
z'_{R}	Zähnezahl des Rotortriebs	1
z'_1	Zähnezahl des Triebs am ersten Reduktionsrad	1
z'_2	Zähnezahl des Triebs am zweiten Reduktionsrad	1

BEISPIEL Der Rotortrieb hat 24 Zähne. Das erste Reduktionsrad hat 66 Zähne und einen Trieb mit 8, das zweite 64 Zähne und einen Trieb mit 10, das Sperrrad 70 Zähne.

Gegeben: $z_1 = 66;\quad z_2 = 64;\quad z_{\mathrm{Sp}} = 70;\quad z'_{\mathrm{R}} = 24;\quad z'_1 = 8;\quad z'_2 = 10$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{R}} &= \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_{\mathrm{Sp}}}{z'_{\mathrm{R}} \cdot z'_1 \cdot z'_2} \\ &= \frac{66 \cdot 64 \cdot 70}{24 \cdot 8 \cdot 10} \\ &= 154 \end{aligned}$$

Der Rotor dreht sich 154-mal, bis das Sperrrad eine Umdrehung gemacht und die Feder um einen Umgang gespannt hat.

Rotorumdrehungen für eine Gangreserve

(3.32) MEISTER

$$N_{\mathrm{R}} = \frac{i_{\mathrm{R}} \cdot t_{\mathrm{R}}}{t_{\mathrm{F}}}$$

N_{R}	Umdrehungen des Rotors (in Aufzugsrichtung)	1
i_{R}	Untersetzung des Automatikaufzugs (Rotorumdrehungen je Umgang des Sperrrads)	1
t_{R}	Gangreserve (die aufgebaut werden soll)	h
t_{F}	Umlaufzeit des Federhauses (Zeit für einen Umgang)	h

Ein Umgang des Sperrrads kostet i_{R} Rotorumdrehungen und bringt so viele Stunden Gang, wie das Federhaus für einen Umgang braucht. Mit 24 Stunden ergibt die Formel den Tagesbedarf: So oft muss sich der Rotor am Tag drehen, damit das Werk seinen Aufzugsstand hält.

Gilt: Mindestwert ohne Verluste: Der Leerweg des Wechslers beim Richtungswechsel ist nicht gerechnet, die Schleppfeder rutscht nicht. Beim einseitigen Aufzug zählen nur die Umdrehungen in Aufzugsrichtung.

Gut zu wissen: Beim Tragen kommen meist mehr Umdrehungen zusammen als nötig; den Überschuss lässt die Schleppfeder durchrutschen (Abschnitt 3.3). Bleibt eine Automatikuhr trotz Tragens stehen, reicht entweder die Bewegung nicht für den Tagesbedarf, oder der Aufzug verliert Weg, etwa durch verharzte Wechslerräder.

BEISPIEL Das Werk aus dem Beispiel davor hat ein Federhaus, das in 7 Stunden einmal umläuft. Wie viele Rotorumdrehungen braucht es für 24 Stunden Gang?

Gegeben: $i_{\mathrm{R}} = 154$; $t_{\mathrm{R}} = 24\,\mathrm{h}$; $t_{\mathrm{F}} = 7\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{R}} &= \frac{i_{\mathrm{R}} \cdot t_{\mathrm{R}}}{t_{\mathrm{F}}} \\ &= \frac{154 \cdot 24\,\mathrm{h}}{7\,\mathrm{h}} \\ &= 528 \end{aligned}$$

528 Umdrehungen am Tag, also 22 je Stunde Gang. Für 42 Stunden Gangreserve aus dem Stillstand sind es 924 Umdrehungen.

Zeigerstellung: Weg des Minutenzeigers

(3.33) GESELLE

$$N_{\mathrm{M}} = \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{K}}}{z_{\mathrm{V}}}$$

N_{M}	Umdrehungen des Minutenzeigers	1
N_{K}	Umdrehungen der Krone	1
z'_{K}	Zähnezahl des Kupplungstriebs (Verzahnung für die Zeigerstellung)	1
z_{V}	Zähnezahl des Viertelrohrs	1

In der Stellung zum Zeigerstellen greift der Kupplungstrieb in das Zeigerstellrad. Dieses treibt über das Wechselrad das Viertelrohr mit dem Minutenzeiger. Zeigerstellrad und Wechselrad sind dabei Zwischenräder. Eine Umdrehung des Minutenzeigers sind 60 Minuten Zeigerweg.

Gilt: Zeigerstellrad, weitere Zwischenräder und Wechselrad greifen jeweils mit derselben Verzahnung in ihre beiden Nachbarn. Der Stundenzeiger folgt über das Zeigerwerk im Verhältnis 12 zu 1 (Abschnitt 4.3).

BEISPIEL Der Kupplungstrieb hat für die Zeigerstellung 9 Zähne, das Viertelrohr 12. Wie weit rückt der Minutenzeiger bei einer Umdrehung der Krone?

Gegeben: $N_{\mathrm{K}} = 1$; $z'_{\mathrm{K}} = 9$; $z_{\mathrm{V}} = 12$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{M}} &= \frac{N_{\mathrm{K}} \cdot z'_{\mathrm{K}}}{z_{\mathrm{V}}} \\ &= \frac{1 \cdot 9}{12} \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Um eine Dreiviertelumdrehung, das sind 45 Minuten Zeigerweg je Umdrehung der Krone.

Merksatz: Kronrad, Zeigerstellrad und Wechselrad sind hier nur Zwischenräder. Es zählen das erste treibende und das letzte getriebene Rad.

4 Räderwerk und Verzahnung

Das Räderwerk überträgt die Kraft des Antriebs auf die Hemmung und zählt dabei die Schwingungen des Gangreglers: Seine Übersetzungen bestimmen, wie schnell jede Welle dreht und welche Schlagzahl zu einem Werk gehört. Darum beginnt die Berechnung eines unbekannten Werks mit dem Zählen der Zähne.

Die Abschnitte 4.1 bis 4.3 rechnen mit Zähnezahlen, Abschnitt 4.4 mit den Maßen der Verzahnung. Schlagwerk, Kalender und Mondphase folgen denselben Regeln; den Schluss macht die Reibung im Räderwerk. Das Zeichen k steht je nach Formel für den Kopfzuschlag oder für eine Anzahl; maßgeblich ist die Größentabelle der Formel.

4.1 Übersetzung

Ein Rad treibt einen Trieb: Das ist der Grundbaustein jedes Räderwerks. Triebe sind kleine Zahnräder mit meist 6 bis 16 Zähnen; sie sitzen fest auf der Welle des nächsten Rades.

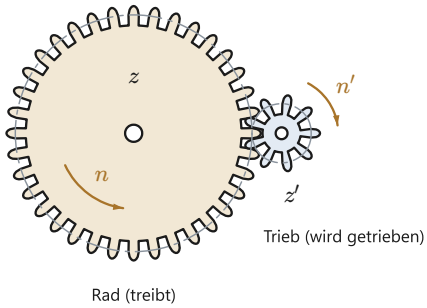


Abb. 4.1 Rad treibt Trieb: Der Trieb dreht um die Übersetzung schneller und in der Gegenrichtung

Übersetzung eines Eingriffs

(4.1) GESELLE

$$i = \frac{z}{z'}$$

Die Übersetzung sagt, wie oft sich der Trieb dreht, während das Rad eine Umdrehung macht. In diesem Kapitel ist z die Zähnezahl eines Rades und z' die eines Triebes; ein Index nennt die Welle.

Gilt: Rad treibt Trieb, wie im Gehwerk und im Schlagwerk: Es wird ins Schnelle übersetzt. Wo ein Trieb ein Rad treibt (Zeigerwerk, Aufzug), wird ins Langsame übersetzt; dann rechnet man mit der Untersetzung, der Zähnezahl des getriebenen Rades geteilt durch die des treibenden Triebes, Formel (4.11).

i	Übersetzung (größer als 1 heißt: ins Schnelle)	1
z	Zähnezahl (des treibenden Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes (wird getrieben)	1

BEISPIEL Das Minutenrad hat 80 Zähne und treibt den Kleinbodentrieb mit 10 Zähnen.

Gegeben: $z = 80$; $z' = 10$

$$\begin{aligned} i &= \frac{z}{z'} \\ &= \frac{80}{10} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Der Kleinbodentrieb dreht sich achtmal, während das Minutenrad eine Umdrehung macht.

Drehzahl des Triebes

(4.2) GESELLE

$$n' = \frac{n \cdot z}{z'}$$

Im Eingriff laufen auf beiden Seiten gleich viele Zähne durch: $z \cdot n = z' \cdot n'$. Der Trieb dreht darum um die Übersetzung schneller als das Rad.

n'	Drehzahl des getriebenen Triebes	$\frac{1}{\mathrm{h}}$
n	Drehzahl (des treibenden Rades)	$\frac{1}{\mathrm{h}}$
z	Zähnezahl (des treibenden Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes (wird getrieben)	1

BEISPIEL Das Minutenrad (80 Zähne) dreht einmal je Stunde. Wie schnell dreht der Kleinbodentrieb mit 10 Zähnen?

Gegeben: $n = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}; \quad z = 80; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} n' &= \frac{n \cdot z}{z'} \\ &= \frac{1\,\frac{1}{\mathrm{h}} \cdot 80}{10} \\ &= 8\,\frac{1}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Trieb und Kleinbodenrad drehen achtmal je Stunde, eine Umdrehung dauert 7,5 min.

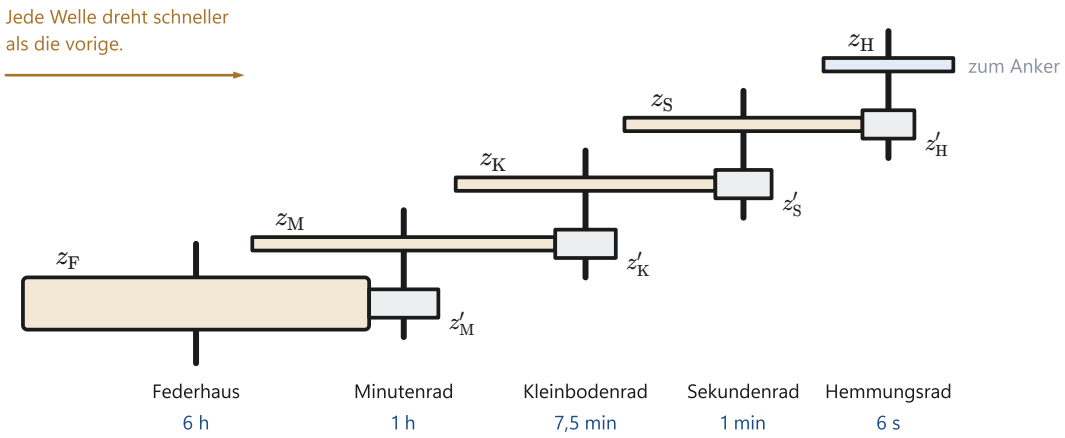


Abb. 4.2 Räderwerk einer Kleinuhr, in der Seitenansicht abgewickelt. Darunter die Umlaufzeiten für die Zähnezahlen 72 : 12, 80 : 10, 75 : 10 und 80 : 8

Gesamtübersetzung

(4.3) GESELLE

$$i_{\text{ges}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z'_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3}$$

Liegen mehrere Eingriffe hintereinander, werden die Einzelübersetzungen multipliziert: Produkt der Zähnezahlen aller treibenden Räder durch das Produkt aller getriebenen Triebe. Bei mehr oder weniger Eingriffen wird der Bruch entsprechend länger oder kürzer.

i_{ges}	Gesamtübersetzung (von der ersten zur letzten Welle)	1
z_1	Zähnezahl des ersten treibenden Rades	1
z_2	Zähnezahl des zweiten treibenden Rades	1
z_3	Zähnezahl des dritten treibenden Rades	1
z'_1	Zähnezahl des ersten getriebenen Triebes	1
z'_2	Zähnezahl des zweiten getriebenen Triebes	1
z'_3	Zähnezahl des dritten getriebenen Triebes	1

Gut zu wissen: Ein Zwischenrad, das getrieben wird und mit denselben Zähnen weitertreibt, steht einmal im Zähler und einmal im Nenner. Es ändert die Übersetzung nicht, nur die Drehrichtung.

BEISPIEL Ein Taschenuhrwerk hat Minutenrad 80, Kleinbodenrad 75 und Sekundenrad 80 Zähne; Kleinboden- und Sekundentrieb haben je 10, der Hemmungstrieb 8 Zähne.

Gegeben: $z_1 = 80;\quad z_2 = 75;\quad z_3 = 80;\quad z'_1 = 10;\quad z'_2 = 10;\quad z'_3 = 8$

$$\begin{aligned} i_{\text{ges}} &= \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z'_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3} \\ &= \frac{80 \cdot 75 \cdot 80}{10 \cdot 10 \cdot 8} \\ &= 600 \end{aligned}$$

Das Hemmungsrad dreht 600-mal, während das Minutenrad eine Umdrehung macht. Die Einzelübersetzungen sind 8, 7,5 und 10.

Umlaufzeit

(4.4) GESELLE

$$t'_{\text{U}} = \frac{t_{\text{U}} \cdot z'}{z}$$

Die Umlaufzeit ist der Kehrwert der Drehzahl. Von Welle zu Welle wird sie um die Übersetzung kürzer. In Abb. 4.2 stehen die Umlaufzeiten unter den Wellen.

t'_{U}	Umlaufzeit des Triebes (Zeit für eine Umdrehung)	s
t_{U}	Umlaufzeit des treibenden Rades	s
z	Zähnezahl (des treibenden Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes (wird getrieben)	1

BEISPIEL Das Sekundenrad (80 Zähne) dreht in 60 s einmal und treibt den Hemmungstrieb mit 8 Zähnen.

Gegeben: $t_{\text{U}} = 60\,\text{s};\quad z' = 8;\quad z = 80$

$$\begin{aligned} t'_{\text{U}} &= \frac{t_{\text{U}} \cdot z'}{z} \\ &= \frac{60\,\text{s} \cdot 8}{80} \\ &= 6\,\text{s} \end{aligned}$$

Das Hemmungsrad braucht 6 s für eine Umdrehung.

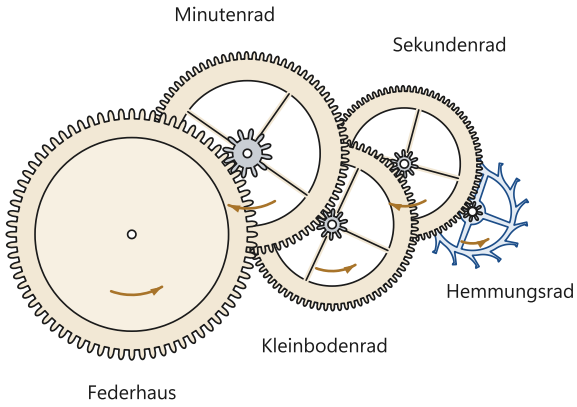


Abb. 4.3 Dasselbe Räderwerk in der Draufsicht: Jede Welle dreht entgegengesetzt zur vorigen

Merksatz: Jeder Eingriff kehrt die Drehrichtung um. Nach einer geraden Zahl von Eingriffen dreht die letzte Welle wie die erste, nach einer ungeraden entgegengesetzt.

Drehmoment am Trieb

(4.5) GESELLE

$$M' = \frac{M \cdot \eta \cdot z'}{z}$$

Was das Räderwerk an Drehzahl gewinnt, verliert es an Drehmoment. Die Reibung an den Zahnflanken und in den Lagern nimmt zusätzlich einen Teil weg.

Gilt: gleichförmige Drehung. Das Drehmoment schwankt während des Eingriffs eines Zahns etwas; die Formel liefert den Mittelwert.

M'	Drehmoment an der Welle des getriebenen Triebes	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
M	Drehmoment (an der Welle des treibenden Rades)	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
η	Wirkungsgrad (je Eingriff; Richtwert 0,90 bis 0,95; ohne Reibung 1)	1
z	Zähnezahl (des treibenden Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes (wird getrieben)	1

BEISPIEL Ein Federhaus mit 72 Zähnen gibt 8 N·mm ab und treibt den Minutentrieb mit 12 Zähnen. Der Eingriff hat den Wirkungsgrad 0,95.

Gegeben: $M = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\eta = 0{,}95$; $z' = 12$; $z = 72$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{M \cdot \eta \cdot z'}{z} \\ &= \frac{8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 0{,}95 \cdot 12}{72} \\ &\approx 1{,}27\,\mathrm{N{\cdot}mm} \end{aligned}$$

An der Minutenradwelle kommen 1,27 N·mm an. Ohne Reibung wären es 1,33 N·mm.

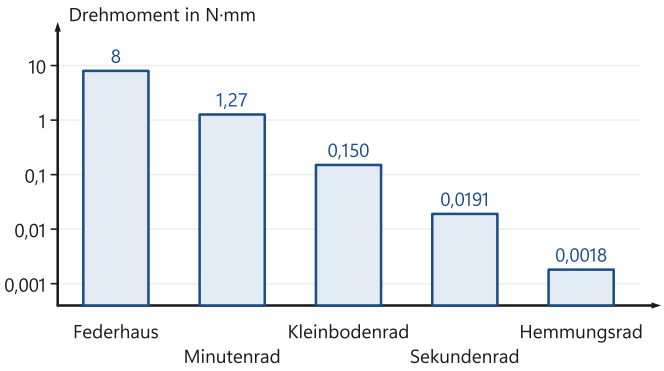


Abb. 4.4 Drehmoment an den Wellen des Räderwerks aus Abb. 4.2 bei 8 N·mm am Federhaus und $\eta = 0{,}95$ je Eingriff

4.2 Gehwerk berechnen

Das Gehwerk verbindet das Minutenrad, das einmal je Stunde dreht, mit dem Hemmungsrad. Seine Übersetzung und die Zähnezahl des Hemmungsrads legen fest, wie viele Halbschwingungen der Gangregler je Stunde machen muss, damit die Zeiger richtig laufen.

Mit diesen Formeln bestimmt man die Schlagzahl eines unbekannten Werks, die Länge eines fehlenden Pendels (Kapitel 6) und die Zähnezahl eines fehlenden Rades oder Triebes.

Schlagzahl aus dem Räderwerk

(4.6) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot i \cdot n_\mathrm{M}$$

Jeder Zahn des Hemmungsrads lässt den Gangregler zwei Halbschwingungen machen: eine am Eingang, eine am Ausgang. Je Umdrehung des Hemmungsrads sind das $2 \cdot z_\mathrm{H}$ Schläge.

Gilt: alle gebräuchlichen Hemmungen; i nach Formel (4.3). Das Minutenrad dreht einmal je Stunde; geht die Rechnung von einer anderen Welle aus, wird deren Drehzahl eingesetzt.

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
z_H	Zähnezahl des Hemmungsrads	1
i	Übersetzung (vom Minutenrad zum Hemmungsrad)	1
n_M	Drehzahl des Minutenrads (eine Umdrehung je Stunde)	$\frac{1}{\mathrm{h}}$

BEISPIEL Ein Regulator hat ein Minutenrad mit 80 und ein Zwischenrad mit 75 Zähnen, zwei Triebe mit je 10 Zähnen und ein Hemmungsrad mit 30 Zähnen. Die Übersetzung vom Minutenrad zum Hemmungsrad ist $8 \cdot 7{,}5 = 60$.

Gegeben: $z_\mathrm{H} = 30; \quad i = 60; \quad n_\mathrm{M} = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= 2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot i \cdot n_\mathrm{M} \\ &= 2 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 1\,\tfrac{1}{\mathrm{h}} \\ &= 3600\,\tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

3600 Schläge je Stunde sind 60 je Minute. Zu diesem Werk gehört ein Sekundenpendel von 994 mm Länge (Kapitel 6).

Schlagzahl der Kleinuhr aus den Zähnezahlen

(4.7) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S} \cdot z'_\mathrm{H}}$$

Im Zähler stehen die treibenden Räder, im Nenner die getriebenen Triebe. Jeder Trieb trägt den Index der Welle, auf der er sitzt (Abb. 4.2).

Gilt: Räderwerk mit drei Eingriffen zwischen Minutenrad und Hemmungsrad. Bei anderer Bauart den Bruch nach Formel (4.3) anpassen.

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
z_H	Zähnezahl des Hemmungsrads	1
n_M	Drehzahl des Minutenrads (eine Umdrehung je Stunde)	$\frac{1}{\mathrm{h}}$
z_M	Zähnezahl des Minutenrads	1
z_K	Zähnezahl des Kleinbodenrads	1
z_S	Zähnezahl des Sekundenrads	1
z'_K	Zähnezahl des Kleinbodentriebs	1
z'_S	Zähnezahl des Sekundentriebs	1
z'_H	Zähnezahl des Hemmungstriebs	1

Gut zu wissen: Fehlt ein Rad oder Trieb, wird die Formel nach seiner Zähnezahl umgestellt. Das Ergebnis muss eine ganze Zahl sein; sonst ist eine Zähnezahl falsch gezählt oder die Schlagzahl falsch angenommen.

BEISPIEL Gezählt wurden: Minutenrad 80, Kleinbodenrad 75, Sekundenrad 84, Hemmungsrad 20 Zähne; Kleinbodentrieb 10, Sekundentrieb 10, Hemmungstrieb 7 Zähne.

Gegeben: $z_\mathrm{H} = 20$; $n_\mathrm{M} = 1\,\frac{1}{\mathrm{h}}$; $z_\mathrm{M} = 80$; $z_\mathrm{K} = 75$; $z_\mathrm{S} = 84$; $z'_\mathrm{K} = 10$; $z'_\mathrm{S} = 10$; $z'_\mathrm{H} = 7$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S} \cdot z'_\mathrm{H}} \\ &= \frac{2 \cdot 20 \cdot 1\,\frac{1}{\mathrm{h}} \cdot 80 \cdot 75 \cdot 84}{10 \cdot 10 \cdot 7} \\ &= 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Das Werk schlägt 28 800 Halbschwingungen je Stunde, die Unruh schwingt mit 4 Hz.

Drehzahl des Hemmungsrads

(4.8) GESELLE

$$n_\mathrm{H} = \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z_\mathrm{H}}$$

So findet man die Drehzahl, die das Räderwerk am Hemmungsrad liefern muss. Mehr Zähne am Hemmungsrad heißt: Das Räderwerk kann langsamer laufen.

n_H	Drehzahl des Hemmungsrads	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
z_H	Zähnezahl des Hemmungsrads	1

BEISPIEL Wie schnell dreht ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen bei 28 800 A/h?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $z_\mathrm{H} = 20$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{H} &= \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z_\mathrm{H}} \\ &= \frac{28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{2 \cdot 20} \\ &= 12\,\frac{1}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Zwölf Umdrehungen je Minute, eine Umdrehung dauert 5 s. Ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen bräuchte bei gleicher Schlagzahl 16 Umdrehungen je Minute.

Kleinuhren bis 21600 A/h haben fast immer ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen, Werke mit 28800 A/h und mehr häufig eines mit 20 Zähnen. Bei Großuhren reicht die Spanne von etwa 15 bis 40 Zähnen. Sitzt der Sekundenzeiger auf der Welle des Hemmungsrads und schlägt das Pendel Sekunden, hat das Hemmungsrad 30 Zähne.

Bedingung für das Sekundenrad

(4.9) GESELLE

$$\frac{z_\mathrm{M} \cdot z_\mathrm{K}}{z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}} = 60$$

UMGESTELLT $$z_\mathrm{K} = \frac{60 \cdot z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}}{z_\mathrm{M}}$$

z_M	Zähnezahl des Minutenrads	1
z_K	Zähnezahl des Kleinbodenrads	1
z'_K	Zähnezahl des Kleinbodentriebs	1
z'_S	Zähnezahl des Sekundentriebs	1

Trägt die Welle des Sekundenrads den Sekundenzeiger, muss sie 60-mal so schnell drehen wie das Minutenrad. Üblich ist die Aufteilung $8 \cdot 7{,}5$.

Gilt: Werke, deren Sekundenrad einmal je Minute dreht (kleine Sekunde oder Sekundenrad in der Mitte).

BEISPIEL In einem Werk fehlt das Kleinbodenrad. Das Minutenrad hat 80 Zähne, Kleinbodentrieb und Sekundentrieb haben je 10 Zähne.

Gegeben: $z'_\mathrm{K} = 10$; $z'_\mathrm{S} = 10$; $z_\mathrm{M} = 80$

$$\begin{aligned} z_\mathrm{K} &= \frac{60 \cdot z'_\mathrm{K} \cdot z'_\mathrm{S}}{z_\mathrm{M}} \\ &= \frac{60 \cdot 10 \cdot 10}{80} \\ &= 75 \end{aligned}$$

Das fehlende Kleinbodenrad hat 75 Zähne. Den Modul liefert der Achsabstand, Formel (4.16).

Schlagzahl aus dem letzten Eingriff

(4.10) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S} \cdot z_\mathrm{S}}{z'_\mathrm{H}}$$

UMGESTELLT $$z_\mathrm{S} = \frac{n_\mathrm{h} \cdot z'_\mathrm{H}}{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S}}$$

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
z_H	Zähnezahl des Hemmungsrads	1
n_S	Drehzahl des Sekundenrads (eine Umdrehung je Minute)	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
z_S	Zähnezahl des Sekundenrads	1
z'_H	Zähnezahl des Hemmungstriebs	1

Dreht das Sekundenrad einmal je Minute, genügt der letzte Eingriff, um die Schlagzahl zu prüfen oder ein fehlendes Sekundenrad zu berechnen.

Gilt: Sekundenrad dreht einmal je Minute.

BEISPIEL Ein Werk mit 28800 A/h hat ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen und einen Hemmungstrieb mit 7 Zähnen. Das Sekundenrad fehlt.

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $z'_\mathrm{H} = 7$; $z_\mathrm{H} = 20$; $n_\mathrm{S} = 1\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} z_\mathrm{S} &= \frac{n_\mathrm{h} \cdot z'_\mathrm{H}}{2 \cdot z_\mathrm{H} \cdot n_\mathrm{S}} \\ &= \frac{28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \cdot 7}{2 \cdot 20 \cdot 1\ \frac{1}{\mathrm{min}}} \\ &= 84 \end{aligned}$$

Das Sekundenrad muss 84 Zähne haben.

Zähnezahlsätze für Kleinuhren (gerechnete Beispiele, Sekundenrad dreht einmal je Minute)

Schlagzahl in A/h	Minutenrad : Kleinbodentrieb	Kleinbodenrad : Sekundentrieb	Sekundenrad : Hemmungstrieb	Hemmungsrad	Übersetzung
18 000	80 : 10	75 : 10	80 : 8	15	600
18 000	64 : 8	60 : 8	70 : 7	15	600
21 600	80 : 10	75 : 10	72 : 6	15	720
21 600	64 : 8	60 : 8	84 : 7	15	720
28 800	80 : 10	75 : 10	84 : 7	20	720
36 000	80 : 10	75 : 10	90 : 6	20	900

Die Sätze sind mit Formel (4.7) gerechnet und zeigen, wie die Schlagzahl aus den Zähnezahlen entsteht. Ausgeführte Kaliber weichen davon ab; maßgeblich sind immer die gezählten Zähne.

Merksatz: Schlagzahl gleich zweimal Hemmungsradzähne mal Übersetzung vom Minutenrad zum Hemmungsrad. Treibende Räder in den Zähler, getriebene Triebe in den Nenner.

4.3 Zeigerwerk

Das Zeigerwerk sitzt unter dem Zifferblatt und leitet aus der Drehung des Minutenzeigers die des Stundenzeigers ab. Das Viertelrohr, auch Minutenrohr genannt, sitzt mit Reibung auf der Welle des Minutenrads, damit sich die Zeiger stellen lassen.

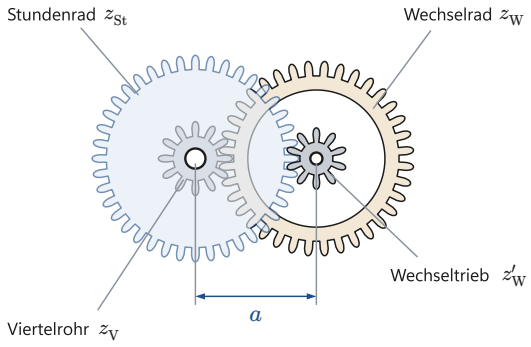


Abb. 4.5 Zeigerwerk in der Draufsicht: Beide Eingriffe haben denselben Achsabstand a

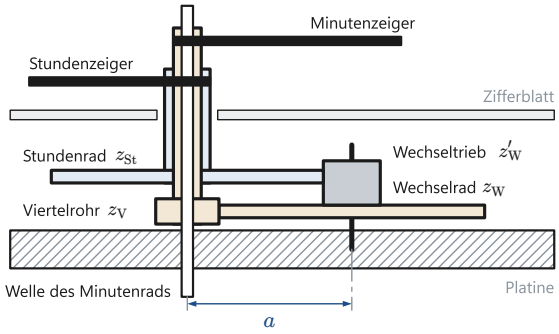


Abb. 4.6 Zeigerwerk im Schnitt (Schema): Das Stundenrad dreht lose auf dem Viertelrohr

Untersetzung des Zeigerwerks

(4.11) GESELLE

$$\frac{z_{\mathrm{W}} \cdot z_{\mathrm{St}}}{z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}} = 12$$

UMGESTELLT $z_{\mathrm{St}} = \dfrac{12 \cdot z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}}{z_{\mathrm{W}}}$

z_{W}	Zähnezahl des Wechselrads	1
z_{St}	Zähnezahl des Stundenrads	1
z_{V}	Zähnezahl des Viertelrohrs (treibt das Wechselrad)	1
z'_{W}	Zähnezahl des Wechseltriebs (treibt das Stundenrad)	1

Das Viertelrohr trägt den Minutenzeiger und dreht einmal je Stunde, das Stundenrad einmal in 12 Stunden. Weil hier die Triebe treiben, stehen die getriebenen Räder im Zähler: Das Zeigerwerk untersetzt 12 zu 1.

Gilt: Anzeige mit 12 Stunden je Umlauf des Stundenzeigers. Nach zwei Eingriffen dreht das Stundenrad in derselben Richtung wie das Viertelrohr.

BEISPIEL An einem Zeigerwerk fehlt das Stundenrad. Das Viertelrohr hat 14 Zähne, das Wechselrad 42, der Wechseltrieb 12.

Gegeben: $z_{\mathrm{V}} = 14$; $z'_{\mathrm{W}} = 12$; $z_{\mathrm{W}} = 42$

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{St}} &= \frac{12 \cdot z_{\mathrm{V}} \cdot z'_{\mathrm{W}}}{z_{\mathrm{W}}} \\ &= \frac{12 \cdot 14 \cdot 12}{42} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Das Stundenrad hat 48 Zähne. Die Untersetzung teilt sich in 3 am ersten und 4 am zweiten Eingriff.

24-Stunden-Anzeige

(4.12) MEISTER

$$z_{24} = 2 \cdot z_{\mathrm{A}}$$

z_{24}	Zähnezahl des 24-Stunden-Rads	1
z_{A}	Zähnezahl des treibenden Rades auf dem Stundenrohr	1

Der 24-Stunden-Zeiger dreht halb so schnell wie der Stundenzeiger. Ein Zwischenrad ändert die Untersetzung nicht, lässt den Zeiger aber rechtsherum laufen. Dieselbe Untersetzung 2 zu 1 treibt das Schaltrad des Datums, das einmal am Tag schaltet (Abschnitt 4.6).

Gilt: Antrieb vom Stundenrad aus. Vom Viertelrohr aus gerechnet ist die Untersetzung 24 zu 1.

BEISPIEL Auf dem Stundenrohr sitzt ein Rad mit 24 Zähnen, das über ein Zwischenrad das 24-Stunden-Rad treibt.

Gegeben: $z_{\mathrm{A}} = 24$

$$\begin{aligned} z_{24} &= 2 \cdot z_{\mathrm{A}} \\ &= 2 \cdot 24 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Das 24-Stunden-Rad braucht 48 Zähne. Die Zähnezahl des Zwischenrads ist frei wählbar.

Gleicher Achsabstand im Zeigerwerk

(4.13) MEISTER

$$m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W}) = m_2 \cdot (z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St})$$

UMGESTELLT $$m_2 = \frac{m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W})}{z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St}}$$

Viertelrohr und Stundenrad drehen um dieselbe Achse, Wechselrad und Wechseltrieb auch. Beide Eingriffe haben darum denselben Achsabstand nach Formel (4.16). Sind die Zähnezahlsummen verschieden, müssen es auch die Module sein.

m_1	Modul des Eingriffs Viertelrohr und Wechselrad	mm
z_V	Zähnezahl des Viertelrohrs (treibt das Wechselrad)	1
z_W	Zähnezahl des Wechselrads	1
m_2	Modul des Eingriffs Wechseltrieb und Stundenrad	mm
z'_W	Zähnezahl des Wechseltriebs (treibt das Stundenrad)	1
z_St	Zähnezahl des Stundenrads	1

BEISPIEL Ein Zeigerwerk hat Viertelrohr 12, Wechselrad 36, Wechseltrieb 10 und Stundenrad 40 Zähne. Der erste Eingriff hat den Modul 0,25 mm.

Gegeben: $m_1 = 0{,}25\,\mathrm{mm}$; $z_\mathrm{V} = 12$; $z_\mathrm{W} = 36$; $z'_\mathrm{W} = 10$; $z_\mathrm{St} = 40$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{m_1 \cdot (z_\mathrm{V} + z_\mathrm{W})}{z'_\mathrm{W} + z_\mathrm{St}} \\ &= \frac{0{,}25\,\mathrm{mm} \cdot (12 + 36)}{10 + 40} \\ &= 0{,}24\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der zweite Eingriff braucht den Modul 0,24 mm. Mit den Zähnezahlen 10 und 30 sowie 8 und 32 kämen beide Eingriffe mit demselben Modul aus.

4.4 Verzahnungsgeometrie

Alle Maße einer Verzahnung hängen am Modul. Mit Modul und Zähnezahl liegen Teilkreis, Achsabstand und Zahngröße fest; die Zahnform bestimmt dann Kopf- und Fußkreis.

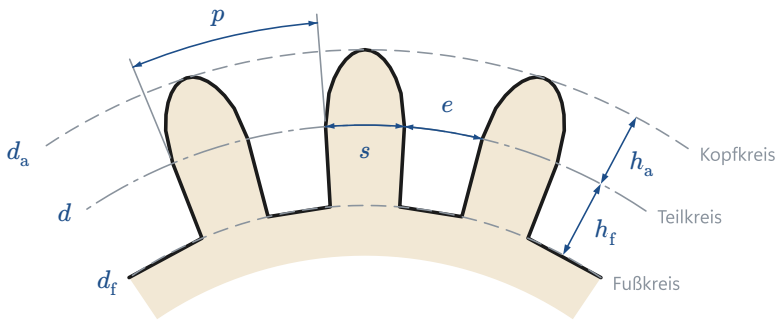


Abb. 4.7 Maße am Zahnrad: Kopfkreis d_a, Teilkreis d, Fußkreis d_f, Teilung p, Zahndicke s, Lücke e, Kopfhöhe h_a und Fußhöhe h_f

Teilung und Modul

(4.14) GESELLE

$$p = \pi \cdot m$$

UMGESTELLT $\quad m = \dfrac{p}{\pi}$

p	Teilung (Abstand von Zahn zu Zahn, als Bogen auf dem Teilkreis)	mm
m	Modul	mm

Der Modul ist die Teilung geteilt durch π. Er ist das Maß für die Zahngröße: Nur Rad und Trieb mit gleichem Modul passen zusammen.

BEISPIEL Wie groß ist die Teilung bei Modul 0,2 mm?

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} p &= \pi \cdot m \\ &= \pi \cdot 0{,}2\,\mathrm{mm} \\ &\approx 0{,}628\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Von Zahn zu Zahn sind es auf dem Teilkreis 0,628 mm; Zahn und Lücke sind also je rund 0,3 mm breit.

Teilkreisdurchmesser

(4.15) GESELLE

$$d = m \cdot z$$

UMGESTELLT $\quad m = \dfrac{d}{z}$

d	Teilkreisdurchmesser	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl	1

Der Teilkreis ist der gedachte Kreis, auf dem Rad und Trieb aufeinander abrollen wie zwei glatte Reibräder.

BEISPIEL Ein Rad hat 80 Zähne und den Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}; \quad z = 80$

$$\begin{aligned} d &= m \cdot z \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot 80 \\ &= 16\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Teilkreis misst 16 mm. Am fertigen Rad ist er nicht zu sehen; messen kann man nur den Kopfkreis.

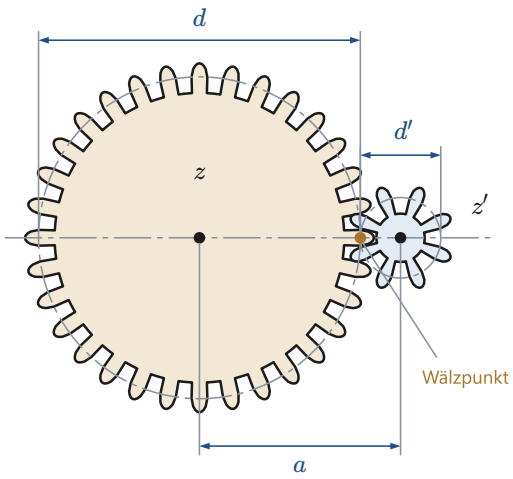


Abb. 4.8 Eingriff: Die Teilkreise d und d' berühren sich im Wälzpunkt

Achsabstand

(4.16) GESELLE

$$a = \frac{m \cdot (z + z')}{2}$$

UMGESTELLT $m = \frac{2 \cdot a}{z + z'}$

Die Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt. Der Achsabstand ist die Summe der beiden Teilkreishalbmesser. Umgestellt liefert die Formel den Modul aus dem gemessenen Achsabstand.

Gilt: Außenverzahnung mit richtig eingestellter Eingriffstiefe.

a	Achsabstand	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl (des Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes	1

BEISPIEL Zwischen zwei Lagern werden 8,5 mm Achsabstand gemessen. Das Rad hat 75 Zähne, der Trieb 10.

Gegeben: $a = 8{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 75; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} m &= \frac{2 \cdot a}{z + z'} \\ &= \frac{2 \cdot 8{,}5\,\mathrm{mm}}{75 + 10} \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Eingriff hat den Modul 0,2 mm.

Teilkreis aus dem Achsabstand

(4.17) MEISTER

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot z}{z + z'}$$

Der Achsabstand teilt sich im Verhältnis der Zähnezahlen auf Rad und Trieb auf. Für den Trieb steht z' im Zähler.

d	Teilkreisdurchmesser (des Rades)	mm
a	Achsabstand	mm
z	Zähnezahl (des Rades)	1
z'	Zähnezahl des Triebes	1

BEISPIEL Achsabstand 8,5 mm, Rad 75 Zähne, Trieb 10 Zähne.

Gegeben: $a = 8{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 75; \quad z' = 10$

$$\begin{aligned} d &= \frac{2 \cdot a \cdot z}{z + z'} \\ &= \frac{2 \cdot 8{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 75}{75 + 10} \\ &= 15\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Teilkreis des Rades misst 15 mm, für den Trieb bleiben 2 mm.

Uhrenverzahnung. Im Gehwerk treibt das Rad den Trieb, und zwar mit möglichst gleichmäßiger Kraft und wenig Reibung. Dafür hat sich die Zykloidenverzahnung durchgesetzt, heute meist als Kreisbogenverzahnung nach den Normen der Uhrenindustrie ausgeführt: Der Radzahn trägt über dem Teilkreis einen Spitzbogen, der Triebzahn hat gerade, zur Mitte laufende Flanken und einen runden oder spitzbogigen Kopf. Die Kopfhöhen hängen von den Zähnezahlen ab. Die folgenden Formeln fassen sie in einem Zuschlag zur Zähnezahl zusammen.

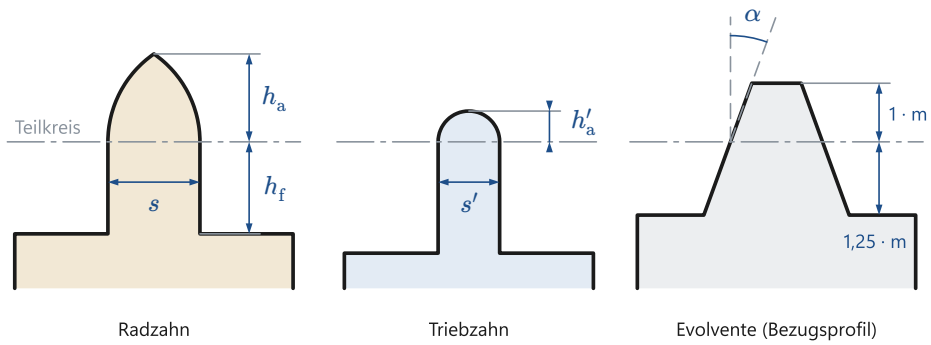


Abb. 4.9 Zahnformen, auf geradem Teilkreis gezeichnet: Radzahn mit Spitzbogen, Triebzahn mit halbrundem Kopf, Bezugsprofil der Evolventenverzahnung mit $\alpha = 20°$

Kopfkreis des Rades

(4.18) NÄHERUNG GESELLE

$$d_a \approx m \cdot (z + k)$$

Der Kopfkreis ist der Außendurchmesser des Rades und das einzige Maß, das sich leicht messen lässt. Die Kopfhöhe ist $h_a = \frac{k}{2} \cdot m$.

Gilt: Uhrenverzahnung, Rad treibt Trieb. k aus der Tabelle; ohne Tabelle rechnet man mit $k \approx 3$, in Kursaufgaben auch mit $k \approx \pi$.

d_a	Kopfkreisdurchmesser (des Rades)	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl (des Rades)	1
k	Kopfzuschlag (des Rades: doppelte Kopfhöhe, in Modul gemessen)	1

BEISPIEL Ein Rad mit 80 Zähnen und Modul 0,2 mm greift in einen Trieb mit 10 Zähnen; nach der Tabelle ist $k = 3{,}19$.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$; $z = 80$; $k = 3{,}19$

$$\begin{aligned} d_a &\approx m \cdot (z + k) \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot (80 + 3{,}19) \\ &\approx 16{,}64\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Rad wird auf 16,64 mm Kopfkreis gedreht; der Teilkreis liegt 0,32 mm unter den Zahnspitzen.

Kopfzuschlag k des Rades im Überblick (gerundet, für Übersetzungen von 6 bis 10)

Zähnezahl des Triebes	6	7	8	10	12
Kopfzuschlag k	2,6	2,8	2,9	3,2	3,4

Je mehr Zähne der Trieb hat, desto höher wird der Spitzbogen des Radzahns. Die genauen Werte hängen auch von der Zähnezahl des Rades ab; sie stehen in der folgenden Tabelle.

Kopfzuschlag k des Rades nach den Zähnezahlen von Rad und Trieb (Tabellenwerte der Uhrenverzahnung, Zykloidenverzahnung)

Zähnezahl z des Rades	Trieb $z' = 6$	$z' = 7$	$z' = 8$	$z' = 9$	$z' = 10$	$z' = 12$	$z' = 15$
20	2,53	2,65	2,76	2,86	2,95	3,10	3,24
24	2,56	2,68	2,79	2,90	2,99	3,14	3,31
25	2,57	2,69	2,80	2,91	3,00	3,15	3,33
28	2,57	2,71	2,82	2,93	3,03	3,18	3,38
30	2,58	2,71	2,83	2,94	3,04	3,20	3,40
32	2,59	2,72	2,84	2,95	3,06	3,22	3,43
35	2,60	2,73	2,85	2,96	3,07	3,25	3,46
36	2,60	2,73	2,85	2,96	3,08	3,26	3,47
40	2,60	2,74	2,86	2,98	3,10	3,29	3,51
42	2,61	2,74	2,87	2,98	3,10	3,30	3,53
45	2,61	2,74	2,88	3,00	3,12	3,32	3,55
48	2,62	2,75	2,88	3,00	3,12	3,33	3,56
50	2,62	2,75	2,89	3,01	3,12	3,33	3,57
54	2,62	2,75	2,89	3,01	3,13	3,35	3,59
56	2,62	2,76	2,90	3,02	3,13	3,35	3,60
60	2,63	2,76	2,90	3,02	3,14	3,36	3,61
64	2,63	2,77	2,91	3,03	3,15	3,37	3,62
70	2,63	2,77	2,92	3,05	3,17	3,39	3,64
72	2,64	2,78	2,92	3,05	3,17	3,39	3,64
75	2,64	2,78	2,93	3,06	3,18	3,40	3,65
80	2,64	2,79	2,93	3,07	3,19	3,41	3,66
84	2,64	2,79	2,93	3,07	3,20	3,42	3,67
90	2,65	2,80	2,94	3,08	3,21	3,44	3,69
96	2,65	2,80	2,94	3,09	3,22	3,45	3,70
100	2,66	2,81	2,95	3,10	3,23	3,46	3,71
110	2,66	2,81	2,96	3,11	3,24	3,47	3,73
120	2,67	2,82	2,97	3,12	3,25	3,49	3,75
140	2,68	2,84	2,99	3,13	3,27	3,51	3,78
150	2,69	2,84	3,00	3,14	3,28	3,52	3,80
160	2,69	2,85	3,01	3,15	3,29	3,52	3,81
180	2,70	2,86	3,01	3,15	3,30	3,53	3,83
200	2,71	2,87	3,02	3,16	3,31	3,55	3,85

Mit diesen Werten rechnen Kurs- und Prüfungsaufgaben. Für Zähnezahlen zwischen den Zeilen nimmt man die nächstliegende Zeile; von Zeile zu Zeile ändert sich k nur um wenige Hundertstel. Die Kopfhöhe des Radzahns ist $h_{\mathrm{a}} = \frac{k}{2} \cdot m$. Die Werte gehören zum Spitzbogenzahn der Zykloidenverzahnung: Seine Flanke entsteht, wenn ein Kreis vom halben Durchmesser des Triebteilkreises außen auf dem Teilkreis des Rades abrollt (Epizykloide). Nachgerechnet liegen die Tabellenwerte bei rund 95 % der Höhe, in der sich die beiden Flanken zur Spitze treffen, wenn der Zahn auf dem Teilkreis eine halbe Teilung dick ist. Für die Fertigung gelten die Verzahnungsnormen der Uhrenindustrie (NHS, NIHS). Sie liefern je nach Norm und Profil etwas andere Werte als diese Tabelle, bei der Radverzahnung um einige Hundertstel bis wenige Zehntel; wer ein Rad fertigt, rechnet deshalb mit dem Normblatt.

Modul aus dem gemessenen Kopfkreis

(4.19) NÄHERUNG GESELLE

$$m \approx \frac{d_\mathrm{a}}{z + k}$$

Der übliche Weg zum fehlenden Rad oder Trieb: am vorhandenen Partner die Zähne zählen, den Kopfkreis messen und den Modul berechnen. Das Ergebnis mit dem Achsabstand nach Formel (4.16) gegenprüfen.

Gilt: wie Formel (4.18). Für einen vorhandenen Trieb gilt Formel (4.20) entsprechend.

m	Modul	mm
d_a	Kopfkreisdurchmesser (des Rades)	mm
z	Zähnezahl (des Rades)	1
k	Kopfzuschlag (des Rades: doppelte Kopfhöhe, in Modul gemessen)	1

BEISPIEL Zu einem Rad fehlt der Trieb. Das Rad hat 64 Zähne und 10,06 mm Kopfkreis; es soll einen Trieb mit 8 Zähnen treiben, also $k = 2{,}9$.

Gegeben: $d_\mathrm{a} = 10{,}06\,\mathrm{mm}$; $z = 64$; $k = 2{,}9$

$$\begin{aligned} m &\approx \frac{d_\mathrm{a}}{z + k} \\ &= \frac{10{,}06\,\mathrm{mm}}{64 + 2{,}9} \\ &\approx 0{,}150\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Modul ist 0,15 mm. Der fehlende Trieb hat damit 1,2 mm Teilkreis, der Achsabstand ist 5,4 mm.

Kopfkreis des Triebes

(4.20) NÄHERUNG MEISTER

$$d'_\mathrm{a} \approx m \cdot (z' + k')$$

Der Triebkopf arbeitet im Gehwerk nur kurz vor der Mittellinie mit. Er ist deshalb niedrig; beim halbrunden Kopf ist die Kopfhöhe gleich der halben Zahndicke. Allgemein ist die Kopfhöhe $h'_\mathrm{a} = \frac{k'}{2} \cdot m$.

Gilt: Uhrenverzahnung, Trieb wird getrieben. k' aus den beiden Tabellen.

d'_a	Kopfkreisdurchmesser des Triebes	mm
m	Modul	mm
z'	Zähnezahl des Triebes	1
k'	Kopfzuschlag des Triebes (Tabelle)	1

BEISPIEL Ein Trieb mit 8 Zähnen und Modul 0,15 mm bekommt halbrunde Köpfe; aus der Zahndicke folgt $k' = 1{,}05$.

Gegeben: $m = 0{,}15\,\mathrm{mm}$; $z' = 8$; $k' = 1{,}05$

$$\begin{aligned} d'_\mathrm{a} &\approx m \cdot (z' + k') \\ &= 0{,}15\,\mathrm{mm} \cdot (8 + 1{,}05) \\ &\approx 1{,}36\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Trieb hat 1,36 mm Außendurchmesser bei 1,2 mm Teilkreis. Mit dem gerundeten Tabellenwert $k' = 1{,}0$ ergeben sich 1,35 mm.

Triebzahn der Uhrenverzahnung: Zahndicke und daraus gerechneter Kopfzuschlag (Richtwerte)

Zähnezahl des Triebes	Zahndicke s'	Kopfzuschlag k' bei halbrundem Kopf
6 bis 10	rund ein Drittel der Teilung, $1{,}05 \cdot m$	1,05
ab 11	rund zwei Fünftel der Teilung, $1{,}25 \cdot m$	1,25

Beim halbrunden Kopf ist die Kopfhöhe die halbe Zahndicke; daraus folgen diese Werte. Die Grenze zwischen 10 und 11 Zähnen folgt der Verzahnungsnorm der Uhrenindustrie.

Kopfzuschlag k' des Triebes nach der Kopfform (gerundete Tabellenwerte der Kurs- und Prüfungsaufgaben)

Kopfform des Triebzahns	Trieb mit 6 bis 10 Zähnen	Trieb ab 11 Zähnen
halbrund (rund gewälzt)	1,0	1,2
spitzbogig (spitz gewälzt)	1,5	1,8

Die Werte für den halbrunden Kopf sind die abgerundeten Werte 1,05 und 1,25 der Tabelle darüber. Der Unterschied ändert den Kopfkreis nur um $0{,}05 \cdot m$, bei Modul 0,2 mm also um 0,01 mm. Die Grenze liegt wie in der Verzahnungsnorm der Uhrenindustrie zwischen 10 und 11 Zähnen: Bis 10 Zähne muss der Triebzahn dünn bleiben, damit der Radzahn in der Lücke Platz hat. Manche Kursunterlagen zählen den Trieb mit 10 Zähnen schon zur zweiten Gruppe; in der Prüfung gilt der Wert, den die Aufgabe oder ihre Tabelle nennt. Spitzbogige Köpfe sind höher; je nach Profil reichen sie bis etwa $k' = 2$.

Fußkreis des Rades

(4.21) NÄHERUNG MEISTER

$$d_\mathrm{f} \approx m \cdot (z - \pi)$$

Die Fußhöhe des Radzahns ist etwa die halbe Teilung, $h_\mathrm{f} \approx \frac{\pi}{2} \cdot m$. So geht der Triebkopf frei durch die Lücke.

Gilt: Richtwert der Uhrenverzahnung. Die Fußtiefe des Rades ist unkritisch, solange der Triebkopf nicht aufsitzt.

d_f	Fußkreisdurchmesser (des Rades)	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl (des Rades)	1

BEISPIEL Rad mit 80 Zähnen, Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}; \quad z = 80$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{f} &\approx m \cdot (z - \pi) \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot (80 - \pi) \\ &\approx 15{,}37\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Zahngrund liegt auf 15,37 mm Durchmesser. Die ganze Zahnhöhe ist damit rund 0,63 mm.

Fußkreis des Triebes (Richtwert)

(4.22) NÄHERUNG GESELLE

$$d'_\mathrm{f} \approx m \cdot (z' - 4)$$

Die Fußhöhe des Triebzahns ist rund $2 \cdot m$. Das reicht für jeden Radkopf der Tabelle: Der höchste misst $1{,}93 \cdot m$, die üblichen rund $1{,}3 \cdot m$ bis $1{,}7 \cdot m$. Der Rest ist Kopfspiel.

Gilt: Richtwert der Uhrenverzahnung für Kurs- und Prüfungsaufgaben. Die folgende Formel rechnet genauer mit dem Kopfzuschlag des Gegenrades.

d'_f	Fußkreisdurchmesser des Triebes (Kerndurchmesser)	mm
m	Modul	mm
z'	Zähnezahl des Triebes	1

BEISPIEL Ein Trieb mit 12 Zähnen hat den Modul 0,31 mm. Wie groß ist sein Fußkreis?

Gegeben: $m = 0{,}31\,\mathrm{mm}; \quad z' = 12$

$$\begin{aligned} d'_\mathrm{f} &\approx m \cdot (z' - 4) \\ &= 0{,}31\,\mathrm{mm} \cdot (12 - 4) \\ &= 2{,}48\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

2,48 mm bei 3,72 mm Teilkreis.

Fußkreis des Triebes

(4.23) VERTIEFUNG

$$d'_{\mathrm{f}} = m \cdot (z' - k) - 2 \cdot c$$

Die Lücke des Triebes muss den Kopf des Radzahns aufnehmen und darunter noch Luft lassen: Fußhöhe des Triebes gleich Kopfhöhe des Rades plus Kopfspiel.

d'_{f}	Fußkreisdurchmesser des Triebes (Kerndurchmesser)	mm
m	Modul	mm
z'	Zähnezahl des Triebes	1
k	Kopfzuschlag (des Gegenrades)	1
c	Kopfspiel zwischen Radkopf und Triebgrund (Richtwert $0{,}4 \cdot m$)	mm

BEISPIEL Trieb mit 10 Zähnen, Modul 0,2 mm, Gegenrad mit $k = 3{,}2$, Kopfspiel 0,08 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$; $z' = 10$; $k = 3{,}2$; $c = 0{,}08\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} d'_{\mathrm{f}} &= m \cdot (z' - k) - 2 \cdot c \\ &= 0{,}2\,\mathrm{mm} \cdot (10 - 3{,}2) - 2 \cdot 0{,}08\,\mathrm{mm} \\ &= 1{,}20\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kern des Triebes misst 1,2 mm bei 2 mm Teilkreis. Ohne Kopfspiel wären es 1,36 mm; bei diesem Maß säße der Radzahn schon auf dem Grund auf.

Zahndicke des Rades

(4.24) GESELLE

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2}$$

Zahn und Lücke teilen sich die Teilung: $p = s + e$. Beim Rad sind beide gleich groß, die Zahndicke ist also die halbe Teilung.

Gilt: Rad der Uhrenverzahnung (Richtwert). Triebzähne sind dünner, siehe Tabelle bei Formel (4.20).

s	Zahndicke (des Rades auf dem Teilkreis)	mm
m	Modul	mm

BEISPIEL Modul 0,2 mm.

Gegeben: $m = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi \cdot m}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 0{,}2\,\mathrm{mm}}{2} \\ &\approx 0{,}314\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Zahn und Lücke des Rades sind auf dem Teilkreis je 0,314 mm breit.

Flankenspiel

(4.25) MEISTER

$$j = p - s - s'$$

Der Triebzahn ist schmaler als die Lücke des Rades. Der Unterschied ist das Flankenspiel. Es lässt Raum für Öl, Schmutz, Teilungs- und Rundlauffehler.

Gilt: Messung auf dem Teilkreis bei richtigem Achsabstand.

j	Flankenspiel auf dem Teilkreis	mm
p	Teilung (Abstand von Zahn zu Zahn, als Bogen auf dem Teilkreis)	mm
s	Zahndicke (des Rades auf dem Teilkreis)	mm
s'	Zahndicke des Triebes auf dem Teilkreis	mm

BEISPIEL Modul 0,2 mm: Teilung 0,628 mm, Zahndicke des Rades 0,314 mm, des Triebes mit 8 Zähnen 0,209 mm.

Gegeben: $p = 0{,}628\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}314\,\mathrm{mm}$; $s' = 0{,}209\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} j &= p - s - s' \\ &= 0{,}628\,\mathrm{mm} - 0{,}314\,\mathrm{mm} - 0{,}209\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}105\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Zwischen den Flanken bleiben rund 0,1 mm Luft, ein Sechstel der Teilung.

Eingriffstiefe. Stehen die Achsen zu eng, schneiden sich die Teilkreise: Der Eingriff ist zu tief, die Zähne drängen gegeneinander, das Werk läuft schwer und klemmt im ungünstigen Fall. Stehen sie zu weit, ist der Eingriff zu flach: Die Zahnspitzen führen, die Kraft wird ungleichmäßig übertragen und der Eingriff fällt hörbar. Geprüft wird mit dem Eingriffszirkel oder durch Fühlen des Zahnspiels; berichtigt wird über den Achsabstand oder mit einem passenden Trieb.

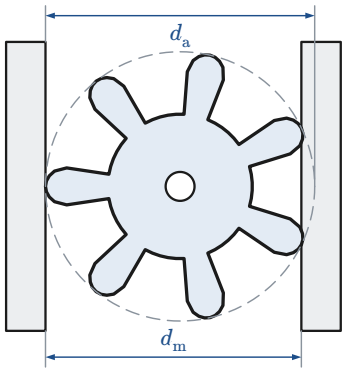


Abb. 4.10 Ungerade Zähnezahl: Das Messmaß d_m ist kleiner als der Kopfkreis d_a

Kopfkreis bei ungerader Zähnezahl messen

(4.26) MEISTER

$$d_\mathrm{a} = \frac{d_\mathrm{m}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{z}\right)}$$

d_a	Kopfkreisdurchmesser	mm
d_m	Messmaß zwischen den Messflächen	mm
z	Zähnezahl (ungerade)	1

Bei ungerader Zähnezahl steht jedem Zahn eine Lücke gegenüber. Die eine Messfläche liegt auf einer Zahnspitze, die andere auf zweien. Das Messmaß ist deshalb kleiner als der Kopfkreis.

Gilt: ungerade Zähnezahl; Messflächen eben, parallel und breiter als eine Teilung. Bei gerader Zähnezahl wird der Kopfkreis direkt gemessen.

BEISPIEL Ein Trieb mit 7 Zähnen misst zwischen den Schenkeln des Messschiebers 1,62 mm.

Gegeben: $d_\mathrm{m} = 1{,}62\,\mathrm{mm}; \quad z = 7$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{a} &= \frac{d_\mathrm{m}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{z}\right)} \\ &= \frac{1{,}62\,\mathrm{mm}}{\cos^2\left(\frac{90^\circ}{7}\right)} \\ &\approx 1{,}70\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Kopfkreis ist 0,08 mm größer als das Messmaß. Bei 15 Zähnen macht der Unterschied noch rund 1 % aus, ab etwa 60 Zähnen weniger als 0,1 %.

Evolventenverzahnung. Die Verzahnung des Maschinenbaus findet sich in der Uhr dort, wo ins Langsame übersetzt wird oder die Kraftrichtung wechselt: im Aufzug, in der Zeigerstellung, im Automatikgetriebe und in Kalenderwerken. Ihre Flanken sind Evolventen, also Abwickelkurven eines Fadens vom Grundkreis. Die Verzahnung verträgt kleine Fehler im Achsabstand: Die Drehung wird trotzdem gleichförmig übertragen. Teilung, Teilkreis und Achsabstand berechnen sich wie oben.

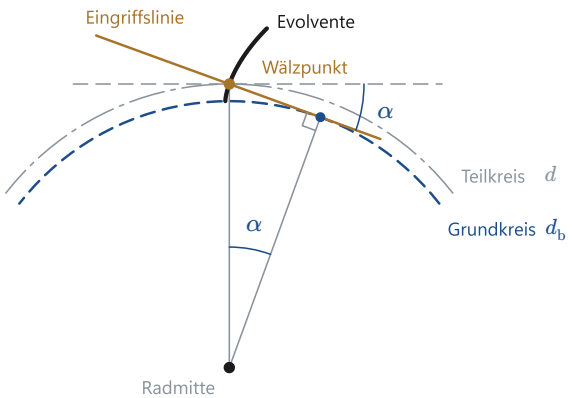


Abb. 4.11 Evolventenverzahnung: Die Eingriffslinie berührt den Grundkreis und ist um den Eingriffswinkel α geneigt

Kopfkreis der Evolventenverzahnung

(4.27) MEISTER

$$d_\mathrm{a} = m \cdot (z + 2)$$

UMGESTELLT $\quad m = \dfrac{d_\mathrm{a}}{z + 2}$

d_a	Kopfkreisdurchmesser	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl	1

Die Kopfhöhe ist gleich dem Modul. Umgestellt liefert die Formel den Modul eines Evolventenrades aus Kopfkreis und Zähnezahl.

Gilt: Normalverzahnung ohne Profilverschiebung, Eingriffswinkel 20°, Kopfhöhe $1 \cdot m$.

BEISPIEL Ein Rad mit 24 Zähnen und Modul 0,5 mm.

Gegeben: $m = 0{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 24$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{a} &= m \cdot (z + 2) \\ &= 0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot (24 + 2) \\ &= 13\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Kopfkreis 13 mm bei 12 mm Teilkreis.

Fußkreis der Evolventenverzahnung

(4.28) MEISTER

$$d_\mathrm{f} = m \cdot (z - 2{,}5)$$

d_f	Fußkreisdurchmesser	mm
m	Modul	mm
z	Zähnezahl	1

Die Fußhöhe ist das 1,25-Fache des Moduls: Kopfhöhe des Gegenrades plus $0{,}25 \cdot m$ Kopfspiel.

Gilt: Normalverzahnung ohne Profilverschiebung. In der Feinwerktechnik sind auch größere Fußhöhen üblich; dann steht statt 2,5 der doppelte Fußhöhenfaktor.

BEISPIEL Dasselbe Rad: 24 Zähne, Modul 0,5 mm.

Gegeben: $m = 0{,}5\,\mathrm{mm}; \quad z = 24$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{f} &= m \cdot (z - 2{,}5) \\ &= 0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot (24 - 2{,}5) \\ &= 10{,}75\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Fußkreis 10,75 mm; die Zahnhöhe ist $2{,}25 \cdot m$, also 1,125 mm.

Grundkreis

(4.29) VERTIEFUNG

$$d_\mathrm{b} = d \cdot \cos\alpha$$

d_b	Grundkreisdurchmesser	mm
d	Teilkreisdurchmesser	mm
α	Eingriffswinkel (genormt 20°)	°

Vom Grundkreis wird die Evolvente abgewickelt. Die Zähne berühren sich immer auf der Eingriffslinie, die beide Grundkreise berührt und um den Eingriffswinkel gegen die gemeinsame Tangente der Teilkreise geneigt ist.

BEISPIEL Teilkreis 12 mm, Eingriffswinkel 20°.

Gegeben: $d = 12\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 20^\circ$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{b} &= d \cdot \cos\alpha \\ &= 12\,\mathrm{mm} \cdot \cos(20^\circ) \\ &\approx 11{,}28\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Grundkreis liegt 0,36 mm unter dem Teilkreis. Unterhalb des Grundkreises gibt es keine Evolvente.

4.5 Schlagwerk

Das Schlagwerk ist ein eigenes Laufwerk mit Antrieb, Räderwerk und Windfang. Das Gehwerk löst es aus, ein Zählwerk bestimmt die Zahl der Schläge: die Schlossscheibe oder der Rechen.

Summe der Stundenschläge

(4.30) MEISTER

$$N = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

Die Stundenschläge 1 + 2 + 3 und so weiter addieren sich nach der Summenformel.

N	Anzahl (der Schläge für die Stunden 1 bis k)	1
k	letzte geschlagene Stunde	1

BEISPIEL Wie viele Schläge fallen von 1 Uhr bis 12 Uhr?

Gegeben: $k = 12$

$$\begin{aligned} N &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \\ &= \frac{12 \cdot (12+1)}{2} \\ &= 78 \end{aligned}$$

78 Schläge in 12 Stunden, 156 am Tag.

Schläge je Tag

(4.31) MEISTER

$$N_\mathrm{d} = 2 \cdot (N_{12} + 12 \cdot b)$$

Der Halbstundenschlag bringt in 12 Stunden 12 Schläge dazu.

Gilt: Stundenschlag mit höchstens einem Schlag zur halben Stunde. Viertelschlagwerke haben ein eigenes Laufwerk und werden getrennt gerechnet.

N_d	Schläge in 24 Stunden	1
N_{12}	Stundenschläge in 12 Stunden (78)	1
b	Schläge zu jeder halben Stunde (0 oder 1)	1

BEISPIEL Ein Schlagwerk schlägt die Stunden und zu jeder halben Stunde einen Schlag.

Gegeben: $N_{12} = 78; \quad b = 1$

$$\begin{aligned} N_\mathrm{d} &= 2 \cdot (N_{12} + 12 \cdot b) \\ &= 2 \cdot (78 + 12 \cdot 1) \\ &= 180 \end{aligned}$$

180 Schläge am Tag: 90 in 12 Stunden statt 78.

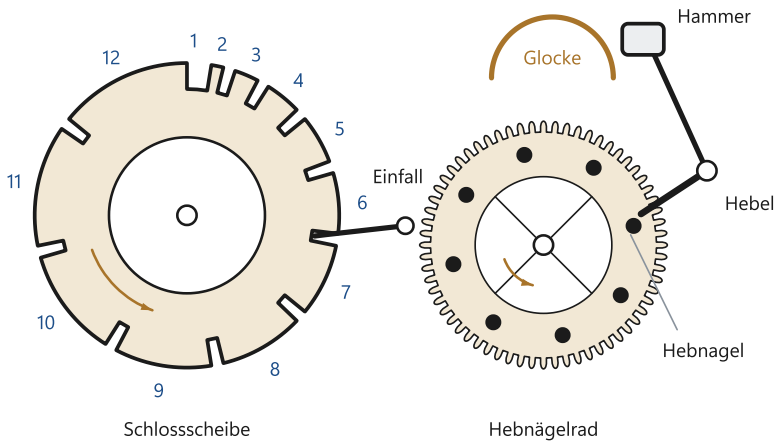


Abb. 4.12 Schlossscheibe mit 78 Teilen (jede Stunde belegt so viele Teile, wie sie Schläge hat) und Hebnägelrad mit Hammer

Schlossscheibe

(4.32) MEISTER

$$N_{\mathrm{Sch}} = \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{Sch}}}{z'_{\mathrm{Sch}}}$$

Die Schlossscheibe zählt die Schläge. Sie dreht in 12 Stunden einmal; ihr Umfang ist in 78 oder 90 Teile geteilt, und nach jeder Schlagfolge fällt der Einfall in einen Einschnitt und hält das Laufwerk an.

Gilt: Schlossscheibe wird von der Welle des Hebnägelrads angetrieben und dreht in 12 Stunden einmal.

N_{Sch}	Schläge je Umdrehung der Schlossscheibe (78, mit Halbstundenschlag 90)	1
z_{N}	Zahl der Hebnägel	1
z_{Sch}	Zähnezahl des Schlossscheibenrads	1
z'_{Sch}	Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads, der die Schlossscheibe treibt	1

BEISPIEL Ein Hebnägelrad trägt 10 Hebnägel. Auf seiner Welle sitzt ein Trieb mit 8 Zähnen, der ein Schlossscheibenrad mit 72 Zähnen treibt.

Gegeben: $z_{\mathrm{N}} = 10;\quad z_{\mathrm{Sch}} = 72;\quad z'_{\mathrm{Sch}} = 8$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Sch}} &= \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{Sch}}}{z'_{\mathrm{Sch}}} \\ &= \frac{10 \cdot 72}{8} \\ &= 90 \end{aligned}$$

90 Schläge je Umdrehung: ein Schlagwerk mit Halbstundenschlag. Für 78 Schläge passen 13 Hebnägel mit der Untersetzung 6.

Beim Rechenschlagwerk bestimmt die Stundenstaffel, eine Stufenscheibe mit 12 Stufen am Stundenrad, wie tief der Rechen fällt. Bei jedem Schlag hebt der Schöpfer den Rechen um einen Zahn zurück, bis das Laufwerk wieder gesperrt ist. Anders als die Schlossscheibe kann das Rechenschlagwerk gegenüber den Zeigern nicht außer Tritt geraten.

Schläge je Umdrehung des Antriebsrads

(4.33) MEISTER

$$N_{\mathrm{A}} = \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{A}}}{z'_{\mathrm{N}}}$$

Jeder Hebnagel hebt den Hammer einmal. Das Hebnägelrad dreht um die Übersetzung schneller als das Antriebsrad.

Gilt: Antriebsrad greift direkt in den Trieb des Hebnägelrads. Liegt ein Beisatzrad dazwischen, kommt dessen Übersetzung als Faktor dazu.

N_{A}	Schläge je Umdrehung des Antriebsrads (Walzenrad oder Federhaus)	1
z_{N}	Zahl der Hebnägel	1
z_{A}	Zähnezahl des Antriebsrads	1
z'_{N}	Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads	1

BEISPIEL Ein Walzenrad mit 96 Zähnen treibt den Trieb (8 Zähne) eines Hebnägelrads mit 8 Hebnägeln.

Gegeben: $z_{\mathrm{N}} = 8;\quad z_{\mathrm{A}} = 96;\quad z'_{\mathrm{N}} = 8$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{A}} &= \frac{z_{\mathrm{N}} \cdot z_{\mathrm{A}}}{z'_{\mathrm{N}}} \\ &= \frac{8 \cdot 96}{8} \\ &= 96 \end{aligned}$$

Je Umdrehung der Walze fallen 96 Schläge.

Umdrehungen je Aufzug

(4.34) MEISTER

$$U = \frac{t_\mathrm{G} \cdot n_\mathrm{d}}{N_\mathrm{A}}$$

Die Zahl der Schläge je Tag liefert Formel (4.31). Gehwerk und Schlagwerk werden so ausgelegt, dass beide mit einem Aufzug gleich lange laufen.

U	nötige Umdrehungen des Antriebsrads	1
t_G	Gangdauer	d
n_d	Schläge je Tag	$\frac{1}{\mathrm{d}}$
N_A	Schläge je Umdrehung des Antriebsrads	1

BEISPIEL Das Schlagwerk aus dem Beispiel davor soll 8 Tage laufen und schlägt 180-mal am Tag.

Gegeben: $t_\mathrm{G} = 8\,\mathrm{d}$; $n_\mathrm{d} = 180\,\frac{1}{\mathrm{d}}$; $N_\mathrm{A} = 96$

$$\begin{aligned} U &= \frac{t_\mathrm{G} \cdot n_\mathrm{d}}{N_\mathrm{A}} \\ &= \frac{8\,\mathrm{d} \cdot 180\,\frac{1}{\mathrm{d}}}{96} \\ &= 15 \end{aligned}$$

In 8 Tagen fallen 1440 Schläge; die Walze dreht dafür 15-mal. Mit der Seildicke und dem Walzendurchmesser folgt daraus die Fallhöhe des Gewichts (Kapitel 3).

Umdrehungen des Windfangs je Schlag

(4.35) MEISTER

$$U_\mathrm{W} = \frac{i_\mathrm{W}}{z_\mathrm{N}}$$

Der Windfang bremst das Laufwerk durch den Luftwiderstand seiner Flügel. Weil der Widerstand mit der Drehzahl stark wächst, stellt sich eine gleichmäßige Geschwindigkeit ein, und die Schläge folgen in gleichem Abstand. Größere oder steiler gestellte Flügel machen den Schlag langsamer.

U_W	Umdrehungen des Windfangs je Schlag	1
i_W	Übersetzung vom Hebnägelrad zum Windfang	1
z_N	Zahl der Hebnägel	1

BEISPIEL Vom Hebnägelrad (64 Zähne, 8 Hebnägel) zum Windfang laufen drei Eingriffe: 64 zu 8, 56 zu 7 und 49 zu 7. Die Übersetzung ist $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

Gegeben: $i_\mathrm{W} = 448$; $z_\mathrm{N} = 8$

$$\begin{aligned} U_\mathrm{W} &= \frac{i_\mathrm{W}}{z_\mathrm{N}} \\ &= \frac{448}{8} \\ &= 56 \end{aligned}$$

Der Windfang dreht 56-mal je Schlag.

4.6 Kalender und Mondphase

Kalenderwerke zählen Tage. Ihre Räder werden nicht stetig angetrieben, sondern einmal am Tag um einen Zahn weitergeschaltet; die Zähnezahl ist dann die Zahl der Tage je Umlauf.

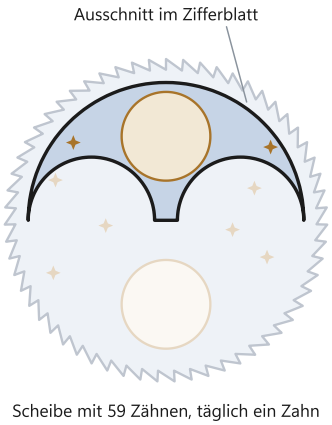


Abb. 4.13 Mondphasenscheibe hinter dem Ausschnitt im Zifferblatt

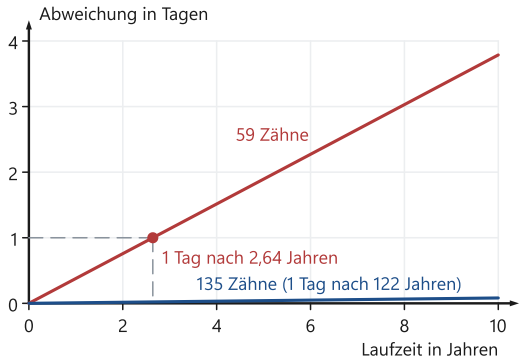


Abb. 4.14 Abweichung der Mondphasenanzeige vom mittleren Mond

Mondphasenscheibe

(4.36) MEISTER

$$t_\mathrm{L} = \frac{z \cdot t_\mathrm{s}}{k}$$

Von Neumond zu Neumond vergehen im Mittel 29,530 59 Tage, der synodische Monat. Weil ein Rad keine halben Zähne haben kann, trägt die Scheibe zwei Monde und 59 Zähne.

t_L	angezeigte Dauer eines Mondumlaufs	d
z	Zähnezahl (der Mondscheibe)	1
t_s	Zeit zwischen zwei Schaltungen (ein Zahn je Tag)	d
k	Anzahl (der Monde auf der Scheibe)	1

BEISPIEL Eine Mondscheibe mit 59 Zähnen und zwei Monden wird täglich um einen Zahn geschaltet.

Gegeben: $z = 59; \quad t_\mathrm{s} = 1\,\mathrm{d}; \quad k = 2$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{L} &= \frac{z \cdot t_\mathrm{s}}{k} \\ &= \frac{59 \cdot 1\,\mathrm{d}}{2} \\ &= 29{,}5\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Die Anzeige durchläuft alle Phasen in 29,5 Tagen. Der Mond braucht im Mittel 29,530 59 Tage, die Anzeige läuft also etwas zu schnell.

Laufzeit bis zur Abweichung der Mondphase

(4.37) MEISTER

$$t_\mathrm{F} = \frac{\Delta t \cdot t_\mathrm{L}}{|T_\mathrm{syn} - t_\mathrm{L}|}$$

Je Umlauf weicht die Anzeige um den Unterschied zwischen angezeigtem und wahrem Mondumlauf ab. Die Abweichungen summieren sich.

Gilt: mittlerer Mondlauf. Der wahre Mond weicht davon im Lauf eines Monats um bis zu rund einen halben Tag ab.

t_F	Laufzeit, bis die Anzeige um Δt abweicht	d
Δt	Abweichung der Anzeige vom wahren Mondalter	d
t_L	angezeigte Dauer eines Mondumlaufs	d
T_syn	synodischer Monat (Mittelwert 29,530 59 d, Abschnitt 11.1)	d

BEISPIEL Nach welcher Zeit weicht die Anzeige mit 59 Zähnen um einen Tag ab?

Gegeben: $\Delta t = 1\,\mathrm{d}$; $t_\mathrm{L} = 29{,}5\,\mathrm{d}$; $T_\mathrm{syn} = 29{,}530\,59\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{F} &= \frac{\Delta t \cdot t_\mathrm{L}}{|T_\mathrm{syn} - t_\mathrm{L}|} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 29{,}5\,\mathrm{d}}{|29{,}530\,59\,\mathrm{d} - 29{,}5\,\mathrm{d}|} \\ &\approx 964\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Nach 964 Tagen, das sind rund 2,6 Jahre, geht die Anzeige einen Tag vor und muss berichtigt werden.

Genaue Mondphase mit Übersetzung

(4.38) VERTIEFUNG

$$t_\mathrm{L} = \frac{t_\mathrm{A} \cdot z}{z' \cdot k}$$

Eine Übersetzung zwischen Schaltrad und Mondscheibe trifft den synodischen Monat viel genauer als die einfache Scheibe mit 59 Zähnen.

Gilt: Mondscheibe wird über Räder angetrieben. Die Scheibe mit 135 Zähnen ist verbreitet; der Antrieb im Beispiel ist ein möglicher Zähnezahlsatz, andere sind ausgeführt.

t_L	angezeigte Dauer eines Mondumlaufs	d
t_A	Umlaufzeit der treibenden Welle (Stern mit 7 Zähnen, täglich geschaltet: 7 d)	d
z	Zähnezahl (der Mondscheibe)	1
z'	Zähnezahl des Triebes (treibt die Mondscheibe)	1
k	Anzahl (der Monde auf der Scheibe)	1

BEISPIEL Ein Stern mit 7 Zähnen wird täglich geschaltet. Auf seiner Welle sitzt ein Trieb mit 16 Zähnen, der über ein Zwischenrad eine Mondscheibe mit 135 Zähnen und zwei Monden treibt.

Gegeben: $t_\mathrm{A} = 7\,\mathrm{d}$; $z = 135$; $z' = 16$; $k = 2$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{L} &= \frac{t_\mathrm{A} \cdot z}{z' \cdot k} \\ &= \frac{7\,\mathrm{d} \cdot 135}{16 \cdot 2} \\ &= 29{,}531\,25\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Die Anzeige ist je Umlauf nur noch 57 s zu langsam. Nach Formel (4.37) mit $T_\mathrm{syn} = 29{,}530\,59\,\mathrm{d}$ dauert es 44 744 Tage, gut 122 Jahre, bis sie um einen Tag nachgeht.

Zählräder der Kalenderanzeigen

Anzeige	Rad	schaltet	ein Umlauf in
Datum	Datumsring oder Datumsrad mit 31 Zähnen	täglich	31 Tagen
Wochentag	Stern mit 7 Zähnen	täglich	7 Tagen
Monat	Stern mit 12 Zähnen	monatlich	1 Jahr
Mondphase	Scheibe mit 59 Zähnen und zwei Monden	täglich	59 Tagen
Ewiger Kalender	Programmrad mit 48 Monatsstufen	monatlich	4 Jahren (1461 Tagen)

Der einfache Kalender wird fünfmal im Jahr von Hand weitergestellt, nämlich nach jedem Monat mit weniger als 31 Tagen. Der Jahreskalender braucht eine Korrektur am Ende des Februars. Der ewige Kalender kennt auch die Schaltjahre; er muss erst im Jahr 2100 berichtigt werden, das kein Schaltjahr ist.

Das Schaltrad des Datums dreht einmal in 24 Stunden und wird vom Stundenrad mit der Untersetzung 2 zu 1 angetrieben, Formel (4.12). Schaltjahre, die Länge des Jahres und die Zeitgleichung stehen in Kapitel 11.

4.7 Wirkungsgrad des Räderwerks

Jeder Eingriff und jedes Lager verbraucht einen Teil der Antriebskraft durch Reibung. Der Wirkungsgrad sagt, welcher Anteil des Drehmoments übrig bleibt.

Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks

(4.39) MEISTER

$$\eta_{\text{ges}} = \eta^{k}$$

η_{ges}	Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks	1
η	Wirkungsgrad (je Eingriff; mit Lagerreibung, Richtwert 0,90 bis 0,95)	1
k	Anzahl (der Eingriffe)	1

Die Wirkungsgrade hintereinander liegender Eingriffe werden multipliziert. Sind sie verschieden, steht statt der Potenz das Produkt der einzelnen Werte. Die allgemeine Form steht in Formel (2.30).

Gilt: Richtwerte für saubere, geölte Werke. Triebe mit wenigen Zähnen, trockene Lager und zu tiefe oder zu flache Eingriffe drücken den Wirkungsgrad deutlich.

BEISPIEL Vom Federhaus bis zum Hemmungsrad liegen vier Eingriffe mit je 0,95 Wirkungsgrad.

Gegeben: $\eta = 0{,}95; \quad k = 4$

$$\begin{aligned}\eta_{\text{ges}} &= \eta^{k} \\ &= 0{,}95^{4} \\ &\approx 0{,}81\end{aligned}$$

Rund ein Fünftel des Drehmoments geht im Räderwerk verloren. Bei 0,90 je Eingriff wäre es schon ein Drittel.

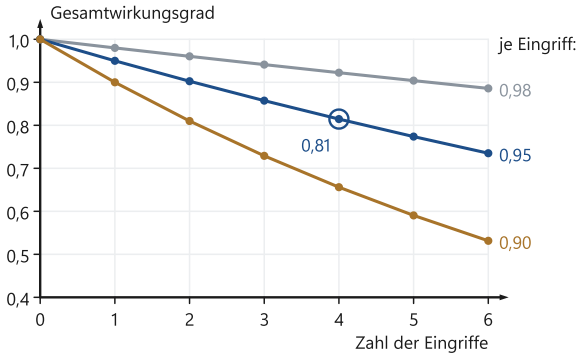


Abb. 4.15 Gesamtwirkungsgrad nach der Zahl der Eingriffe

Drehmoment am Hemmungsrad

(4.40) MEISTER

$$M_{\mathrm{H}} = \frac{M_{\mathrm{F}} \cdot \eta_{\mathrm{ges}}}{i_{\mathrm{ges}}}$$

Das Drehmoment fällt von Welle zu Welle um die Übersetzung und um die Reibungsverluste (Abb. 4.4).

M_{H}	Drehmoment am Hemmungsrad	$\mu\mathrm{N{\cdot}m}$
M_{F}	Drehmoment am Federhaus	$\mathrm{N{\cdot}mm}$
η_{ges}	Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks	1
i_{ges}	Gesamtübersetzung (vom Federhaus zum Hemmungsrad)	1

BEISPIEL Ein Federhaus gibt 8 N·mm ab. Die Übersetzung zum Hemmungsrad ist $6 \cdot 600 = 3600$, der Gesamtwirkungsgrad 0,81.

Gegeben: $M_{\mathrm{F}} = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$; $\eta_{\mathrm{ges}} = 0{,}81$; $i_{\mathrm{ges}} = 3600$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{H}} &= \frac{M_{\mathrm{F}} \cdot \eta_{\mathrm{ges}}}{i_{\mathrm{ges}}} \\ &= \frac{8\,\mathrm{N{\cdot}mm} \cdot 0{,}81}{3600} \\ &= 1{,}8\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

Am Hemmungsrad bleiben 1,8 µN·m, gut ein Fünftausendstel des Federmoments. Deshalb bringt schon wenig Schmutz an den schnellen Wellen ein Werk zum Stehen.

Wirkungsgrad aus gemessenen Drehmomenten

(4.41) VERTIEFUNG

$$\eta_{\mathrm{ges}} = \frac{M_{\mathrm{H}} \cdot i_{\mathrm{ges}}}{M_{\mathrm{F}}}$$

Ohne Reibung käme am Hemmungsrad das Federmoment geteilt durch die Übersetzung an. Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis des gemessenen zu diesem idealen Wert.

η_{ges}	Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks	1
M_{H}	Drehmoment am Hemmungsrad	$\mu\mathrm{N{\cdot}m}$
i_{ges}	Gesamtübersetzung (vom Federhaus zum Hemmungsrad)	1
M_{F}	Drehmoment am Federhaus	$\mathrm{N{\cdot}mm}$

BEISPIEL An einem Werk werden 8 N·mm am Federhaus und 1,7 µN·m am Hemmungsrad gemessen; die Übersetzung ist 3600.

Gegeben: $M_{\mathrm{H}} = 1{,}7\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $i_{\mathrm{ges}} = 3600$; $M_{\mathrm{F}} = 8\,\mathrm{N{\cdot}mm}$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{ges}} &= \frac{M_{\mathrm{H}} \cdot i_{\mathrm{ges}}}{M_{\mathrm{F}}} \\ &= \frac{1{,}7\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot 3600}{8\,\mathrm{N{\cdot}mm}} \\ &= 0{,}765 \end{aligned}$$

Das Räderwerk überträgt gut drei Viertel des Drehmoments. Das entspricht 0,935 je Eingriff bei vier Eingriffen.

5 Gangregler: Unruh und Spirale

Unruh und Spirale bilden den Gangregler der Kleinuhr. Die Unruh ist die träge Masse, die Spirale die Feder, die sie in die Ruhelage zurückholt. Wie schnell beide zusammen schwingen, bestimmen nur zwei Größen: das Trägheitsmoment der Unruh und das Richtmoment der Spirale.

Fast alle Regulierformeln dieses Kapitels folgen aus einer Regel: Die Schwingungsdauer wächst mit der Wurzel aus dem Trägheitsmoment und fällt mit der Wurzel aus dem Richtmoment. Ein Prozent mehr Trägheitsmoment oder ein Prozent weniger Richtmoment macht die Uhr um ein halbes Prozent langsamer, das sind 432 s am Tag. In diesem Kapitel steht N für eine Anzahl (Windungen der Spirale, gleiche Schrauben am Reif), W für die Energie und P für die Leistung.

5.1 Schwingung der Unruh

Die Unruh schwingt um ihre Ruhelage hin und her. Eine Schwingung ist hin und zurück; die Uhr tickt dabei zweimal, denn jeder Schlag ist eine Halbschwingung.

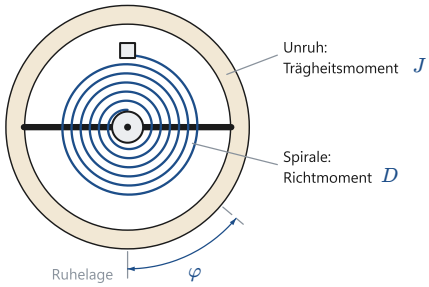


Abb. 5.1 Unruh mit Spirale: Die Unruh bringt das Trägheitsmoment J, die Spirale das Richtmoment D

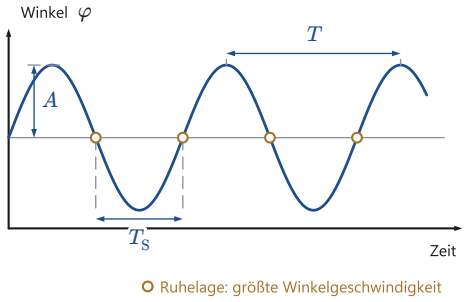


Abb. 5.2 Winkel der Unruh über der Zeit: Amplitude A, Schwingungsdauer T, Schlagdauer $T_S = \frac{1}{2}T$

Schwingungsdauer der Unruh

(5.1) GESELLE

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$$

UMGESTELLT $$D = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J}{T^2}$$

T	Schwingungsdauer (volle Schwingung, hin und zurück)	s
J	Trägheitsmoment (der Unruh; mit allem, was mitschwingt)	$\mathrm{mg \cdot cm^2}$
D	Richtmoment (der Spirale; Drehmoment je Winkel)	$\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$

Eine trägere Unruh schwingt langsamer, eine stärkere Spirale schneller. Beide Größen stehen unter der Wurzel: Vierfaches Trägheitsmoment verdoppelt die Schwingungsdauer.

Gilt: Rückstellmoment der Spirale proportional zum Winkel, ohne Reibung und ohne Einfluss der Hemmung. Zu J gehören Reif, Schenkel, Welle, Doppelscheibe und Spiralrolle.

Gut zu wissen: Die Amplitude kommt in der Formel nicht vor. Ein idealer Gangregler schwingt bei kleinem und großem Ausschlag gleich schnell; diese Eigenschaft heißt Isochronismus (Abschnitt 5.7).

BEISPIEL Eine Unruh hat das Trägheitsmoment $10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$, ihre Spirale das Richtmoment $0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Wie lange dauert eine Schwingung?

Gegeben: $J = 10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$; $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}}{0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}}} \\ &\approx 0{,}250\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Eine Schwingung dauert eine Viertelsekunde. Die Unruh macht also 4 Schwingungen und 8 Schläge je Sekunde.

Frequenz der Unruh

(5.2) GESELLE

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{J}}$$

f	Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde)	Hz
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$
J	Trägheitsmoment (der Unruh)	$\mathrm{mg \cdot cm^2}$

Die Frequenz ist der Kehrwert der Schwingungsdauer: $f = \frac{1}{T}$.

Gilt: wie bei Formel (5.1).

BEISPIEL Welche Frequenz hat der Gangregler aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $J = 10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{J}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}}{10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}}} \\ &\approx 4{,}00\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

4 Hz, die übliche Frequenz heutiger Armbanduhren.

Schlagzahl aus der Frequenz

(5.3) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot f$$

UMGESTELLT $f = \dfrac{n_\mathrm{h}}{2}$

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
f	Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde)	Hz

Je Schwingung schlägt die Uhr zweimal. Die Schlagzahl wird bei Kleinuhren in Halbschwingungen je Stunde angegeben (A/h, A für Alternanz). Mit der Schlagdauer steht die Formel schon in Abschnitt 1.1.

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 3 Hz. Welche Schlagzahl ist das?

Gegeben: $f = 3\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= 2 \cdot f \\ &= 2 \cdot 3\,\mathrm{Hz} \\ &= 6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &\approx 21\,600\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

21 600 Halbschwingungen je Stunde. Die Schlagzahl steht im Datenblatt des Kalibers, und die Zeitwaage rechnet mit ihr.

Gebräuchliche Schlagzahlen

Schlagzahl n_h in $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Schläge je Sekunde	Frequenz f in Hz	Schwingungsdauer T in s	Schlagdauer T_S in s
18 000	5	2,5	0,4	0,2
19 800	5,5	2,75	0,3636	0,1818
21 600	6	3	0,3333	0,1667
25 200	7	3,5	0,2857	0,1429
28 800	8	4	0,25	0,125
36 000	10	5	0,2	0,1

Die Schlagdauer T_S ist die Dauer einer Halbschwingung, also die halbe Schwingungsdauer.

Kreisfrequenz

(5.4) MEISTER

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

ω	Kreisfrequenz	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
f	Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde)	Hz

Die Kreisfrequenz ist die Frequenz im Bogenmaß: 2π je Schwingung. Für die Unruh gilt auch $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$.

BEISPIEL Wie groß ist die Kreisfrequenz bei 4 Hz?

Gegeben: $f = 4\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 4\,\mathrm{Hz} \\ &\approx 25{,}1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund 25,1 rad je Sekunde. Mit dieser Zahl rechnen die folgenden Formeln.

Winkel der Unruh über der Zeit

(5.5) MEISTER

$$\varphi = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Unruh schwingt sinusförmig: In der Ruhelage ist sie am schnellsten, an den Umkehrpunkten steht sie einen Augenblick still.

Gilt: freie, ungedämpfte Schwingung. Das Produkt $\omega \cdot t$ ist ein Winkel im Bogenmaß; der Taschenrechner muss für den Sinus auf rad stehen.

φ	Winkel (der Unruh gegen die Ruhelage)	$^\circ$
A	Amplitude (größter Winkel gegen die Ruhelage)	$^\circ$
ω	Kreisfrequenz	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
t	Zeit (seit dem Durchgang durch die Ruhelage)	s

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 4 Hz ($\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) und 270° Amplitude. Wo steht sie 0,02 s nach dem Durchgang durch die Ruhelage?

Gegeben: $A = 270^\circ$; $\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $t = 0{,}02\,\text{s}$

$$\begin{aligned}\varphi &= A \cdot \sin(\omega \cdot t)\\ &= 270^\circ \cdot \sin\left(25{,}13\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0{,}02\,\text{s}\right)\\ &\approx 130^\circ\end{aligned}$$

Nach 0,02 s hat die Unruh schon rund 130° zurückgelegt, fast die Hälfte der Amplitude. Bis zum Umkehrpunkt braucht sie insgesamt 0,0625 s, eine Viertelschwingung.

Größte Winkelgeschwindigkeit

(5.6) MEISTER

$$\omega_{\max} = A \cdot \omega$$

In der Ruhelage steckt die ganze Energie der Schwingung in der Bewegung. Hier greift die Hemmung ein, weil eine Störung an dieser Stelle den Gang am wenigsten verändert.

Gilt: Amplitude im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

$\omega_{\max}$	Winkelgeschwindigkeit der Unruh beim Durchgang durch die Ruhelage	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
A	Amplitude (im Bogenmaß)	rad
ω	Kreisfrequenz	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

BEISPIEL Wie schnell dreht die Unruh mit 4 Hz und 270° Amplitude (4,71 rad) in der Ruhelage?

Gegeben: $A = 4{,}71\,\text{rad}$; $\omega = 25{,}13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned}\omega_{\max} &= A \cdot \omega\\ &= 4{,}71\,\text{rad} \cdot 25{,}13\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\\ &\approx 118\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Rund 118 rad je Sekunde; gleichmäßig weitergedreht wären das fast 19 Umdrehungen je Sekunde. Ein Punkt am Reif mit 5 mm Radius ist dabei rund 0,6 m je Sekunde schnell.

Merksatz: 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 8 Schläge je Sekunde und 4 Hz.

5.2 Spiralfeder

Die Spirale ist eine Biegefeder. Ihr Richtmoment sagt, wie viel Drehmoment sie je Winkel aufbringt. Es hängt vom Werkstoff, vom Querschnitt der Klinge und von der wirksamen Länge ab.

Rückstellmoment der Spirale

(5.7) GESELLE

$$M = D \cdot \varphi$$

Das Rückstellmoment wächst gleichmäßig mit dem Winkel und zeigt immer zur Ruhelage. Nur deshalb schwingt die Unruh bei jeder Amplitude gleich schnell.

Gilt: Spirale im elastischen Bereich; Windungen berühren sich nicht.

M	Drehmoment (Rückstellmoment der Spirale)	$\mu\mathrm{N{\cdot}m}$
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$
φ	Winkel (der Unruh gegen die Ruhelage; Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Mit welchem Drehmoment zieht eine Spirale mit $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$ die Unruh am Umkehrpunkt bei 270° (4,71 rad) zurück?

Gegeben: $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$; $\varphi = 4{,}71\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} M &= D \cdot \varphi \\ &= 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}} \cdot 4{,}71\,\mathrm{rad} \\ &\approx 2{,}98\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

Knapp 3 µN·m. Das ist die Größenordnung des Drehmoments, das am Hemmungsrad ankommt.

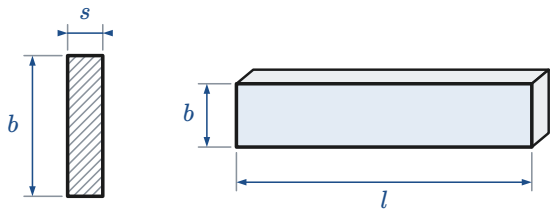


Abb. 5.3 Klinge der Spirale: Klingenhöhe b, Klingenstärke s, wirksame Länge l

Richtmoment aus den Maßen der Spirale

(5.8) MEISTER

$$D = \frac{E \cdot b \cdot s^3}{12 \cdot l}$$

Die Höhe und der Elastizitätsmodul gehen einfach ein, die Stärke mit der dritten Potenz. Eine längere Spirale ist weicher.

Gilt: rechteckiger Querschnitt, gleichmäßige Klinge, reine Biegung. Mit N und mm ergibt sich D in N·mm je rad; $1\,\mathrm{N{\cdot}mm} = 1000\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$.

D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$
E	Elastizitätsmodul (des Spiralwerkstoffs)	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
b	Klingenhöhe (in Richtung der Unruhwelle)	mm
s	Klingenstärke (in radialer Richtung)	mm
l	Länge (der Spirale, wirksam)	mm

BEISPIEL Eine Spirale hat $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$, 0,14 mm Klingenhöhe, 0,032 mm Klingenstärke und 121 mm wirksame Länge.

Gegeben: $E = 200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$; $b = 0{,}14\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}032\,\mathrm{mm}$; $l = 121\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} D &= \frac{E \cdot b \cdot s^3}{12 \cdot l} \\ &= \frac{200\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot 0{,}14\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}032\,\mathrm{mm})^3}{12 \cdot 121\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 0{,}632\ \tfrac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Diese Spirale passt zur Unruh mit $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ aus Abschnitt 5.1 und ergibt mit ihr 4 Hz.

Gangänderung durch die Klingenstärke

(5.9) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx \frac{3 \cdot \Delta s}{2 \cdot s} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δs	Änderung der Klingenstärke (+ heißt: stärker)	$\mu\mathrm{m}$
s	Klingenstärke	$\mu\mathrm{m}$

Weil das Richtmoment mit s^3 wächst, ändert 1 % mehr Stärke das Richtmoment um 3 % und den Gang um 1,5 %.

Gilt: kleine Änderungen; Höhe, Länge und Unruh unverändert. Für die Klingenhöhe gilt entsprechend $\Delta G \approx \frac{\Delta b}{2 \cdot b} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$.

BEISPIEL Eine Spirale ist statt 32 µm um 0,1 µm stärker.

Gegeben: $\Delta s = 0{,}1\,\mu\mathrm{m}; \quad s = 32\,\mu\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{3 \cdot \Delta s}{2 \cdot s} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{3 \cdot 0{,}1\,\mu\mathrm{m}}{2 \cdot 32\,\mu\mathrm{m}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 405\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Ein Zehntel Mikrometer macht fast 7 Minuten am Tag. So genau lässt sich keine Klinge messen; deshalb werden Spiralen nicht nach Maß, sondern nach ihrem gemessenen Richtmoment sortiert und der Unruh zugeteilt.

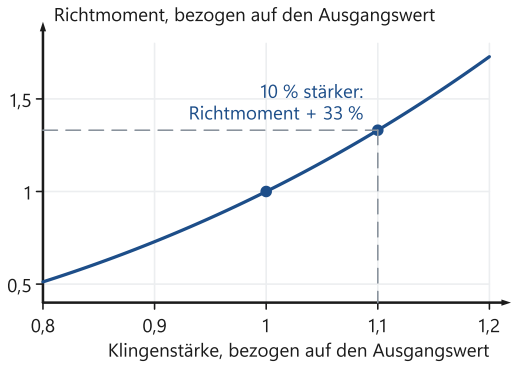


Abb. 5.4 Das Richtmoment wächst mit der dritten Potenz der Klingenstärke

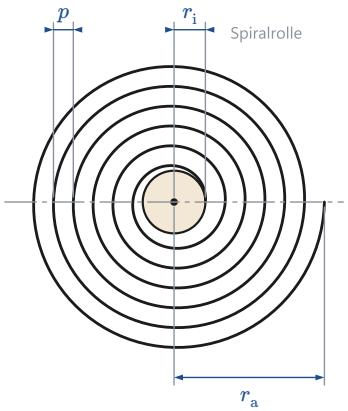


Abb. 5.5 Flachspirale: Radien r_i und r_a, Windungsabstand p

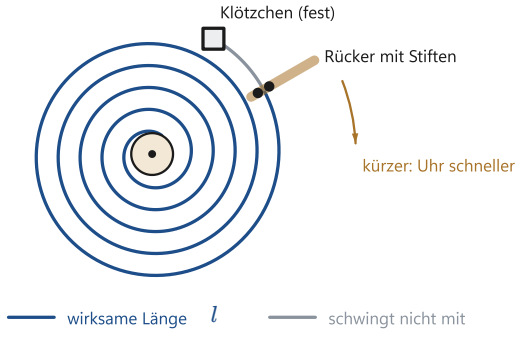


Abb. 5.6 Rücker: Die wirksame Länge l reicht von der Rolle bis zu den Rückerstiften

Länge der Flachspirale

(5.10) NÄHERUNG MEISTER

$$l \approx \pi \cdot N \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i})$$

Jede Windung ist fast ein Kreis. Die Länge ist die Windungszahl mal dem Umfang der mittleren Windung.

Gilt: gleichmäßig gewickelte Flachspirale (archimedische Spirale) mit mindestens etwa 5 Windungen; Endkurve und Ansteckenden nicht mitgerechnet.

l	Länge (der Spirale)	mm
N	Anzahl (der Windungen)	1
r_a	Radius der äußersten Windung	mm
r_i	Radius der innersten Windung (an der Spiralrolle)	mm

BEISPIEL Eine Spirale hat 12 Windungen zwischen 0,6 mm und 2,6 mm Radius.

Gegeben: $N = 12$; $r_\mathrm{a} = 2{,}6\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} l &\approx \pi \cdot N \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i}) \\ &= \pi \cdot 12 \cdot (2{,}6\,\mathrm{mm} + 0{,}6\,\mathrm{mm}) \\ &\approx 121\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Klinge ist rund 121 mm lang, so lang wie die Spirale in den Beispielen zum Richtmoment und zum Rücker. In einer Armbanduhr stecken also gut 12 cm Federband auf der Fläche eines Hemdknopfs.

Windungsabstand

(5.11) MEISTER

$$p = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}}{N}$$

Der Abstand bestimmt, wie viel Luft die Windungen beim Atmen der Spirale haben. Bei großer Amplitude dürfen sie sich nicht berühren.

Gilt: gleichmäßig gewickelte Flachspirale.

p	Windungsabstand (Mitte Klinge bis Mitte der nächsten Klinge)	mm
r_a	Radius der äußersten Windung	mm
r_i	Radius der innersten Windung	mm
N	Anzahl (der Windungen)	1

BEISPIEL Wie weit liegen die Windungen der Spirale aus dem Beispiel davor auseinander?

Gegeben: $r_\mathrm{a} = 2{,}6\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathrm{mm}$; $N = 12$

$$\begin{aligned} p &= \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}}{N} \\ &= \frac{2{,}6\,\mathrm{mm} - 0{,}6\,\mathrm{mm}}{12} \\ &\approx 0{,}167\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 0,17 mm von Klinge zu Klinge. Bei 0,032 mm Klingenstärke bleiben etwa 0,13 mm Luft.

CGS-Nummer der Spirale

(5.12) MEISTER

$$K = D \cdot \left(d_\mathrm{a}^2 - d_\mathrm{i}^2\right)$$

Der CGS-Wert ist das Richtmoment mal der Differenz der Durchmesserquadrate. Er hängt nur von Werkstoff, Klinge und Windungsabstand ab, nicht davon, an welcher Stelle die Spirale gefasst wird: Weiter außen gefasst, sinkt das Richtmoment im selben Maß, wie die Differenz der Quadrate wächst. Deshalb werden Rohspiralen nach diesem Wert gestuft und bestellt.

Gilt: gleichmäßig gewickelte Flachspirale; d_a an der Stelle, an der die Spirale gefasst wird, d_i an der Spiralrolle. Die CGS-Nummer ist derselbe Wert in der alten Einheit $\mathrm{dyn \cdot cm^3}$ je rad: Zahlenwert in $\mathrm{N \cdot mm^3}$ mal 100.

K	CGS-Wert der Spirale (mal 100 ergibt die CGS-Nummer)	$\frac{\mathrm{N \cdot mm^3}}{\mathrm{rad}}$
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$
d_a	Durchmesser der äußersten Windung ($2 \cdot r_\mathrm{a}$)	mm
d_i	Durchmesser der innersten Windung ($2 \cdot r_\mathrm{i}$)	mm

Gut zu wissen: Mit der Länge und dem Windungsabstand aus den beiden Formeln davor wird daraus $K \approx \frac{E \cdot b \cdot s^3 \cdot p}{3 \cdot \pi}$. Darin kommen weder die Länge noch die Durchmesser vor.

BEISPIEL Zur Unruh mit $10\,\mathrm{mg \cdot cm^2}$ aus Abschnitt 5.1 gehört für 4 Hz das Richtmoment $0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Die Spirale soll bei 5,0 mm Durchmesser gefasst werden, ihre innerste Windung misst 1,2 mm. Welche Spirale wird bestellt?

Gegeben: $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $\quad d_\mathrm{a} = 5{,}0\,\mathrm{mm}$; $\quad d_\mathrm{i} = 1{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} K &= D \cdot \left(d_\mathrm{a}^2 - d_\mathrm{i}^2\right) \\ &= 0{,}632\,\tfrac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}} \cdot \left((5{,}0\,\mathrm{mm})^2 - (1{,}2\,\mathrm{mm})^2\right) \\ &\approx 0{,}0149\,\tfrac{\mathrm{N \cdot mm^3}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Der CGS-Wert ist 0,0149, die CGS-Nummer also 1,49. Bestellt wird die nächste genormte Nummer, hier 1,50.

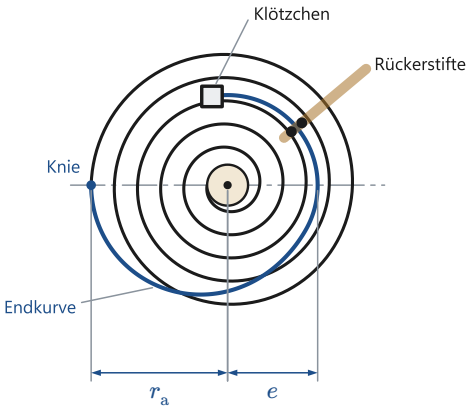


Abb. 5.7 Breguetspirale von oben: Die hochgebogene Endkurve führt die Klinge vom Außenradius r_a auf den Endhalbmesser e, auf dem die Rückerstifte laufen

Endkurvennummer

(5.13) GESELLE

$$N_{\mathrm{E}} = \frac{100 \cdot e}{r_{\mathrm{a}}}$$

UMGESTELLT $e = \dfrac{N_{\mathrm{E}} \cdot r_{\mathrm{a}}}{100}$

N_{E}	Endkurvennummer	1
e	Endhalbmesser (Unruhachse bis Mitte zwischen den Rückerstiften)	mm
r_{a}	Radius der äußersten Windung	mm

Bei der Breguetspirale wird das äußere Ende hochgebogen und in einer Endkurve nach innen geführt. Ihr letztes Stück ist ein Kreisbogen um die Unruhachse, auf dem die Rückerstifte laufen. Die Endkurvennummer nennt den Halbmesser dieses Bogens in Prozent des Außenradius. Nach ihr wird die Form der Kurve aus der Kurvenvorlage gewählt.

Gilt: Spirale mit hochgebogener Endkurve. Die Kurvenvorlagen sind gestuft; man wählt die nächstliegende Nummer. Üblich sind Nummern zwischen etwa 40 und 100.

BEISPIEL Eine Breguetspirale hat 6,4 mm Außendurchmesser, also 3,2 mm Außenradius. Die Rückerstifte stehen 2,4 mm von der Unruhachse entfernt. Welche Endkurve gehört dazu?

Gegeben: $e = 2{,}4\,\mathrm{mm}$; $r_{\mathrm{a}} = 3{,}2\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{E}} &= \frac{100 \cdot e}{r_{\mathrm{a}}} \\ &= \frac{100 \cdot 2{,}4\,\mathrm{mm}}{3{,}2\,\mathrm{mm}} \\ &= 75 \end{aligned}$$

Die Endkurve Nummer 75: Ihr Bogen liegt auf drei Vierteln des Außenradius.

Abzählen: Schwingungen in der Zählzeit

(5.14) GESELLE

$$N_{\mathrm{S}} = \frac{n_{\mathrm{h}} \cdot t}{2}$$

N_{S}	Zahl der vollen Schwingungen (in der Zählzeit)	1
n_{h}	Schlagzahl (Sollwert)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
t	Zeit (Zählzeit)	s

Beim Abzählen sucht man die Stelle der Spirale, an der sie mit ihrer Unruh die Sollschlagzahl ergibt. Man fasst die Spirale probeweise, lässt die Unruh frei schwingen und zählt die vollen Schwingungen.

Gilt: n_{h} und t in zueinander passenden Einheiten: A/h in Schläge je Sekunde umrechnen (durch 3600 teilen), wenn t in Sekunden steht.

BEISPIEL Eine Unruh für 18 000 A/h wird mit ihrer neuen Spirale abgezählt. Wie viele volle Schwingungen muss sie in 60 s machen?

Gegeben: $n_{\mathrm{h}} = 18\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $t = 60\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{S}} &= \frac{n_{\mathrm{h}} \cdot t}{2} \\ &= \frac{18\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \cdot 60\,\mathrm{s}}{2} \\ &= 150 \end{aligned}$$

150 Schwingungen in der Minute. Zählt man mehr, ist die Spirale an dieser Stelle zu kurz gefasst; zählt man weniger, zu lang.

Wirksame Länge für die Sollschlagzahl

(5.15) GESELLE

$$l_2 = l_1 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

l_2	nötige wirksame Länge	mm
l_1	wirksame Länge beim Versuch	mm
n_1	Schlagzahl beim Versuch	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
n_2	Schlagzahl (Sollwert)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

Die Schlagzahl ändert sich mit der Wurzel aus dem Kehrwert der Länge. Kürzer heißt schneller.

Gilt: dieselbe Unruh, gleichmäßige Klinge.

BEISPIEL Mit 130 mm wirksamer Länge macht eine Unruh 28 000 A/h. Sie soll 28 800 A/h machen.

Gegeben: $l_1 = 130\,\mathrm{mm}$; $n_1 = 28\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $n_2 = 28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \\ &= 130\,\mathrm{mm} \cdot \left(\frac{28\,000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{28\,800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}\right)^2 \\ &\approx 122{,}9\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Spirale muss rund 7 mm kürzer gefasst werden.

Gangänderung mit dem Rücker

(5.16) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta l}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta l \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δl	Längenänderung (der wirksamen Länge; + heißt: länger)	mm
l	Länge (der Spirale, wirksam: Rolle bis Rückerstifte)	mm

Der Rücker verschiebt die Rückerstifte entlang der äußersten Windung. Kürzere wirksame Länge heißt größeres Richtmoment, die Uhr wird schneller; daher das Minuszeichen.

Gilt: kleine Änderungen; die Spirale liegt ohne Spiel zwischen den Rückerstiften. Mit Spiel wirkt der Rücker schwächer, und der Gang hängt von der Amplitude ab (Abschnitt 5.7).

BEISPIEL Eine Uhr mit 121 mm wirksamer Spirallänge geht 20 s am Tag nach. Sie soll also um 20 s am Tag schneller werden.

Gegeben: $\Delta G = 20\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $l = 121\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \Delta l &\approx -\frac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &= -\frac{2 \cdot 121\,\mathrm{mm} \cdot 20\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &\approx -0{,}056\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Rücker muss die wirksame Länge um rund 0,06 mm verkürzen. Das ist kaum sichtbar; deshalb haben gute Werke eine Feinregulierung am Rücker.

Merksatz: Spirale kürzer, Uhr schneller. 1 ‰ weniger wirksame Länge bringt rund 43 s am Tag.

5.3 Unruh

Das Trägheitsmoment sagt, wie träge sich die Unruh gegen das Drehen wehrt. Es zählt nicht nur die Masse, sondern vor allem ihr Abstand von der Achse: Der Radius geht quadratisch ein. Deshalb sitzt fast die ganze Wirkung im Reif.

Trägheitsmomente von Unruhen gibt man in mg·cm² an: $1\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} = 10^{-10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Wer mit Milligramm und Millimetern rechnet, erhält mg·mm²; 100 mg·mm² sind 1 mg·cm².

Die allgemeinen Formeln für das Trägheitsmoment einfacher Körper und der Satz von Steiner stehen in Abschnitt 2.6.

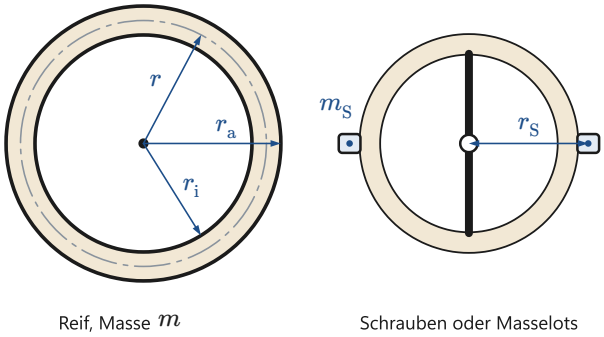


Abb. 5.8 Links der Reif mit mittlerem Radius r, Innenradius r_i und Außenradius r_a; rechts Schrauben der Masse m_S im Abstand r_S

Trägheitsmoment des Reifs (dünner Ring)

(5.17) NÄHERUNG MEISTER

$$J \approx m \cdot r^2$$

J	Trägheitsmoment (des Reifs)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
m	Masse (des Reifs)	mg
r	Radius (des Reifs, Mittelwert)	mm

Für den Überschlag denkt man sich die ganze Masse des Reifs auf dem mittleren Radius. Schenkel und Welle tragen wenig bei, weil ihre Masse nahe an der Achse liegt.

Gilt: Reif schmal gegenüber dem Radius; nur der Reif, ohne Schenkel, Welle und Schrauben.

Gut zu wissen: Genau gerechnet ist der Reif ein Hohlzylinder, Formel (2.37). Mit 4,9 mm Außenradius und 4,1 mm Innenradius ergibt das für den Reif aus dem Beispiel $8{,}16\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$; der Überschlag liegt nur 0,8 % darunter.

BEISPIEL Ein Unruhreif wiegt 40 mg und hat 4,5 mm mittleren Radius.

Gegeben: $m = 40\,\mathrm{mg}$; $\quad r = 4{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} J &\approx m \cdot r^2 \\ &= 40\,\mathrm{mg} \cdot (4{,}5\,\mathrm{mm})^2 \\ &\approx 8{,}1\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2} \end{aligned}$$

Rund $8\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ für den Reif allein. Mit Schenkeln, Welle und Schrauben kommt eine solche Unruh auf rund $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$, den Wert der übrigen Beispiele. Unruhen von Herrenarmbanduhren liegen meist zwischen 5 und 20 mg·cm².

Trägheitsmoment von Schrauben und Masselots

(5.18) MEISTER

$$\Delta J = N \cdot m_{\mathrm{S}} \cdot r_{\mathrm{S}}^2$$

Kleine Massen am Reif zählen wie Punktmassen. Schrauben werden immer paarweise gegenüber gesetzt oder verändert, damit die Unruh im Gleichgewicht bleibt.

Gilt: Schraube klein gegenüber ihrem Abstand von der Achse.

ΔJ	Änderung des Trägheitsmoments (Zuwachs durch die Schrauben)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
N	Anzahl (der gleichen Schrauben oder Masselots)	1
m_{S}	Masse einer Schraube	mg
r_{S}	Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse	mm

BEISPIEL In eine Unruh werden zwei gegenüberliegende Schrauben von je 0,5 mg gesetzt. Ihr Schwerpunkt liegt 5 mm von der Achse.

Gegeben: $N = 2; \quad m_{\mathrm{S}} = 0{,}5\,\mathrm{mg}; \quad r_{\mathrm{S}} = 5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta J &= N \cdot m_{\mathrm{S}} \cdot r_{\mathrm{S}}^2 \\ &= 2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{mg} \cdot (5\,\mathrm{mm})^2 \\ &= 0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}\end{aligned}$$

Die beiden Schrauben bringen $0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$ dazu.

Gangänderung durch das Trägheitsmoment

(5.19) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta J}{2 \cdot J} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta J \approx -\dfrac{2 \cdot J \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
ΔJ	Änderung des Trägheitsmoments (+ heißt: träger)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$
J	Trägheitsmoment (der Unruh)	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$

Eine trägere Unruh schwingt langsamer; daher das Minuszeichen. 1 % mehr Trägheitsmoment kostet 432 s am Tag.

Gilt: kleine Änderungen (bis wenige Prozent); Spirale unverändert.

BEISPIEL Die zwei Schrauben aus dem Beispiel davor kommen an eine Unruh mit $10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$.

Gegeben: $\Delta J = 0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}; \quad J = 10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{\Delta J}{2 \cdot J} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{0{,}25\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}}{2 \cdot 10\,\mathrm{mg{\cdot}cm^2}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -1080\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um 18 Minuten am Tag langsamer. Umgekehrt holt man mit zwei leichteren Schrauben einen großen Nachgang auf.

Feinregulierung mit Regulierschrauben

(5.20) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot m_S \cdot r_S \cdot \Delta r}{J} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

Unruhen ohne Rücker reguliert man, indem man Massen am Reif nach innen oder außen stellt: Regulierschrauben werden gedreht, exzentrische Masselots verdreht. Nach außen heißt träger, die Uhr wird langsamer.

Gilt: kleine Verschiebungen; alle N Massen gleich verstellt. Ungleiches Verstellen erzeugt eine Unwucht.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{s}{d}$
N	Anzahl (der gleichen Schrauben oder Masselots)	1
m_S	Masse einer Schraube	mg
r_S	Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse	mm
Δr	Verschiebung des Schwerpunkts (+ heißt: nach außen)	mm
J	Trägheitsmoment (der Unruh)	$mg \cdot cm^2$

BEISPIEL Zwei Regulierschrauben von je 1,5 mg sitzen 4,5 mm von der Achse an einer Unruh mit $10\,mg \cdot cm^2$. Beide werden um 0,01 mm herausgedreht.

Gegeben: $N = 2$; $m_S = 1{,}5\,mg$; $r_S = 4{,}5\,mm$; $\Delta r = 0{,}01\,mm$; $J = 10\,mg \cdot cm^2$

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot m_S \cdot r_S \cdot \Delta r}{J} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

$$= -\frac{2 \cdot 1{,}5\,mg \cdot 4{,}5\,mm \cdot 0{,}01\,mm}{10\,mg \cdot cm^2} \cdot 86\,400\ \frac{s}{d}$$

$$\approx -11{,}7\ \frac{s}{d}$$

Ein Hundertstelmillimeter macht rund 12 s am Tag. Hineindrehen wirkt genauso stark in die andere Richtung.

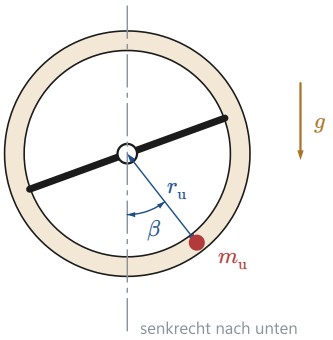


Abb. 5.9 Unwucht in einer hängenden Lage: Übergewicht m_u im Abstand r_u, Winkel β

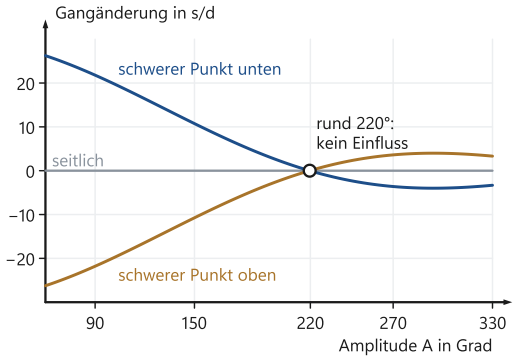


Abb. 5.10 Gangänderung durch 10 µg Übergewicht am Reif (Beispiel zu Formel 5.21), abhängig von der Amplitude

Gangänderung durch eine Unwucht (Schwerpunktfehler)

(5.21) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{k_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{u} \cdot g \cdot r_\mathrm{u} \cdot \cos\beta}{2 \cdot D} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

In den hängenden Lagen wirkt ein Übergewicht wie ein kleines Pendel an der Unruh. Unterhalb von rund 220° Amplitude wird die Uhr schneller, wenn der schwere Punkt unten liegt, oberhalb wird sie langsamer; liegt er oben, ist es umgekehrt. Bei rund 220° hebt sich die Wirkung auf.

Gilt: Uhr in hängender Lage (Unruhwelle waagerecht), kleines Übergewicht, sinusförmige Schwingung; β wird bei Unruh in Ruhelage gemessen. In den liegenden Lagen hat die Unwucht keinen Einfluss auf den Gang.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
k_A	Amplitudenfaktor der Unwucht (aus der Tabelle unten)	1
m_u	Übergewicht (Masse, die den Schwerpunkt aus der Achse rückt)	µg
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
r_u	Abstand des Übergewichts von der Unruhachse	mm
β	Winkel (des Übergewichts gegen die Senkrechte nach unten; Unruh in Ruhelage)	°
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$

Gut zu wissen: Daran erkennt man eine Unwucht: Die Gänge gegenüberliegender hängender Lagen weichen entgegengesetzt vom Mittel ab, und der Unterschied wächst, wenn die Amplitude fällt. Zum Auswuchten prüft man deshalb bei kleiner Amplitude.

BEISPIEL An einem Reif sitzen 10 µg Übergewicht 4,5 mm von der Achse, in der geprüften hängenden Lage genau unten ($\beta = 0°$). Die Uhr läuft mit 270° Amplitude ($k_\mathrm{A} = -0{,}12$), die Spirale hat $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$.

Gegeben: $k_\mathrm{A} = -0{,}12$; $m_\mathrm{u} = 10\,\mu\mathrm{g}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $r_\mathrm{u} = 4{,}5\,\mathrm{mm}$; $\beta = 0°$; $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{k_\mathrm{A} \cdot m_\mathrm{u} \cdot g \cdot r_\mathrm{u} \cdot \cos\beta}{2 \cdot D} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{-0{,}12 \cdot 10\,\mu\mathrm{g} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}5\,\mathrm{mm} \cdot \cos(0°)}{2 \cdot 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -3{,}6\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Unwucht macht die Uhr in dieser Lage um 3,6 s am Tag langsamer, in der Lage gegenüber um 3,6 s am Tag schneller. Fällt die Amplitude auf 150° ($k_\mathrm{A} = 0{,}36$), wird daraus ein Vorgang von rund 11 s am Tag.

Amplitudenfaktor k_A der Unwucht

Amplitude A	sehr klein	90°	120°	150°	180°	200°	220°	240°	270°	300°	330°
k_A	1	0,72	0,54	0,36	0,18	0,08	0,00	−0,06	−0,12	−0,13	−0,11

Berechnet aus der Sinusschwingung der Unruh im Schwerefeld; Nullstelle bei 219,5°.

Merksatz: Schwerer Punkt unten: unter 220° Amplitude Vorgang, über 220° Nachgang.

5.4 Reglage aus Soll- und Istwerten

Regulieren heißt, Trägheitsmoment und Richtmoment so aufeinander abzustimmen, dass die Sollfrequenz herauskommt. Der Gang zeigt, wie weit die Frequenz noch danebenliegt.

Gang aus der Frequenzabweichung

(5.22) GESELLE

$$G = \frac{f_{\text{ist}} - f_{\text{soll}}}{f_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$$

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
f_{ist}	gemessene Frequenz	Hz
f_{soll}	Sollfrequenz	Hz

Schwingt die Unruh zu schnell, zählt das Zeigerwerk zu viele Schläge: Die Uhr geht vor. Der Faktor $86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$ rechnet die relative Abweichung in Sekunden je Tag um. Mit Schlagzahlen steht dieselbe Rechnung in Abschnitt 8.1, für den Quarz in Abschnitt 10.5.

Gilt: Frequenz über die Messzeit gemittelt. Statt der Frequenzen können auch die Schlagzahlen eingesetzt werden.

BEISPIEL Eine Unruh mit 4 Hz Sollfrequenz schwingt mit 4,0005 Hz.

Gegeben: $f_{\text{ist}} = 4{,}0005\,\text{Hz}$; $f_{\text{soll}} = 4\,\text{Hz}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{f_{\text{ist}} - f_{\text{soll}}}{f_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= \frac{4{,}0005\,\text{Hz} - 4\,\text{Hz}}{4\,\text{Hz}} \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= 10{,}8\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 10,8 s am Tag vor. Schon ein Achttausendstel zu viel Frequenz ist als Gang deutlich zu sehen.

Gangänderung aus Richtmoment und Trägheitsmoment

(5.23) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta J}{J} \right) \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
ΔD	Änderung des Richtmoments (+ heißt: Spirale stärker)	$\frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$
ΔJ	Änderung des Trägheitsmoments (+ heißt: Unruh träger)	mg·cm^2
J	Trägheitsmoment (der Unruh)	mg·cm^2

Das ist die Grundformel der Reglage. Aus ihr folgen die Rückerformel (5.16) und die Formeln für Schrauben und Masselots. Wer einen Gang G beseitigen will, braucht die Gangänderung $\Delta G = -G$.

Gilt: kleine Änderungen (bis wenige Prozent).

BEISPIEL Bei einer Reparatur wird die Spirale ersetzt; die neue hat $0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$ mehr Richtmoment als die alte mit $0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$. Zugleich wird die Unruh mit $10\,\text{mg·cm}^2$ durch Unterlegscheiben um $0{,}010\,\text{mg·cm}^2$ träger.

Gegeben: $\Delta D = 0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$; $D = 0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}$; $\Delta J = 0{,}010\,\text{mg·cm}^2$; $J = 10\,\text{mg·cm}^2$

$$\begin{aligned} \Delta G &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta J}{J} \right) \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0{,}002\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}}{0{,}632\ \frac{\mu\text{N·m}}{\text{rad}}} - \frac{0{,}010\,\text{mg·cm}^2}{10\,\text{mg·cm}^2} \right) \cdot 86\,400\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \\ &\approx 93{,}5\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr wird dadurch um rund anderthalb Minuten am Tag schneller: Die stärkere Spirale bringt 137 s, die trägere Unruh nimmt 43 s.

Paarung: Richtmoment für Unruh und Schlagzahl

(5.24) MEISTER

$$D = \pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2 \cdot J$$

So wird die Spirale zur Unruh ausgesucht. Mit der Frequenz geschrieben lautet die Formel $D = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot J$.

Gilt: n_h in Schlägen je Sekunde und J in kg·m² einsetzen, dann ergibt sich D in N·m je rad.

D	Richtmoment (der Spirale; gesucht)	$\frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$
n_h	Schlagzahl (Sollwert)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
J	Trägheitsmoment (der Unruh)	$\mathrm{mg\cdot cm^2}$

BEISPIEL Eine Unruh mit $12\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$ soll 21 600 A/h schlagen, das sind 6 Schläge je Sekunde.

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 21\,600\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $\quad J = 12\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$

$$\begin{aligned} D &= \pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2 \cdot J \\ &= \pi^2 \cdot \left(21\,600\ \tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}\right)^2 \cdot 12\,\mathrm{mg\cdot cm^2} \\ &\approx 0{,}426\ \tfrac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}} \end{aligned}$$

Die Spirale braucht rund $0{,}43\ \frac{\mu\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$. Für 28 800 A/h müsste sie an derselben Unruh fast doppelt so stark sein.

Trägheitsmoment messen mit einer Zusatzscheibe

(5.25) VERTIEFUNG

$$J = \frac{J_\mathrm{Z}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1}$$

Ein unbekanntes Trägheitsmoment lässt sich nicht wiegen, aber über die Schwingungsdauer messen: Eine Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment macht die Schwingung um ein berechenbares Stück langsamer.

Gilt: dieselbe Spirale bei beiden Messungen, Scheibe zentrisch aufgesteckt, freie Schwingung ohne Hemmung.

J	Trägheitsmoment (der Unruh; gesucht)	$\mathrm{mg\cdot cm^2}$
J_Z	bekanntes Trägheitsmoment der aufgesteckten Scheibe	$\mathrm{mg\cdot cm^2}$
T_1	Schwingungsdauer ohne Scheibe	s
T_2	Schwingungsdauer mit Scheibe	s

BEISPIEL Eine Unruh schwingt an ihrer Spirale mit 0,250 s. Mit einer aufgesteckten Scheibe von $5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$ dauert die Schwingung 0,306 s.

Gegeben: $J_\mathrm{Z} = 5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$; $\quad T_1 = 0{,}250\,\mathrm{s}$; $\quad T_2 = 0{,}306\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{J_\mathrm{Z}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{5\,\mathrm{mg\cdot cm^2}}{\left(\frac{0{,}306\,\mathrm{s}}{0{,}250\,\mathrm{s}}\right)^2 - 1} \\ &\approx 10{,}0\,\mathrm{mg\cdot cm^2} \end{aligned}$$

Die Unruh hat rund $10\,\mathrm{mg\cdot cm^2}$. Aus J und T_1 folgt mit Formel (5.1) auch das Richtmoment der Spirale.

5.5 Temperatur

Wärme verändert den Gangregler auf zwei Wegen. Die Spirale wird weicher, weil ihr Elastizitätsmodul sinkt, und alle Teile dehnen sich aus. Bei einer Stahlspirale überwiegt der erste Weg bei weitem: Die Uhr geht in der Wärme stark nach.

Zwei Lösungen haben sich durchgesetzt. Die Kompensationsunruh hat einen aufgeschnittenen Reif aus Stahl innen und Messing außen; in der Wärme biegen sich die freien Enden nach innen, das Trägheitsmoment sinkt und gleicht die weichere Spirale aus. Heute nimmt man selbstkompensierende Spiralen aus Nickel-Eisen-Legierungen wie Nivarox oder aus oxidiertem Silizium, deren Elastizitätsmodul sich mit der Temperatur kaum ändert, zusammen mit einer einmetallischen Unruh.

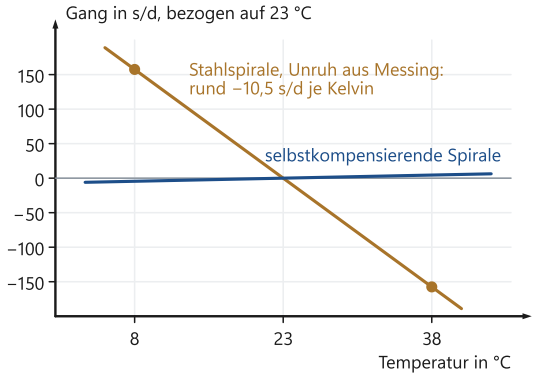


Abb. 5.11 Gang über der Temperatur: Stahlspirale mit einmetallischer Unruh und selbstkompensierende Spirale

Temperaturkoeffizient aus den Werkstoffdaten

(5.26) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$C \approx \frac{1}{2} \cdot (\beta_\mathrm{E} + 3 \cdot \alpha_\mathrm{S} - 2 \cdot \alpha_\mathrm{U}) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Spirale wird in der Wärme weicher (β_E ist bei Stahl negativ), zugleich in allen Maßen größer; die Unruh wird größer und damit träger. Die Formel zählt die drei Anteile zusammen.

Gilt: einmetallische, nicht aufgeschnittene Unruh; gleichmäßige Erwärmung; kleine Temperaturänderungen. Der Einfluss von Öl, Hemmung und Rückerstiften ist nicht enthalten.

C	Temperaturkoeffizient des Gangs (+ heißt: Uhr geht in der Wärme vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d \cdot K}}$
β_E	Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls der Spirale	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
α_S	Längenausdehnungskoeffizient der Spirale	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
α_U	Längenausdehnungskoeffizient der Unruh	$\frac{1}{\mathrm{K}}$

BEISPIEL Eine Stahlspirale ($\beta_\mathrm{E} = -240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$, $\alpha_\mathrm{S} = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$) arbeitet mit einer einmetallischen Unruh aus Messing ($\alpha_\mathrm{U} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$).

Gegeben: $\beta_\mathrm{E} = -240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\alpha_\mathrm{S} = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\alpha_\mathrm{U} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{1}{2} \cdot (\beta_\mathrm{E} + 3 \cdot \alpha_\mathrm{S} - 2 \cdot \alpha_\mathrm{U}) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-240 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} + 3 \cdot 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} - 2 \cdot 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}\right) \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -10{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d \cdot K}} \end{aligned}$$

Die Uhr verliert rund 10,5 s am Tag je Kelvin Erwärmung, zwischen 8 °C und 38 °C also mehr als 5 Minuten am Tag. Fast alles davon kommt aus dem Elastizitätsmodul.

Werkstoffe von Spirale und Unruh (Richtwerte bei 20 °C)

Werkstoff	Verwendung	β_E in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$	α in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$
Kohlenstoffstahl, gehärtet	Spirale älterer Uhren	−200 … −270	11 … 13
Nivarox und ähnliche Nickel-Eisen-Legierungen	selbstkompensierende Spirale	um 0, einstellbar	um 8
Silizium, unbeschichtet	zum Vergleich; ohne Oxidschicht nicht kompensiert	um −60	2,6
Silizium mit Oxidschicht	selbstkompensierende Spirale	um 0, einstellbar	um 2,6
Messing	einmetallische Unruh		18 … 21
Berylliumbronze (Glucydur)	einmetallische Unruh		17

Bei selbstkompensierenden Spiralen stellt der Hersteller β_E so ein, dass es die Ausdehnung von Spirale und Unruh gerade ausgleicht.

Temperaturkoeffizient aus der Messung

(5.27) MEISTER

$$C = \frac{G_2 - G_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

UMGESTELLT $G_2 = G_1 + C \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$

Geprüft wird bei zwei Temperaturen in derselben Lage und mit gleichem Aufzugszustand. Üblich sind 8 °C und 38 °C; der Nenner ist dann 30 K. In der Chronometerprüfung liegen beide Temperaturen fest (Abschnitt 8.4).

Gilt: mittlerer Koeffizient zwischen den beiden Prüftemperaturen; die Uhr muss vor jeder Messung durchgewärmt oder durchgekühlt sein.

C	Temperaturkoeffizient des Gangs	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}$
G_2	Gang bei der höheren Temperatur	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_1	Gang bei der tieferen Temperatur	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
ϑ_2	höhere Prüftemperatur	$^\circ\mathrm{C}$
ϑ_1	tiefere Prüftemperatur	$^\circ\mathrm{C}$

BEISPIEL Eine Uhr geht bei 8 °C um 6,0 s am Tag vor, bei 38 °C um 1,5 s am Tag vor, jeweils in derselben Lage.

Gegeben: $G_2 = 1{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $\vartheta_2 = 38^\circ\mathrm{C}$; $\vartheta_1 = 8^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{G_2 - G_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \\ &= \frac{1{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{38^\circ\mathrm{C} - 8^\circ\mathrm{C}} \\ &= -0{,}15\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}} \end{aligned}$$

Die Uhr verliert 0,15 s am Tag je Kelvin Erwärmung. Die Chronometerprüfung nach ISO 3159 lässt bei Werken über 20 mm Durchmesser bis zu 0,6 s am Tag je Kelvin in beide Richtungen zu.

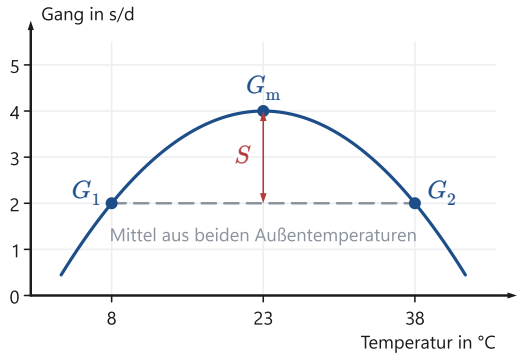


Abb. 5.12 Sekundärer Fehler S: Bei mittlerer Temperatur geht die Uhr vor, obwohl die Gänge G_1 und G_2 bei 8 °C und 38 °C gleich sind

Sekundärer Fehler

(5.28) VERTIEFUNG

$$S = G_{\mathrm{m}} - \frac{G_1 + G_2}{2}$$

Die Kompensationsunruh gleicht fast geradlinig aus, die Stahlspirale wird aber nicht geradlinig weicher. Stimmt der Gang bei den beiden Außentemperaturen, geht die Uhr dazwischen vor. Selbstkompensierende Spiralen haben diesen Fehler kaum noch.

Gilt: drei Messungen in derselben Lage; mittlere Temperatur genau zwischen den beiden äußeren.

S	sekundärer Fehler (+ heißt: Uhr geht bei mittlerer Temperatur vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_{m}	Gang bei der mittleren Temperatur (23 °C)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_1	Gang bei der tieferen Temperatur (8 °C)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_2	Gang bei der höheren Temperatur (38 °C)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

BEISPIEL Eine Taschenuhr mit Kompensationsunruh und Stahlspirale geht bei 8 °C und bei 38 °C je 2,0 s am Tag vor, bei 23 °C aber 4,0 s am Tag vor.

Gegeben: $G_{\mathrm{m}} = 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_2 = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} S &= G_{\mathrm{m}} - \frac{G_1 + G_2}{2} \\ &= 4{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - \frac{2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{2} \\ &= 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Der sekundäre Fehler beträgt 2 s am Tag; wenige Sekunden am Tag sind für diese Bauart typisch. Der Temperaturkoeffizient nach Formel (5.27) ist hier null und verrät den Fehler nicht.

Merksatz: Stahlspirale mit einfacher Unruh: rund 11 s Nachgang am Tag je Kelvin Erwärmung.

5.6 Energie und Güte

Die schwingende Unruh ist ein Energiespeicher. Bei jeder Schwingung geht ein kleiner Teil der Energie durch Luft- und Lagerreibung verloren; die Hemmung muss genau diesen Teil nachliefern. Je kleiner der Verlust, desto weniger stört die Hemmung den Gang.

Energie der schwingenden Unruh

(5.29) MEISTER

$$W = \frac{D \cdot A^2}{2}$$

Am Umkehrpunkt steckt die ganze Energie in der gespannten Spirale, in der Ruhelage in der Bewegung der Unruh: $W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{\max}^2$. Die Energie wächst mit dem Quadrat der Amplitude. Es ist die Energie einer Drehfeder nach Formel (2.26).

Gilt: Amplitude im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

W	Energie (der Schwingung)	$\mu\mathrm{J}$
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$
A	Amplitude (im Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Welche Energie steckt in einer Unruh mit $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$ bei 270° Amplitude (4,71 rad)?

Gegeben: $D = 0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$; $A = 4{,}71\ \mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{D \cdot A^2}{2} \\ &= \frac{0{,}632\ \frac{\mu\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}} \cdot (4{,}71\ \mathrm{rad})^2}{2} \\ &\approx 7{,}01\ \mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 7 µJ. Bei 220° wären es nur noch 4,7 µJ, zwei Drittel davon.

Gütefaktor

(5.30) VERTIEFUNG

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot W}{\Delta W}$$

Q	Gütefaktor	1
W	Energie (der Schwingung)	μJ
ΔW	Energieverlust je voller Schwingung	μJ

Der Gütefaktor vergleicht die gespeicherte Energie mit dem Verlust je Schwingung. Hohe Güte heißt: Der Schwinger braucht wenig Nachschub und lässt sich von der Hemmung wenig stören.

Gilt: schwach gedämpfter Schwinger (Q viel größer als 1). Bei der Unruh hängt Q etwas von Amplitude und Lage ab.

BEISPIEL Die Unruh aus dem Beispiel davor verliert je Schwingung 0,176 µJ.

Gegeben: $W = 7{,}01\,\mu J$; $\Delta W = 0{,}176\,\mu J$

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot W}{\Delta W} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7{,}01\,\mu J}{0{,}176\,\mu J} \approx 250$$

Ein Gütefaktor um 250 ist für eine Armbanduhr üblich. Ein gutes Sekundenpendel erreicht einige Tausend bis über Zehntausend, ein Uhrenquarz mehrere Zehntausend.

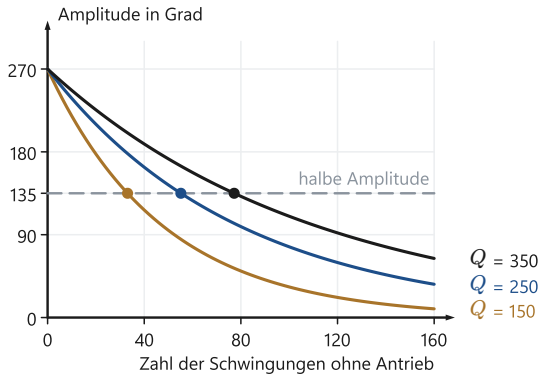


Abb. 5.13 Ausschwingen ohne Antrieb: Die Amplitude halbiert sich nach rund $0{,}22 \cdot Q$ Schwingungen

Ausschwingen ohne Antrieb

(5.31) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$A_\mathrm{N} \approx A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{Q}}$$

UMGESTELLT

$$Q \approx \frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{\ln\left(\frac{A_0}{A_\mathrm{N}}\right)}$$

A_N	Amplitude nach N_S Schwingungen	°
A_0	Amplitude am Anfang	°
N_S	Zahl der vollen Schwingungen (ohne Antrieb)	1
Q	Gütefaktor	1

Ohne Antrieb klingt die Schwingung ab. Die Amplitude halbiert sich nach rund $0{,}22 \cdot Q$ Schwingungen. Umgekehrt liefert ein Ausschwingversuch den Gütefaktor.

Gilt: Reibung proportional zur Geschwindigkeit (Luftreibung), Q über den Versuch konstant. Lagerreibung lässt die Amplitude am Ende schneller fallen.

BEISPIEL Eine Unruh mit $Q = 250$ schwingt mit 270° und wird nicht mehr angetrieben. Wie groß ist die Amplitude nach 55 Schwingungen?

Gegeben: $A_0 = 270°$; $N_\mathrm{S} = 55$; $Q = 250$

$$\begin{aligned} A_\mathrm{N} &\approx A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot N_\mathrm{S}}{Q}} \\ &= 270° \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi \cdot 55}{250}} \\ &\approx 135° \end{aligned}$$

Nach 55 Schwingungen, bei 4 Hz also nach knapp 14 s, ist die Amplitude auf die Hälfte gefallen.

Leistungsbedarf der Unruh

(5.32) MEISTER

$$P = \Delta W \cdot f$$

P	Leistung (die die Hemmung an die Unruh abgeben muss)	µW
ΔW	Energieverlust je voller Schwingung	µJ
f	Frequenz (volle Schwingungen je Sekunde)	Hz

Im Gleichgewicht ersetzt die Hemmung in jeder Schwingung genau den Verlust. Mit dem Gütefaktor geschrieben: $P = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot W}{Q}$. P ist hier die Leistung, nicht die Gewindesteigung.

Gilt: eingeschwungener Zustand mit gleichbleibender Amplitude.

BEISPIEL Die Unruh aus den Beispielen davor verliert 0,176 µJ je Schwingung und schwingt mit 4 Hz.

Gegeben: $\Delta W = 0{,}176\,\mathrm{\mu J}$; $f = 4\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} P &= \Delta W \cdot f \\ &= 0{,}176\,\mathrm{\mu J} \cdot 4\,\mathrm{Hz} \\ &= 0{,}704\,\mathrm{\mu W} \end{aligned}$$

Die Unruh braucht rund 0,7 µW. Das Federhaus muss ein Mehrfaches liefern, weil Räderwerk und Hemmung nur einen Teil weitergeben (Kapitel 3 und 7).

Merksatz: Doppelte Amplitude, vierfache Energie.

5.7 Isochronismus

Isochron heißt gleich lang dauernd: Ein idealer Gangregler braucht für große und kleine Schwingungen dieselbe Zeit. Die Formel (5.1) erfüllt das, die wirkliche Uhr nur annähernd. Weil die Amplitude mit ablaufender Zugfeder und in den hängenden Lagen kleiner wird, zeigt sich jeder Isochronismusfehler als Gangunterschied zwischen voll aufgezogener und fast abgelaufener Uhr und zwischen den Lagen.

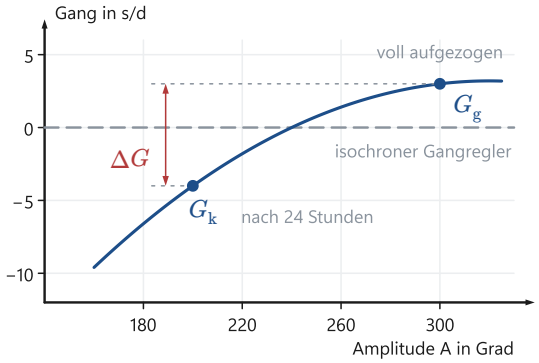


Abb. 5.14 Gang-Amplituden-Diagramm (Prinzip): Der Isochronismusfehler ΔG ist der Gangunterschied zwischen kleiner und großer Amplitude

Der **Isochronismusfehler** ist der Gangunterschied zwischen kleiner und großer Amplitude, gemessen in derselben Lage und bei derselben Temperatur (Abb. 5.14). Am einfachsten misst man voll aufgezogen und nach 24 Stunden Lauf; Formel und Beispiel dazu stehen in Abschnitt 8.3, Formel (8.14). Wird die Uhr bei kleiner Amplitude langsamer, liegt das häufig an zu viel Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften. Weitere Ursachen nennt die Tabelle.

Was den Isochronismus stört

Ursache	Wirkung bei kleiner Amplitude	Abhilfe
Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften	Nachgang: Die Spirale liegt einen kleineren Teil der Schwingung am Stift an und wirkt im Mittel länger	Spiel klein halten, Spirale mittig zwischen die Stifte legen
Hemmung (Auslösung vor, Antrieb um die Ruhelage)	meist Nachgang, weil der Eingriff einen größeren Teil der Schwingung einnimmt	leichtgängige Hemmung, hohe Amplitude, hohe Güte
Unwucht der Unruh	in den hängenden Lagen Vorgang oder Nachgang je nach Lage des schweren Punkts (Abschnitt 5.3)	auswuchten
einseitiges Atmen der Flachspirale	Schwerpunkt der Spirale wandert, die Zapfen werden seitlich belastet; der Gang hängt von Amplitude und Lage ab	Endkurve nach Breguet oder Spirale mit angepasster Form
Lage des inneren Ansteckpunkts an der Rolle	Vorgang oder Nachgang in den hängenden Lagen je nach Stellung des Ansteckpunkts	Ansteckpunkt nach Herstellerangabe; wird in der Feinreglage gezielt genutzt

Die Wirkungen überlagern sich. In der Feinreglage stimmt man sie so ab, dass sie sich möglichst aufheben.

Die Endkurve nach Breguet führt die äußerste Windung nach oben und in einem engeren Bogen zum Klötzchen. Bei richtiger Form öffnet und schließt sich die Spirale gleichmäßig nach allen Seiten, ihr Schwerpunkt bleibt in der Achse und die Zapfen werden nicht seitlich gedrückt. Für die Form der Endkurve gibt es Konstruktionsregeln, aber keine einfache Formel; sie wird nach Vorlage gebogen und am Gang geprüft.

Merksatz: Isochron ist ein Gangregler, wenn der Gang nicht von der Amplitude abhängt.

6 Pendel

Das Pendel ist der Gangregler der Großuhr. Seine Schwingungsdauer hängt nur von der Länge und der Fallbeschleunigung ab, nicht von der Masse der Linse und bei kleinen Ausschlägen kaum vom Ausschlag. Darum regulieren wir eine Pendeluhr über die Länge: Linse höher, Uhr schneller.

Die Formeln gelten für kleine Ausschläge von wenigen Grad, wie sie in Uhren üblich sind. Was größere Ausschläge, die Temperatur und der Aufstellort ausmachen, steht in den Abschnitten 6.4 und 6.5.

6.1 Mathematisches Pendel

Das mathematische Pendel ist das Modell, mit dem wir rechnen: eine punktförmige Masse an einem gewichtslosen Faden. Echte Pendel weichen davon nur wenig ab; wie man sie genau berechnet, steht in Abschnitt 6.3.

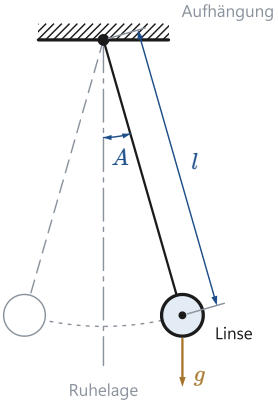


Abb. 6.1 Mathematisches Pendel: Länge l bis zum Schwerpunkt der Linse, Ausschlag A (zur Verdeutlichung übertrieben)

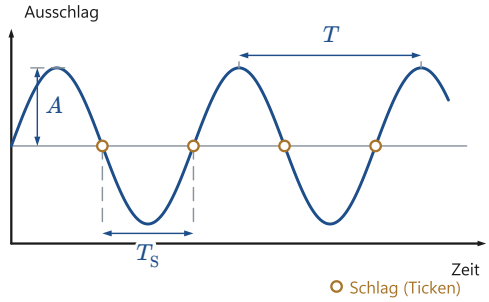


Abb. 6.2 Ein Schlag ist eine Halbschwingung: $T_\mathrm{S} = \frac{1}{2}T$

Schwingungsdauer

(6.1) GESELLE

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

UMGESTELLT $l = \dfrac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$

T	Schwingungsdauer (volle Schwingung, hin und zurück)	s
l	Pendellänge (Aufhängepunkt bis Schwerpunkt der Linse)	m
g	Fallbeschleunigung (in Mitteleuropa $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Die Schwingungsdauer wächst mit der Wurzel der Länge: Ein viermal so langes Pendel schwingt halb so schnell.

Gilt: kleine Ausschläge (bis etwa 5°), punktförmige Linse, ohne Reibung. Für ein echtes Pendel l durch die reduzierte Pendellänge l_r ersetzen (Abschnitt 6.3).

Gut zu wissen: Die Masse der Linse kommt in der Formel nicht vor. Eine schwerere Linse ändert die Schwingungsdauer nicht, sie macht das Pendel nur unempfindlicher gegen Störungen aus Hemmung und Räderwerk.

BEISPIEL Ein Pendel misst vom Aufhängepunkt bis zur Mitte der Linse 0,5 m. Wie groß ist die Schwingungsdauer?

Gegeben: $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\,\mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$
$$\approx 1{,}42\,\mathrm{s}$$

Eine volle Schwingung, also hin und zurück, dauert rund 1,42 s; jeder Schlag dauert 0,71 s.

Schlagdauer (Halbschwingung)

(6.2) GESELLE

$$T_\mathrm{S} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T_S	Schlagdauer (Halbschwingung, von einem Umkehrpunkt zum anderen)	s
l	Pendellänge	m
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Uhrmacher zählen Schläge. Ein Schlag ist eine Halbschwingung, also die halbe Schwingungsdauer; jeder Schlag ist als Ticken zu hören.

Gilt: wie bei Formel (6.1).

BEISPIEL Wie lange dauert ein Schlag bei einem Pendel von 994 mm Länge?

Gegeben: $l = 0{,}994\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$T_\mathrm{S} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$= \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}994\,\mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$
$$\approx 1{,}00\,\mathrm{s}$$

Genau eine Sekunde: Ein Pendel von 994 mm ist ein Sekundenpendel, wie es in Regulatoren und vielen Standuhren schwingt.

Schlagzahl aus der Schwingungsdauer

(6.3) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = \frac{2}{T}$$

UMGESTELLT $T = \frac{2}{n_\mathrm{h}}$

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
T	Schwingungsdauer	s

Je volle Schwingung schlägt das Pendel zweimal. Bei Großuhren gibt man die Schlagzahl oft je Minute an, bei Kleinuhren in Halbschwingungen je Stunde (A/h).

BEISPIEL Ein Pendel hat eine Schwingungsdauer von 1,5 s. Wie groß ist die Schlagzahl je Stunde?

Gegeben: $T = 1{,}5\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{h} &= \frac{2}{T} \\ &= \frac{2}{1{,}5\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2}{1{,}5\,\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &= 4800\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

4800 Schläge je Stunde, das sind 80 Schläge je Minute.

Pendellänge aus der Schlagzahl

(6.4) GESELLE

$$l = \frac{g}{\pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2}$$

l	Pendellänge	m
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

So bestimmt man die Länge eines fehlenden Pendels: Schlagzahl aus den Zähnezahlen des Räderwerks berechnen (Kapitel 4), dann die Länge.

Gilt: wie bei der Schwingungsdauer Formel (6.1); n_h in Schlägen je Sekunde einsetzen, wenn g in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ steht.

BEISPIEL Ein Uhrwerk ist für 90 Schläge je Minute gebaut, das sind 1,5 Schläge je Sekunde. Wie lang muss das Pendel sein?

Gegeben: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $\quad n_\mathrm{h} = 1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$$\begin{aligned} l &= \frac{g}{\pi^2 \cdot n_\mathrm{h}^2} \\ &= \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\pi^2 \cdot \left(1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} \\ &\approx 0{,}442\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Pendel muss vom Aufhängepunkt bis zur Mitte der Linse rund 442 mm lang sein.

Pendellänge aus Schlägen je Minute (Werkstattformel)

(6.5) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$l = \frac{3\,578\,400}{n_{\mathrm{h}}^2}$$

l	Pendellänge in mm	mm
n_{h}	Schlagzahl in Schlägen je Minute	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

Die Zahl 3 578 400 ist die Länge des Sekundenpendels (994 mm) mal 60^2. Werte nur in den angegebenen Einheiten einsetzen.

Gilt: $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; l in mm, n_{h} in Schlägen je Minute.

BEISPIEL Wie lang ist das Pendel für 90 Schläge je Minute?

Gegeben: $n_{\mathrm{h}} = 90\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} l &= \frac{3\,578\,400}{n_{\mathrm{h}}^2} \\ &= \frac{3\,578\,400}{90^2} \\ &\approx 442\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Rund 442 mm, wie in der Formel davor.

Merksatz: Ein Pendel von 994 mm schlägt Sekunden. Ein viermal so langes Pendel schlägt halb so oft.

6.2 Regulieren über die Pendellänge

Geht eine Pendeluhr vor, wird das Pendel verlängert; geht sie nach, wird es verkürzt. Weil die Schwingungsdauer mit der Wurzel der Länge wächst, macht 1 ‰ mehr Länge die Schwingung um 0,5 ‰ langsamer, das sind 43 s am Tag.

Gangänderung durch Längenänderung

(6.6) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{\Delta l}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta l \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δl	Längenänderung (+ heißt: Pendel länger, Linse tiefer)	mm
l	Pendellänge	mm

Ein längeres Pendel schwingt langsamer, die Uhr wird langsamer; daher das Minuszeichen. Der Faktor $86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ rechnet die relative Änderung in Sekunden je Tag um.

Gilt: kleine Änderungen (Δl viel kleiner als l); Pendel ohne schwere Stange.

Gut zu wissen: Bei Pendeln mit schwerer Stange wandert der Schwingungsmittelpunkt weniger weit als die Linse. Die Linse muss dann weiter verstellt werden als berechnet. Rechnet man mit der Pendellänge aus der Schlagzahl, sind es bei einer Stange mit 10 %, 20 % und 30 % der Linsenmasse rund 3 %, 7 % und 10 % mehr Weg. Für das wirkliche Pendel wird deshalb oft mit dem Faktor 2,2 statt 2 gerechnet, siehe Formel (6.7).

BEISPIEL Eine Standuhr mit 994 mm Pendellänge geht 30 s am Tag vor. Sie soll also um 30 s am Tag langsamer werden. Um wie viel muss die Linse gesenkt werden?

Gegeben: $\Delta G = -30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}; \quad l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} \Delta l &\approx -\frac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &= -\frac{2 \cdot 994\,\mathrm{mm} \cdot \left(-30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\right)}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &\approx 0{,}69\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Linse muss um rund 0,7 mm tiefer, das Pendel also länger werden.

Linse verstellen aus Gang und Schlagzahl (Werkstattformel)

(6.7) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$\Delta l \approx \frac{90 \cdot G}{n_\mathrm{h}^2}$$

Δl	Verstellweg der Linse in mm (+ heißt: Linse tiefer)	mm
G	Gang der Uhr in Sekunden je Tag (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
n_h	Schlagzahl in Schlägen je Minute	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

Geht die Uhr vor, kommt die Linse tiefer; geht sie nach, kommt sie höher. In der Zahl 90 stecken die Pendellänge aus der Schlagzahl und ein Zuschlag für das wirkliche Pendel. Für das mathematische Pendel ergeben die Formeln (6.5) und (6.6) zusammen $\frac{2 \cdot 3\,578\,400}{86\,400} \approx 83$. Mit dem Faktor 2,2 statt 2 werden daraus 91, gerundet 90.

Gilt: Δl in mm, G in Sekunden je Tag, n_h in Schlägen je Minute.

Richtwert für Pendel mit mitschwingender Stange; bei sehr leichter Stange steht 83 statt 90. Nach dem Verstellen wird der Gang neu gemessen.

BEISPIEL Die Standuhr aus dem Beispiel zu Formel (6.6) schlägt 60-mal in der Minute und geht 30 s am Tag vor. Um wie viel wird die Linse gesenkt?

Gegeben: $G = 30\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $n_\mathrm{h} = 60\ \frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned}\Delta l &\approx \frac{90 \cdot G}{n_\mathrm{h}^2} \\ &= \frac{90 \cdot 30}{60^2} \\ &= 0{,}75\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

Die Linse kommt 0,75 mm tiefer. Für das mathematische Pendel waren es 0,69 mm; der Unterschied ist der Zuschlag für die mitschwingende Stange.

Gangänderung mit der Reguliermutter

(6.8) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx -\frac{N \cdot P}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $N \approx -\dfrac{2 \cdot l \cdot \Delta G}{P \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
N	Umdrehungen (der Mutter; + heißt: Linse tiefer)	1
P	Gewindesteigung (der Reguliermutter)	mm
l	Pendellänge	mm

Eine volle Umdrehung der Mutter verschiebt die Linse um eine Gewindesteigung.

Gilt: Linse sitzt auf der Mutter auf; Pendel ohne schwere Stange.

BEISPIEL Wie stark ändert eine volle Umdrehung der Reguliermutter (Steigung 0,5 mm) den Gang eines Sekundenpendels, wenn die Linse dabei sinkt?

Gegeben: $N = 1$; $P = 0{,}5\,\mathrm{mm}$; $l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{N \cdot P}{2 \cdot l} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{1 \cdot 0{,}5\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 994\,\mathrm{mm}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -21{,}7\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 22 s am Tag langsamer. Feinere Korrekturen macht man mit Teilumdrehungen; viele Muttern tragen dafür eine Teilung.

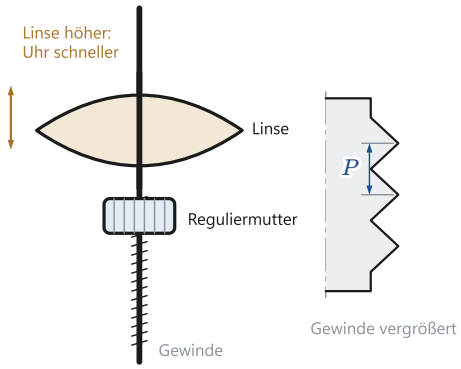


Abb. 6.3 Die Reguliermutter hebt oder senkt die Linse je Umdrehung um die Steigung P

Merksatz: Linse höher, Uhr schneller. Beim Sekundenpendel bringt 1 mm rund 43 s am Tag.

Zulagegewichte. Präzisionspendeluhren werden zuletzt nicht mehr an der Mutter reguliert, sondern mit kleinen Gewichten auf einem Tischchen an der Pendelstange. Das Pendel schwingt dabei weiter. Jedes aufgelegte Gewicht macht die Uhr schneller, jedes abgenommene langsamer.

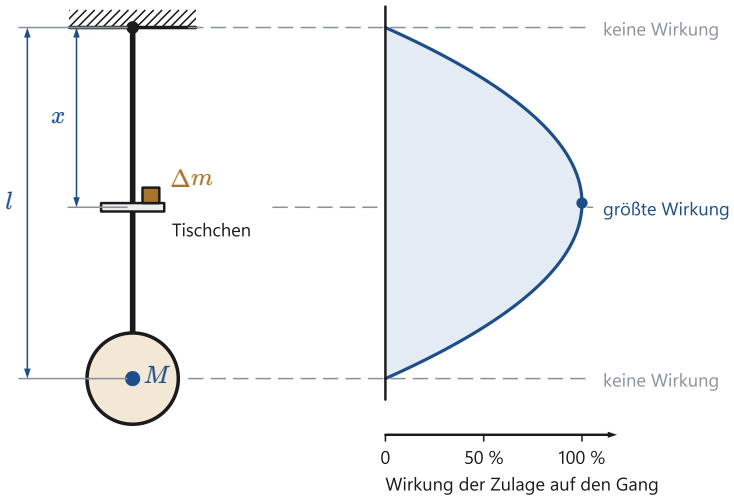


Abb. 6.4 Zulagegewicht Δm im Abstand x unter der Aufhängung: Die Wirkung auf den Gang ist in halber Pendellänge am größten und verschwindet in der Aufhängung und im Schwingungsmittelpunkt M

Zulagegewicht in halber Pendellänge

(6.9) NÄHERUNG GESELLE

$$\Delta G \approx \frac{\Delta m}{8 \cdot m} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $$\Delta m \approx \frac{8 \cdot m \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$$

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δm	Masse des Zulagegewichts (+ heißt: aufgelegt)	g
m	Masse (des Pendels)	kg

Die Zulage sitzt über dem Schwingungsmittelpunkt und verkürzt die wirksame Pendellänge ein wenig. Weil 86 400 geteilt durch 8 gleich 10 800 ist, rechnet man in der Werkstatt kürzer: $\Delta m = \frac{m \cdot \Delta G}{10\,800}$ mit ΔG in Sekunden je Tag.

Gilt: Tischchen in halber Pendellänge, also in der Mitte zwischen Aufhängung und Schwingungsmittelpunkt; Zulage viel leichter als das Pendel; Masse des Pendels im Wesentlichen in der Linse. Bei schwerer Stange wirkt die Zulage etwas stärker.

BEISPIEL Eine Präzisionspendeluhr mit 6 kg Pendelmasse geht 0,5 s am Tag nach. Welches Zulagegewicht gleicht das aus?

Gegeben: $m = 6\,\mathrm{kg}$; $\Delta G = 0{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta m &\approx \frac{8 \cdot m \cdot \Delta G}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &= \frac{8 \cdot 6\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}} \\ &\approx 0{,}28\,\mathrm{g}\end{aligned}$$

Rund 0,28 g. Zum Merken: Der 10 800. Teil der Pendelmasse, hier 0,56 g, bringt 1 s am Tag.

Zulagegewicht in beliebiger Höhe

(6.10) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{\Delta m \cdot x}{2 \cdot m \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

In der Aufhängung und im Schwingungsmittelpunkt bewirkt eine Zulage nichts. Dazwischen macht sie die Uhr schneller, am stärksten in der Mitte. Unterhalb des Schwingungsmittelpunkts macht sie die Uhr langsamer.

Gilt: Zulage viel leichter als das Pendel; Pendel als Punktmasse in der Länge l gerechnet.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δm	Masse des Zulagegewichts (+ heißt: aufgelegt)	g
x	Abstand (Aufhängung bis Zulagegewicht)	mm
m	Masse (des Pendels)	kg
l	Pendellänge (Aufhängung bis Schwingungsmittelpunkt)	mm

Gut zu wissen: Rund um die halbe Pendellänge ändert sich die Wirkung kaum mit der Höhe. Dort sitzt das Tischchen deshalb richtig: Auf einige Millimeter kommt es nicht an. Ein verschiebbares Reguliergewicht gehört dagegen nicht in die Mitte, denn dort bewirkt das Verschieben fast nichts.

BEISPIEL Das Pendel aus dem Beispiel davor (6 kg) ist ein Sekundenpendel mit 994 mm Länge. Darauf liegt 1 g nicht in der Mitte, sondern 331 mm unter der Aufhängung, also in einem Drittel der Länge. Wie stark ändert sich der Gang?

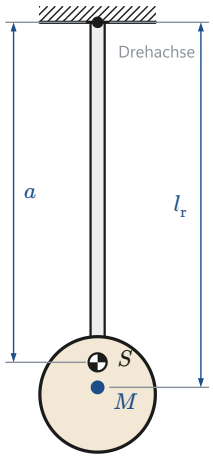
Gegeben: $\Delta m = 1\,\mathrm{g}$; $x = 331\,\mathrm{mm}$; $m = 6\,\mathrm{kg}$; $l = 994\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{\Delta m \cdot x}{2 \cdot m \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{g} \cdot 331\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 6\,\mathrm{kg} \cdot 994\,\mathrm{mm}} \cdot \left(1 - \frac{331\,\mathrm{mm}}{994\,\mathrm{mm}}\right) \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 1{,}60\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 1,6 s am Tag schneller. In halber Länge wären es 1,8 s.

6.3 Physikalisches Pendel

Ein echtes Pendel hat eine Stange mit eigener Masse und eine ausgedehnte Linse. Es schwingt wie ein mathematisches Pendel der reduzierten Länge l_r. Diese reicht bis zum Schwingungsmittelpunkt, der etwas unter dem Schwerpunkt liegt.



S Schwerpunkt · M Schwingungsmittelpunkt

Abb. 6.5 Physikalisches Pendel: Schwerpunkt S im Abstand a, Schwingungsmittelpunkt M in der reduzierten Länge l_r

Schwingungsdauer des physikalischen Pendels

(6.11) MEISTER

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot g \cdot a}}$$

Gilt: kleine Ausschläge, ohne Reibung, starres Pendel.

T	Schwingungsdauer	s
J_A	Trägheitsmoment um die Drehachse (Aufhängung)	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
m	Masse (des ganzen Pendels)	kg
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$
a	Abstand (Drehachse bis Schwerpunkt)	m

BEISPIEL Eine gleichmäßige Stange (Länge 1 m, Masse 0,6 kg) schwingt um ihr oberes Ende. Ihr Trägheitsmoment um das Ende ist $J_\mathrm{A} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$, der Schwerpunkt liegt in der Mitte.

Gegeben: $J_\mathrm{A} = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$; $m = 0{,}6\,\mathrm{kg}$; $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$; $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot g \cdot a}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}}{0{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}} \\ &\approx 1{,}64\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

1,64 s; ein Fadenpendel von 1 m hätte 2,01 s. Die Stange schwingt schneller, weil ein Teil ihrer Masse nahe an der Drehachse liegt.

Reduzierte Pendellänge

(6.12) MEISTER

$$l_\mathrm{r} = \frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot a}$$

Die reduzierte Pendellänge ist die Länge des mathematischen Pendels mit derselben Schwingungsdauer. Mit l_r statt l gelten alle Formeln aus den Abschnitten 6.1 und 6.2.

l_r	reduzierte Pendellänge (Drehachse bis Schwingungsmittelpunkt)	m
J_A	Trägheitsmoment um die Drehachse	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
m	Masse (des ganzen Pendels)	kg
a	Abstand (Drehachse bis Schwerpunkt)	m

BEISPIEL Wie lang ist das gleichwertige Fadenpendel für die Stange aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $J_\mathrm{A} = 0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$; $m = 0{,}6\,\mathrm{kg}$; $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} l_\mathrm{r} &= \frac{J_\mathrm{A}}{m \cdot a} \\ &= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^2}}{0{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} \\ &\approx 0{,}667\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Stange schwingt wie ein Fadenpendel von 667 mm, also wie ein Pendel von zwei Dritteln ihrer Länge.

Trägheitsmoment um die Aufhängung (Satz von Steiner)

(6.13) MEISTER

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + m \cdot a^2$$

So rechnet man das Trägheitsmoment eines Bauteils von seinem Schwerpunkt auf die Drehachse des Pendels um. Für mehrere Bauteile werden die Anteile addiert.

J_A	Trägheitsmoment um die Drehachse	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$
J_S	Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$
m	Masse (des Bauteils)	kg
a	Abstand (der beiden Achsen)	m

BEISPIEL Eine Linse (Scheibe, Masse 1,2 kg, Radius 60 mm) hängt mit ihrer Mitte 0,9 m unter der Aufhängung. Um ihre eigene Mitte hat sie $J_\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 0{,}002\,16\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Gegeben: $J_\mathrm{S} = 0{,}002\,16\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$; $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$; $a = 0{,}9\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} J_\mathrm{A} &= J_\mathrm{S} + m \cdot a^2 \\ &= 0{,}002\,16\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} + 1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}9\,\mathrm{m})^2 \\ &\approx 0{,}974\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} \end{aligned}$$

Fast das ganze Trägheitsmoment kommt aus dem Abstand zur Aufhängung. Deshalb verhält sich ein Pendel mit schwerer Linse und leichter Stange fast wie ein mathematisches Pendel.

6.4 Ausschlag und Kreisfehler

Die Formeln aus Abschnitt 6.1 gelten genau nur für unendlich kleine Ausschläge. Je weiter das Pendel ausschlägt, desto länger dauert eine Schwingung. Diesen Kreisfehler spürt die Uhr erst, wenn sich der Ausschlag ändert, etwa weil die Antriebskraft nachlässt oder das Öl in der Hemmung altert.

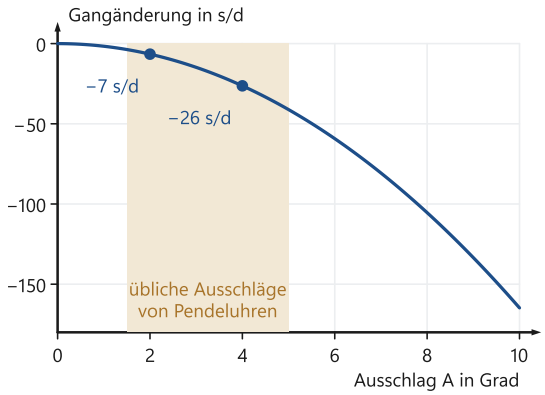


Abb. 6.6 Kreisfehler: Je größer der Ausschlag, desto langsamer schwingt das Pendel (Gang gegenüber sehr kleinem Ausschlag)

Schwingungsdauer bei größerem Ausschlag

(6.14) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$T \approx T_0 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{16}\right)$$

Gilt: Ausschläge bis etwa 20°. A im Bogenmaß einsetzen: Grad mal $\frac{\pi}{180}$.

T	Schwingungsdauer (beim Ausschlag A)	s
T_0	Schwingungsdauer bei sehr kleinem Ausschlag (Formel 6.1)	s
A	Amplitude (Ausschlag des Pendels, im Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Ein Sekundenpendel ($T_0 = 2\,\mathrm{s}$) schwingt mit 4° Ausschlag, das sind 0,0698 rad.

Gegeben: $T_0 = 2\,\mathrm{s}$; $A = 0{,}0698\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} T &\approx T_0 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{16}\right) \\ &= 2\,\mathrm{s} \cdot \left(1 + \frac{(0{,}0698\,\mathrm{rad})^2}{16}\right) \\ &\approx 2{,}0006\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Jede Schwingung dauert 0,6 ms länger; gegenüber einem sehr kleinen Ausschlag verliert die Uhr dadurch rund 26 s am Tag.

Gangänderung, wenn sich der Ausschlag ändert

(6.15) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx -\frac{A_2^2 - A_1^2}{16} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wird der Ausschlag kleiner, wird die Uhr schneller.

Gilt: wie davor.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
A_2	Ausschlag nachher (Bogenmaß)	rad
A_1	Ausschlag vorher (Bogenmaß)	rad

BEISPIEL Der Ausschlag fällt von 2,5° (0,0436 rad) auf 2,0° (0,0349 rad).

Gegeben: $A_2 = 0{,}0349\,\mathrm{rad}$; $A_1 = 0{,}0436\,\mathrm{rad}$

$$\begin{aligned} \Delta G &\approx -\frac{A_2^2 - A_1^2}{16} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{(0{,}0349\,\mathrm{rad})^2 - (0{,}0436\,\mathrm{rad})^2}{16} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 3{,}7\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr gewinnt rund 3,7 s am Tag. Ein gleichmäßiger Antrieb hält den Ausschlag und damit den Gang konstant; das ist ein Grund, warum Präzisionspendeluhren mit Gewicht laufen.

6.5 Temperatur und Aufstellort

Wärme dehnt die Pendelstange, die Uhr geht nach. Und weil die Fallbeschleunigung nicht überall gleich ist, muss eine Pendeluhr nach einem Umzug neu reguliert werden.

Gangänderung durch Temperatur

(6.16) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\frac{\alpha \cdot \Delta\vartheta}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wärmer heißt länger, länger heißt langsamer.

Gilt: Pendel ohne Temperaturausgleich; Ausdehnung von Linse und Aufhängung vernachlässigt.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
α	Längenausdehnungskoeffizient (der Pendelstange)	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung	K

BEISPIEL Eine Pendeluhr mit Stahlstange ($\alpha = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$) steht im Sommer 10 K wärmer als im Winter.

Gegeben: $\alpha = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\frac{\alpha \cdot \Delta\vartheta}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{11{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 10\,\mathrm{K}}{2} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -4{,}97\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird im Sommer um rund 5 s am Tag langsamer. Mit einer Holzstange schrumpft der Fehler auf rund ein Drittel, mit einer Invarstange auf rund ein Zehntel bis ein Sechstel.

Längenausdehnungskoeffizienten für Pendelstangen (Richtwerte bei 20 °C)

Werkstoff	α in $10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$
Zink	30
Aluminium	23
Messing	18 … 21
Stahl, unlegiert	11 … 13
Holz (Fichte, längs zur Faser)	3 … 5
Invar (FeNi36)	1,2 … 2
Quarzglas	0,5

Die Werte schwanken mit Legierung, Wärmebehandlung und beim Holz mit der Feuchte.

Temperaturausgleich mit zwei Werkstoffen

(6.17) VERTIEFUNG

$$\alpha_1 \cdot l_1 = \alpha_2 \cdot l_2$$

UMGESTELLT $$l_2 = \frac{\alpha_1 \cdot l_1}{\alpha_2}$$

Beim Rostpendel und beim Zink-Stahl-Pendel hebt ein Werkstoff mit großer Ausdehnung die Linse um so viel an, wie der Stahl sie absenkt.

Gilt: vereinfacht, nur die Stangen. Die Ausdehnung der Linse und die Lage des Schwingungsmittelpunkts verschieben das Ergebnis etwas; deshalb wird nach dem Bau feinjustiert.

α_1	Längenausdehnungskoeffizient der nach unten wirkenden Teile (Stahl)	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
l_1	Gesamtlänge der nach unten wirkenden Teile	m
α_2	Längenausdehnungskoeffizient der nach oben wirkenden Teile (Zink, Messing)	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
l_2	Gesamtlänge der nach oben wirkenden Teile	m

BEISPIEL Ein Zink-Stahl-Pendel hat insgesamt 1,2 m Stahl ($\alpha_1 = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$), der sich nach unten ausdehnt. Wie lang muss das Zinkrohr ($\alpha_2 = 30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$) sein?

Gegeben: $\alpha_1 = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$; $l_1 = 1{,}2\,\mathrm{m}$; $\alpha_2 = 30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{\alpha_1 \cdot l_1}{\alpha_2} \\ &= \frac{11{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}}{30 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}} \\ &\approx 0{,}46\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Zinkrohr muss rund 46 cm lang sein.

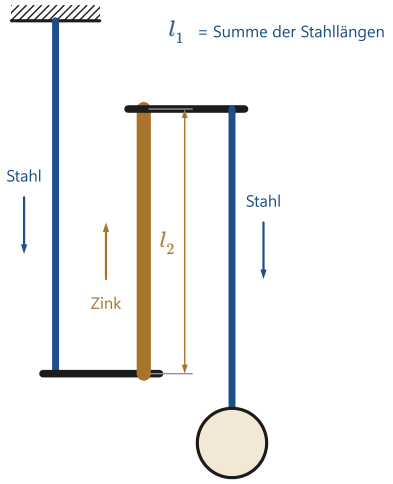


Abb. 6.7 Zink-Stahl-Pendel, zur Verdeutlichung auseinandergezogen: Stahl senkt die Linse, Zink hebt sie

Gangänderung durch einen anderen Aufstellort

(6.18) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\Delta G \approx \frac{\Delta g}{2 \cdot g} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Wo die Fallbeschleunigung größer ist, schwingt das Pendel schneller.

ΔG	Gangänderung (+ heißt: Uhr wird schneller)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δg	Änderung der Fallbeschleunigung (neuer Ort minus alter Ort)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
g	Fallbeschleunigung am alten Ort	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

BEISPIEL Eine in Hamburg ($g = 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) regulierte Standuhr kommt nach München ($g = 9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), also $\Delta g = -0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Gegeben: $\Delta g = -0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $g = 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx \frac{\Delta g}{2 \cdot g} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{-0{,}0064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -28{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

In München geht die Uhr rund 28 s am Tag nach und muss dort neu reguliert werden.

Fallbeschleunigung nach Breite und Höhe

(6.19) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$g \approx 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\varphi - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot \varphi\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot h$$

Die Formel liefert die Normalschwere einer idealen Erde. Der Untergrund weicht davon örtlich um bis zu etwa $0{,}0005\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ab, im Hochgebirge auch mehr; für das Regulieren einer Uhr reicht das.

Gilt: Internationale Schwereformel von 1980 mit Höhenkorrektur für die freie Luft.

g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
φ	geographische Breite	$^\circ$
h	Höhe (über dem Meeresspiegel)	m

BEISPIEL Fallbeschleunigung in München: Breite 48,14°, Höhe 520 m.

Gegeben: $\varphi = 48{,}14^\circ$; $h = 520\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}g &\approx 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\varphi - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot \varphi\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot h \\ &= 9{,}780\,327\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(1 + 0{,}005\,302\,4 \cdot \sin^2\left(48{,}14^\circ\right) - 5{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\left(2 \cdot 48{,}14^\circ\right)\right) - 3{,}086 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 520\,\mathrm{m} \\ &\approx 9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Rund $9{,}8074\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; Hamburg auf Meereshöhe hat $9{,}8138\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

7 Hemmungen

Die Hemmung sitzt zwischen Räderwerk und Gangregler. Sie hält das Räderwerk an, gibt es im Takt von Unruh oder Pendel Zahn für Zahn frei und führt dem Gangregler dabei die Energie zu, die er durch Reibung verliert. Die Hemmung zählt also die Schwingungen. Wie genau die Uhr geht, hängt auch davon ab, wie wenig sie den Gangregler dabei stört.

Das Kapitel beginnt mit den Größen, die für alle Hemmungen gelten. Es folgen die Geometrie der Schweizer Ankerhemmung, die Energiebilanz, die Geräusche der Hemmung, die eine Zeitwaage auswertet, und die Hemmungen der Großuhr.

7.1 Grundgrößen aller Hemmungen

Jede Hemmung gibt das Räderwerk in gleichen Schritten frei und treibt dabei den Gangregler an. Die Begriffe dafür sind bei allen Bauarten dieselben. Die Winkel heißen in diesem Kapitel einheitlich γ am Hemmungsrad, β am Anker, λ und A an der Unruh. Das Hemmungsrad heißt bei der Ankerhemmung auch Ankerrad, in älteren Büchern Gangrad.

Begriffe der Hemmung

Begriff	Bedeutung	Winkel
Ruhe	Ein Zahn liegt auf der Ruhefläche, das Rad steht. Gemessen als Weg des Ankers bis zum Beginn der Hebung.	β_R am Anker
Auslösung	Der Gangregler schiebt die Palette aus der Ruhe und gibt den Zahn frei.	Teil von λ
Hebung	Der Zahn gleitet über die Hebefläche und treibt über den Anker den Gangregler an.	γ_H am Rad, β_H am Anker
Fall	Das Rad dreht frei, bis der nächste Zahn auf seine Ruhefläche trifft.	γ_F am Rad
Zug	Neigung der Ruhefläche, durch die das Rad den Anker an die Begrenzung zieht.	ψ an der Palette
Verlorener Weg	Weg des Ankers nach dem Fall bis zur Begrenzung; Sicherheit für die Ruhe.	β_V am Anker
Hebungswinkel	Weg der Unruh, solange der Hebelstein in der Gabel ist.	λ an der Unruh
Ergänzungsbogen	Weg des Gangreglers außerhalb der Hebung, bis zum Umkehrpunkt.	φ_E an Unruh oder Pendel

Die Unruh braucht ihren Hebungswinkel für Auslösung und Antrieb zusammen.

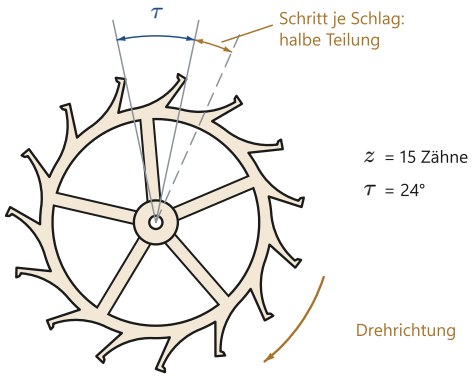


Abb. 7.1 Teilung τ des Hemmungsrads; bei jedem Schlag rückt das Rad um die halbe Teilung weiter

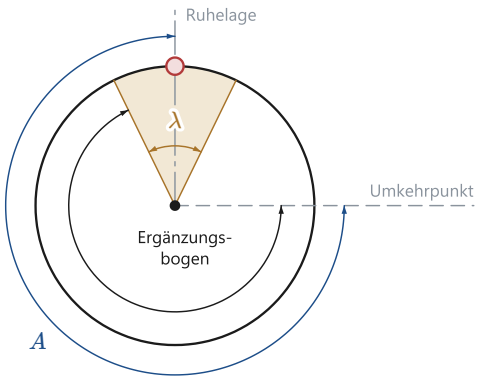


Abb. 7.2 Weg des Hebelsteins von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt: Amplitude A, Hebungswinkel λ und Ergänzungsbogen

Teilung des Hemmungsrads

(7.1) GESELLE

$$\tau = \frac{360^\circ}{z}$$

τ	Teilung (des Hemmungsrads; Winkel von Zahn zu Zahn)	°
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1

Die Teilung ist der Winkel von Zahn zu Zahn. Bei jedem Schlag rückt das Rad um die halbe Teilung weiter, denn jeder Zahn arbeitet nacheinander an beiden Paletten.

Gilt: Anker-, Zylinder-, Graham- und Hakenhemmung. Bei der Chronometerhemmung rückt das Rad nur bei jedem zweiten Schlag weiter, dann um die ganze Teilung.

BEISPIEL Wie groß ist die Teilung eines Hemmungsrads mit 15 Zähnen?

Gegeben: $z = 15$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{360^\circ}{z} \\ &= \frac{360^\circ}{15} \\ &= 24^\circ\end{aligned}$$

Die Teilung beträgt 24°, der Schritt je Schlag also 12°.

Schlagzahl und Drehzahl des Hemmungsrads

(7.2) GESELLE

$$n_\mathrm{h} = 2 \cdot z \cdot n_\mathrm{H}$$

UMGESTELLT $\quad n_\mathrm{H} = \dfrac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z}$

n_h	Schlagzahl (Halbschwingungen je Zeit)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1
n_H	Drehzahl des Hemmungsrads	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

Bei einer Umdrehung des Hemmungsrads geht jeder Zahn einmal durch und lässt zwei Schläge zu. Die Formel verbindet Räderwerk und Gangregler: Aus Schlagzahl und Zähnezahl folgt, wie schnell das Hemmungsrad drehen muss (Kapitel 4). Dieselbe Rechnung steht mit den Zähnezahlen des Räderwerks in Abschnitt 4.2.

Gilt: alle Hemmungen, bei denen je Schwingung ein Zahn durchgeht, auch Zylinder- und Chronometerhemmung.

> **Gut zu wissen:** Mit Sekundenpendel und 30 Zähnen dreht das Hemmungsrad genau einmal in der Minute. Darum kann seine Welle den Sekundenzeiger tragen.

BEISPIEL Ein Pendelwerk macht 4800 Schläge je Stunde, das sind 80 je Minute. Das Hemmungsrad hat 32 Zähne. Wie schnell dreht es?

Gegeben: $n_\mathrm{h} = 4800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $\quad z = 32$

$$\begin{aligned}n_\mathrm{H} &= \frac{n_\mathrm{h}}{2 \cdot z} \\ &= \frac{4800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{2 \cdot 32} \\ &= \frac{80\ \frac{1}{\mathrm{min}}}{2 \cdot 32} \\ &\approx 1{,}25\ \frac{1}{\mathrm{min}}\end{aligned}$$

Das Hemmungsrad dreht 1,25-mal in der Minute, eine Umdrehung dauert also 48 s. Für die Kleinuhr steht ein Beispiel bei Formel (4.8).

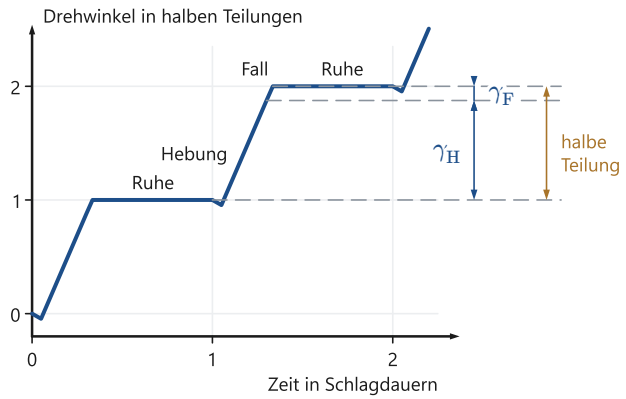


Abb. 7.3 Weg des Hemmungsrads in zwei Schlägen: Hebung γ_H und Fall γ_F ergeben die halbe Teilung. Die kleine Senke vor jeder Hebung ist der Rückfall beim Auslösen einer Hemmung mit Zug. Die Zeitachse ist nicht maßstäblich: In der Kleinuhr dauern Hebung und Fall nur wenige Hundertstel der Schlagdauer

Hebung und Fall am Rad

(7.3) MEISTER

$$\gamma_H + \gamma_F = \frac{180^\circ}{z}$$

UMGESTELLT $$\gamma_F = \frac{180^\circ}{z} - \gamma_H$$

γ_H	Hebung am Rad (Drehwinkel des Rades zwischen zwei Fällen)	°
γ_F	Fall (freier Drehwinkel des Rades)	°
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1

Der Schritt des Rades besteht aus zwei Stücken. In der Hebung treibt der Zahn die Palette an, im Fall dreht das Rad frei, bis der nächste Zahn auf seine Ruhefläche trifft. Der Fall ist nötige Sicherheit, aber verlorene Energie.

Gilt: γ_H zählt den ganzen Weg des Rades zwischen zwei Fällen. Bei Hemmungen mit Zug dreht das Rad beim Auslösen einen Bruchteil eines Grades zurück und läuft ihn gleich wieder vor; dieser Rückfall hebt sich in der Summe auf.

BEISPIEL An einem Hemmungsrad mit 15 Zähnen dreht das Rad während der Hebung um 10,5°. Wie groß ist der Fall?

Gegeben: $z = 15$; $\gamma_H = 10{,}5^\circ$

$$\begin{aligned}\gamma_F &= \frac{180^\circ}{z} - \gamma_H \\ &= \frac{180^\circ}{15} - 10{,}5^\circ \\ &= 1{,}5^\circ\end{aligned}$$

Für den Fall bleiben 1,5°, ein üblicher Wert für die Schweizer Ankerhemmung.

Fall als Weg der Zahnspitze

(7.4) MEISTER

$$s_{\mathrm{F}} = R \cdot \gamma_{\mathrm{F}}$$

Unter der Lupe zeigt sich der Fall als kleiner Weg der Zahnspitze. Die Formel rechnet den Fallwinkel in diesen Weg um und macht deutlich, mit wie wenig Luft die Hemmung arbeitet.

Gilt: Winkel im Bogenmaß: $1^\circ = 0{,}01745\,\mathrm{rad}$.

s_{F}	Fall als Weg (am Umfang des Rades)	mm
R	Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten)	mm
γ_{F}	Fall (als Winkel im Bogenmaß einsetzen)	rad

BEISPIEL Ein Hemmungsrad hat 2,40 mm Radius, der Fall beträgt 1,5°. Wie weit fällt die Zahnspitze?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma_{\mathrm{F}} = 1{,}5^\circ$

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{F}} &= R \cdot \gamma_{\mathrm{F}} \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot 1{,}5^\circ \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}02618 \\ &\approx 0{,}063\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Zahnspitze fällt 0,063 mm frei. Das ist etwa die Dicke eines Haares.

Ergänzungsbogen der Unruh

(7.5) MEISTER

$$\varphi_{\mathrm{E}} = A - \frac{\lambda}{2}$$

Außerhalb des Hebungswinkels schwingt die Unruh frei, ohne Berührung mit dem Anker. Diesen Ergänzungsbogen durchläuft sie in jeder Halbschwingung zweimal: absteigend bis zur Hebung und nach der Hebung aufsteigend bis zum Umkehrpunkt.

Gilt: freie Hemmungen (Anker- und Chronometerhemmung); Hebungswinkel symmetrisch zur Ruhelage, also richtig eingestellter Abfall.

φ_{E}	Ergänzungsbogen (vom Ende der Hebung bis zum Umkehrpunkt)	°
A	Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt)	°
λ	Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen)	°

BEISPIEL Eine Unruh schwingt mit 270° Amplitude, der Hebungswinkel beträgt 52°. Wie groß ist der Ergänzungsbogen?

Gegeben: $A = 270^\circ$; $\lambda = 52^\circ$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{E}} &= A - \frac{\lambda}{2} \\ &= 270^\circ - \frac{52^\circ}{2} \\ &= 244^\circ \end{aligned}$$

Auf jeder Seite schwingt die Unruh 244° frei. Von den 540° einer Halbschwingung entfallen nur 52° auf die Hebung; auf rund 90 % ihres Weges ist die Unruh ungestört.

Merksatz: Je Schlag rückt das Hemmungsrad um die halbe Teilung weiter: erst die Hebung, dann der Fall.

7.2 Schweizer Ankerhemmung: Geometrie

Die Schweizer Ankerhemmung arbeitet in fast allen mechanischen Armband- und Taschenuhren. Ihr Anker umspannt 2,5 Teilungen des Rades. Der Ankerdrehpunkt liegt im Schnittpunkt der beiden Tangenten, die den Radkreis in den Berührpunkten berühren. So wirkt der Druck des Zahns in der Ruhe längs des Ankerarms und dreht den Anker nicht. Erst der Zug gibt der Ruhefläche eine kleine Neigung.

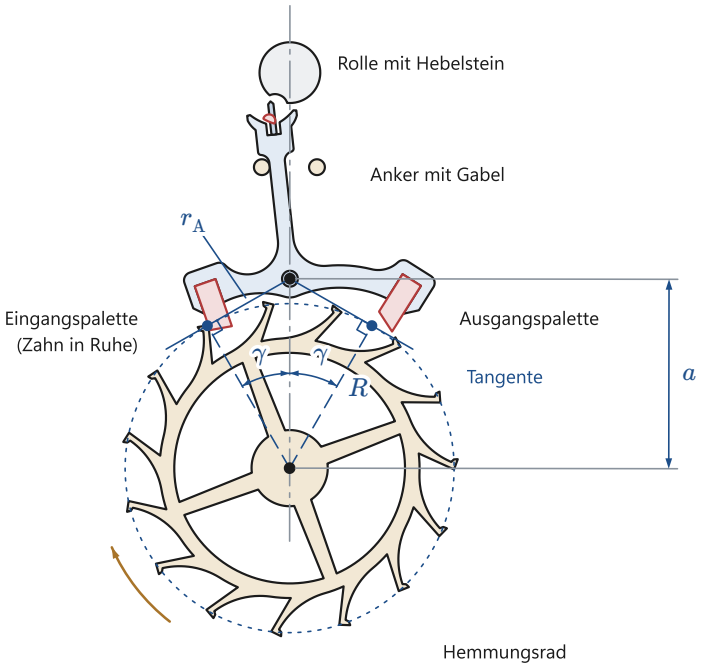


Abb. 7.4 Schweizer Ankerhemmung nach dem Modell, Zahn in Ruhe auf der Eingangspalette: Der Ankerdrehpunkt liegt im Schnittpunkt der Tangenten; bei 15 Zähnen ist $\gamma = 30^\circ$

Umspannung des Ankers

(7.6) MEISTER

$$\gamma = \frac{k \cdot 180^\circ}{z}$$

Der Anker greift über k Teilungen des Rades. Weil immer eine Palette im Rad steht, wenn die andere frei ist, endet die Umspannung auf einer halben Teilung: 2,5 Teilungen in der Kleinuhr, 6,5 bis 10,5 in Pendeluhren. Gerechnet wird mit dem halben Umspannungswinkel γ.

γ	halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen)	°
k	Umspannung in Teilungen (2,5 bei der Schweizer Ankerhemmung)	1
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1

Gilt: Berührpunkte symmetrisch zur Verbindungslinie von Rad- und Ankerachse.

BEISPIEL Wie groß ist der halbe Umspannungswinkel bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen Umspannung?

Gegeben: $k = 2{,}5; \quad z = 15$

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{k \cdot 180^\circ}{z} \\ &= \frac{2{,}5 \cdot 180^\circ}{15} \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

Der Anker umspannt 60°, auf jeder Seite der Mittellinie 30°.

Achsabstand von Rad und Anker

(7.7) MEISTER

$$a = \frac{R}{\cos \gamma}$$

a	Achsabstand (von Hemmungsrad und Anker)	mm
R	Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten)	mm
γ	halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen)	°

Radachse, Berührpunkt und Ankerachse bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Berührpunkt. Je größer die Umspannung, desto weiter rückt der Anker vom Rad weg.

Gilt: tangentialer Eingriff: Die Linie vom Ankerdrehpunkt zum Berührpunkt ist Tangente an den Radkreis. R reicht bis zu den Punkten, auf die konstruiert wird, je nach Bauart die Ruhekanten oder die Mitten der Hebeflächen.

BEISPIEL Ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen hat 2,40 mm Radius, der Anker umspannt 2,5 Teilungen. Wie groß ist der Achsabstand?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} a &= \frac{R}{\cos \gamma} \\ &= \frac{2{,}40\,\mathrm{mm}}{\cos\left(30^\circ\right)} \\ &\approx 2{,}77\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Achsen liegen 2,77 mm auseinander. Bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen gilt immer $a = 1{,}155 \cdot R$.

Länge des Ankerarms

(7.8) VERTIEFUNG

$$r_\mathrm{A} = R \cdot \tan \gamma$$

r_A	Ankerarm (vom Ankerdrehpunkt bis zum Berührpunkt)	mm
R	Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten)	mm
γ	halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen)	°

Der Ankerarm ist das Tangentenstück vom Ankerdrehpunkt bis zum Berührpunkt. Mit ihm wird aus einem Winkel des Ankers der Weg der Palette.

Gilt: tangentialer Eingriff wie beim Achsabstand.

BEISPIEL Wie lang ist der Ankerarm zum Rad mit 2,40 mm Radius und 30° halbem Umspannungswinkel?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}$; $\gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} r_\mathrm{A} &= R \cdot \tan \gamma \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \tan\left(30^\circ\right) \\ &\approx 1{,}39\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Ankerarm misst 1,39 mm. Eine Ruhe von 1,5° am Anker ist daran ein Weg der Palette von nur 0,036 mm.

Abstand der Berührpunkte

(7.9) VERTIEFUNG

$$l_\mathrm{P} = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$$

Die Sehne zwischen den Berührpunkten ist die Weite, mit der der Anker das Rad fasst. An ihr lässt sich prüfen, ob ein Anker zum Rad passt.

Gilt: Berührpunkte auf dem Radkreis mit Radius R, symmetrisch zur Mittellinie.

l_P	Abstand der beiden Berührpunkte (Sehne im Radkreis)	mm
R	Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Berührpunkten)	mm
γ	halber Umspannungswinkel (an der Radachse gemessen)	°

BEISPIEL Wie weit liegen die Berührpunkte bei 2,40 mm Radradius und 30° halbem Umspannungswinkel auseinander?

Gegeben: $R = 2{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \gamma = 30^\circ$

$$\begin{aligned} l_\mathrm{P} &= 2 \cdot R \cdot \sin\gamma \\ &= 2 \cdot 2{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin(30^\circ) \\ &= 2{,}40\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Abstand ist gleich dem Radradius: Bei 60° Umspannung bilden die Radachse und die beiden Berührpunkte ein gleichseitiges Dreieck.

Merksatz: Bei 15 Zähnen und 2,5 Teilungen Umspannung ist der Achsabstand das 1,155-Fache des Radradius, und die Berührpunkte liegen genau einen Radradius auseinander.

Winkel der Schweizer Ankerhemmung mit 15 Zähnen (Richtwerte)

Größe	Zeichen	Richtwert
Teilung des Rades	τ	24°
Umspannung des Ankers	2γ	2,5 Teilungen = 60°
Fall	γ_F	1° … 1,5°
Hebung am Rad	γ_H	10,5° … 11°
Ruhe am Anker	β_R	1,5°
Verlorener Weg	β_V	0,25° … 0,5°
Hebung am Anker	β_H	8,5°
Zugwinkel	ψ	12° … 15°
Hebungswinkel der Unruh	λ	meist 49° … 53°; ältere Armbanduhr- und Taschenuhrwerke häufig kleiner, etwa 38° … 46°

Die Hebung am Anker verteilt sich beim Kolbenzahn auf die Hebefläche der Palette und die des Zahns. Maßgeblich sind immer die Angaben des Herstellers, beim Hebungswinkel auch für die Zeitwaage (Abschnitt 8.2).

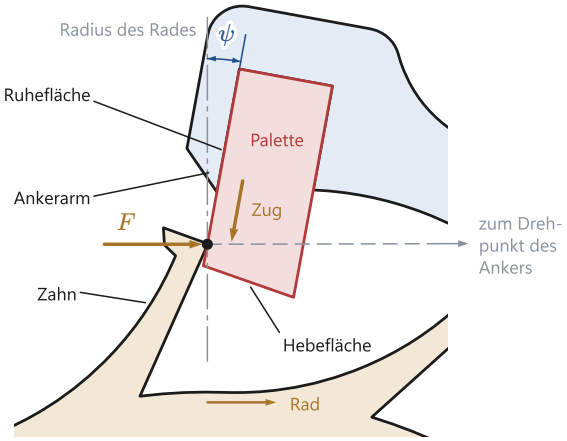


Abb. 7.5 Eingangspalette in der Ruhe: Die Ruhefläche ist um den Zugwinkel ψ gegen den Radius des Rades geneigt, der Druck F des Zahns zieht die Palette ins Rad

Zug: Reibungswinkel als Grenze

(7.10) MEISTER

$$\rho = \arctan \mu$$

ρ	Reibungswinkel (der Zugwinkel muss größer sein)	°
μ	Reibungszahl (zwischen Zahn und Ruhefläche)	1

Die Ruhefläche ist um den Zugwinkel ψ geneigt. Dadurch zieht der Druck des Zahns die Palette tiefer ins Rad und hält den Anker an der Begrenzung, auch bei Stößen. Das gelingt nur, wenn ψ größer ist als der Reibungswinkel ρ. Sonst hält die Reibung die Palette dort fest, wo sie gerade steht. Allgemein steht der Reibungswinkel in Formel (2.33).

Gilt: tangentialer Eingriff; ψ gemessen zwischen Ruhefläche und Radius des Rades im Berührpunkt.

Aber Vorsicht: Zu viel Zug kostet Amplitude: Beim Auslösen muss die Unruh das Rad gegen sein Drehmoment ein Stück zurückdrehen.

BEISPIEL Stahl auf geöltem Rubin hat eine Reibungszahl um 0,15. Wie groß ist der Reibungswinkel?

Gegeben: $\mu = 0{,}15$

$$\begin{aligned}\rho &= \arctan \mu \\ &= \arctan 0{,}15 \\ &\approx 8{,}5^\circ\end{aligned}$$

Der Reibungswinkel beträgt 8,5°. Mit den üblichen 12° bis 15° Zug bleibt Reserve, auch wenn das Öl altert.

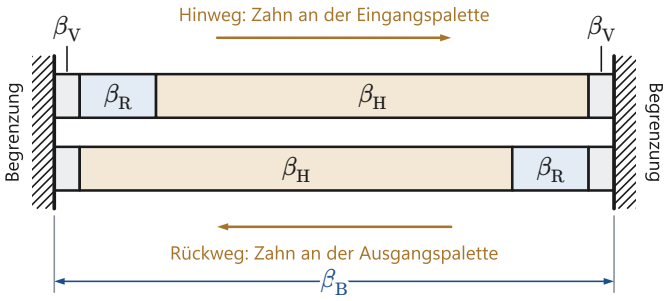


Abb. 7.6 Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen, gezeichnet für $\beta_V = 0{,}5^\circ$, $\beta_R = 1{,}5^\circ$ und $\beta_H = 8{,}5^\circ$

Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen

(7.11) MEISTER

$$\beta_B = \beta_R + \beta_H + 2 \cdot \beta_V$$

β_B	Weg des Ankers von Begrenzung zu Begrenzung	°
β_R	Ruhe (unmittelbar nach dem Fall)	°
β_H	Hebung am Anker	°
β_V	verlorener Weg	°

Von der Begrenzung aus legt der Anker erst die ganze Ruhe zurück, dann die Hebung. Nach dem Fall zieht ihn der Zug noch um den verlorenen Weg an die andere Begrenzung. Der verlorene Weg sorgt dafür, dass der Zahn sicher auf der Ruhefläche landet; er zählt auf beiden Seiten.

Gilt: Die Gesamtruhe vor dem Auslösen ist $\beta_R + \beta_V$. Beide Paletten gleich eingestellt.

BEISPIEL Ein Anker hat 1,5° Ruhe, 8,5° Hebung und 0,5° verlorenen Weg. Wie weit dreht er von Begrenzung zu Begrenzung?

Gegeben: $\beta_R = 1{,}5°$; $\beta_H = 8{,}5°$; $\beta_V = 0{,}5°$

$$\begin{aligned}\beta_B &= \beta_R + \beta_H + 2 \cdot \beta_V \\ &= 1{,}5° + 8{,}5° + 2 \cdot 0{,}5° \\ &= 11°\end{aligned}$$

Der Anker dreht um 11°. Ohne verlorenen Weg wären es die oft genannten 10°.

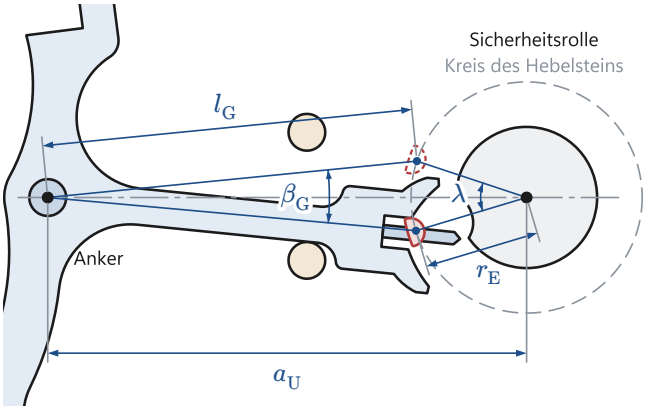


Abb. 7.7 Gabel, Sicherheitsrolle und Hebelstein nach dem Modell ($\beta_G \approx 11^\circ$, $\lambda \approx 35^\circ$): Hebelstein beim Eintritt (voll) und beim Austritt (gestrichelt)

Gabel und Hebelstein: Längen und Winkel

(7.12) MEISTER

$$l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right) = r_{\mathrm{E}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

UMGESTELLT $$r_{\mathrm{E}} = \frac{l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

Beim Eintritt und beim Austritt liegt der Hebelstein zugleich auf seinem Kreis um die Unruhachse und im Einschnitt der Gabel. Sein Abstand von der Mittellinie ist von beiden Achsen aus gesehen derselbe; das sagt die Gleichung. Eine lange Gabel und ein kleiner Hebelsteinradius geben einen großen Hebungswinkel der Unruh.

Gilt: Hebelstein als Punkt auf der Mittellinie des Gabeleinschnitts; Breite des Steins und Luft in der Gabel vernachlässigt. Dann ist β_{G} gleich dem Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen.

l_{G}	Gabellänge (Ankerachse bis Hebelstein beim Eintritt)	mm
β_{G}	Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°)	°
r_{E}	Radius des Hebelsteins um die Unruhachse	mm
λ	Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen)	°

BEISPIEL Eine Gabel ist 2,89 mm lang. Der Anker dreht 10°, während der Hebelstein in der Gabel ist; die Unruh soll 52° Hebungswinkel haben. Auf welchem Radius muss der Hebelstein sitzen?

Gegeben: $l_{\mathrm{G}} = 2{,}89\,\mathrm{mm}$; $\beta_{\mathrm{G}} = 10°$; $\lambda = 52°$

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{l_{\mathrm{G}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

$$= \frac{2{,}89\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{10°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52°}{2}\right)}$$

$$\approx 0{,}575\,\mathrm{mm}$$

Der Hebelstein sitzt 0,575 mm von der Unruhachse entfernt. Die Gabel ist rund fünfmal so lang wie dieser Radius.

Hebelsteinradius aus dem Achsabstand

(7.13) VERTIEFUNG

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}$$

r_{E}	Radius des Hebelsteins um die Unruhachse	mm
a_{U}	Achsabstand von Anker und Unruh	mm
β_{G}	Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°)	°
λ	Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen)	°

Beim Entwurf sind Achsabstand und Winkel gegeben. Der Sinussatz im Dreieck aus Ankerachse, Unruhachse und Hebelstein liefert den Radius, auf dem der Hebelstein sitzen muss.

Gilt: wie oben: Hebelstein als Punkt, ohne Luft in der Gabel.

BEISPIEL Anker und Unruh stehen 3,40 mm auseinander. Der Anker dreht 10°, die Unruh soll 52° Hebungswinkel haben. Wie groß ist der Hebelsteinradius?

Gegeben: $a_{\mathrm{U}} = 3{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \beta_{\mathrm{G}} = 10°; \quad \lambda = 52°$

$$r_{\mathrm{E}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)} = \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{10°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52° + 10°}{2}\right)} \approx 0{,}575\,\mathrm{mm}$$

Der Hebelstein sitzt auf einem Radius von 0,575 mm.

Gabellänge aus dem Achsabstand

(7.14) VERTIEFUNG

$$l_{\mathrm{G}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)}$$

l_{G}	Gabellänge (Ankerachse bis Hebelstein beim Eintritt)	mm
a_{U}	Achsabstand von Anker und Unruh	mm
λ	Hebungswinkel (der Unruh; Auslösung und Antrieb zusammen)	°
β_{G}	Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist (rund 10°)	°

Dasselbe Dreieck liefert die Gabellänge. Gabellänge und Hebelsteinradius ergeben zusammen etwas mehr als den Achsabstand, weil beide beim Eintritt schräg zur Mittellinie stehen.

Gilt: wie oben: Hebelstein als Punkt, ohne Luft in der Gabel.

BEISPIEL Wie lang muss die Gabel bei 3,40 mm Achsabstand, 10° Ankerwinkel und 52° Hebungswinkel sein?

Gegeben: $a_{\mathrm{U}} = 3{,}40\,\mathrm{mm}; \quad \lambda = 52°; \quad \beta_{\mathrm{G}} = 10°$

$$l_{\mathrm{G}} = \frac{a_{\mathrm{U}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \beta_{\mathrm{G}}}{2}\right)} = \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{52°}{2}\right)}{\sin\left(\frac{52° + 10°}{2}\right)} \approx 2{,}89\,\mathrm{mm}$$

Die Gabel wird 2,89 mm lang. Probe über die Mittellinie: $2{,}89 \cdot \cos 5^\circ + 0{,}575 \cdot \cos 26^\circ = 3{,}40$.

Übersetzung zwischen Gabel und Unruh

(7.15) VERTIEFUNG

$$i_\mathrm{G} = \frac{a_\mathrm{U} - r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}}$$

In der Mittellage berührt die Gabel den Hebelstein auf der Verbindungslinie der Achsen. Dort dreht die Unruh i_G-mal so schnell wie der Anker, und an der Unruh kommt ohne Reibung der i_G-te Teil des Ankermoments an. Über die ganze Hebung gemittelt ist die Übersetzung $\frac{\lambda}{\beta_\mathrm{G}}$.

Gilt: Mittellage; beim Eintritt und beim Austritt ist die Übersetzung größer.

i_G	Übersetzung in der Mittellage (Winkelgeschwindigkeit der Unruh durch die des Ankers)	1
a_U	Achsabstand von Anker und Unruh	mm
r_E	Radius des Hebelsteins um die Unruhachse	mm

BEISPIEL Wie groß ist die Übersetzung bei 3,40 mm Achsabstand und 0,575 mm Hebelsteinradius?

Gegeben: $a_\mathrm{U} = 3{,}40\,\mathrm{mm}$; $r_\mathrm{E} = 0{,}575\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} i_\mathrm{G} &= \frac{a_\mathrm{U} - r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}} \\ &= \frac{3{,}40\,\mathrm{mm} - 0{,}575\,\mathrm{mm}}{0{,}575\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 4{,}91 \end{aligned}$$

In der Mittellage beträgt die Übersetzung 4,91, im Mittel über die Hebung 52° zu 10°, also 5,2.

7.3 Kraft und Energie

Bei jedem Schlag gibt das Hemmungsrad Arbeit ab. Nur ein Teil davon erreicht die Unruh; der Rest geht im Fall, in der Reibung an den Hebeflächen und in den Stößen verloren. Auch das Auslösen kostet Energie: Die Unruh muss die Palette gegen Reibung und Zug aus dem Rad ziehen.

Im Beharrungszustand führt die Hemmung der Unruh in jeder Schwingung genau so viel Energie zu, wie diese durch Reibung verliert. Daraus ergibt sich die Amplitude. Wie in Kapitel 4 ist M_H das Drehmoment am Hemmungsrad.

Arbeit des Hemmungsrads je Schlag

(7.16) MEISTER

$$W_\mathrm{S} = \frac{M_\mathrm{H} \cdot \pi}{z}$$

Arbeit ist Drehmoment mal Drehwinkel. Je Schlag dreht das Rad um die halbe Teilung, im Bogenmaß $\frac{\pi}{z}$. Mehr als diese Arbeit kann die Hemmung bei keinem Schlag weitergeben.

Gilt: Drehmoment während des Schritts gleichbleibend. M_H ist das Moment, das nach den Verlusten des Räderwerks am Hemmungsrad ankommt (Kapitel 4).

W_S	Arbeit des Hemmungsrads je Schlag	$\mu\mathrm{J}$
M_H	Drehmoment am Hemmungsrad	$\mu\mathrm{N{\cdot}m}$
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1

BEISPIEL Am Hemmungsrad mit 20 Zähnen kommen 1,6 µN·m an. Welche Arbeit gibt das Rad je Schlag ab?

Gegeben: $M_\mathrm{H} = 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $z = 20$

$$\begin{aligned} W_\mathrm{S} &= \frac{M_\mathrm{H} \cdot \pi}{z} \\ &= \frac{1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot \pi}{20} \\ &\approx 0{,}251\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Je Schlag stehen 0,25 µJ bereit. Bei 8 Schlägen in der Sekunde sind das 2 µW. In dieser Größenordnung liegt die Leistung am Hemmungsrad einer Armbanduhr.

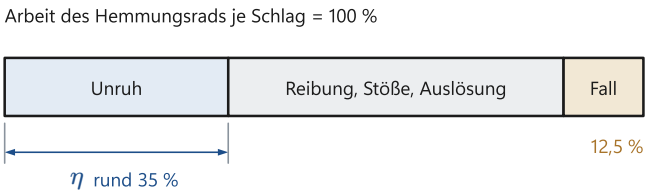


Abb. 7.8 Wohin die Arbeit des Hemmungsrads geht (Richtwerte für die Schweizer Ankerhemmung)

Verlust durch den Fall

(7.17) MEISTER

$$v_\mathrm{F} = \frac{\gamma_\mathrm{F} \cdot z}{180^\circ}$$

Im Fall dreht das Rad, ohne anzutreiben. Der Anteil des Falls an der halben Teilung ist deshalb der Anteil der Radarbeit, der im Schlag auf die Ruhefläche verpufft.

Gilt: gleichbleibendes Drehmoment am Rad.

v_F	Anteil der Radarbeit, der im Fall verloren geht	%
γ_F	Fall (freier Drehwinkel des Rades)	°
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1

BEISPIEL Welcher Teil der Radarbeit geht beim Rad aus Abschnitt 7.1 (15 Zähne, 1,5° Fall) verloren?

Gegeben: $\gamma_\mathrm{F} = 1{,}5^\circ$; $z = 15$

$$\begin{aligned} v_\mathrm{F} &= \frac{\gamma_\mathrm{F} \cdot z}{180^\circ} \\ &= \frac{1{,}5^\circ \cdot 15}{180^\circ} \\ &= 12{,}5\,\% \end{aligned}$$

Ein Achtel der Arbeit geht allein durch den Fall verloren. Darum wird der Fall so klein gehalten, wie es die Sicherheit erlaubt. Am Rad mit 20 Zähnen aus dem Beispiel davor wären es bei gleichem Fall schon 16,7 %.

Wirkungsgrad der Hemmung

(7.18) MEISTER

$$\eta = \frac{W_\mathrm{U}}{W_\mathrm{S}}$$

Der Wirkungsgrad sagt, welcher Teil der Radarbeit bei der Unruh ankommt. Bei der Schweizer Ankerhemmung sind es im Betrieb rund 30 % bis 40 % (Richtwert). Der Rest geht durch den Fall, die Gleitreibung an den Hebeflächen, die Stöße und das Beschleunigen von Rad und Anker verloren.

Gilt: Beharrungszustand, also gleichbleibende Amplitude.

η	Wirkungsgrad (der Hemmung)	1
W_U	Arbeit, die der Unruh je Schlag zugeführt wird (Antrieb abzüglich Auslösung)	µJ
W_S	Arbeit des Hemmungsrads je Schlag	µJ

BEISPIEL Das Hemmungsrad gibt je Schlag 0,251 µJ ab, bei der Unruh kommen 0,088 µJ an. Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Gegeben: $W_\mathrm{U} = 0{,}088\,\mu\mathrm{J}$; $W_\mathrm{S} = 0{,}251\,\mu\mathrm{J}$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_\mathrm{U}}{W_\mathrm{S}} \\ &= \frac{0{,}088\,\mu\mathrm{J}}{0{,}251\,\mu\mathrm{J}} \\ &\approx 0{,}35 \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad beträgt 0,35, also 35 %. Das ist ein üblicher Wert.

Amplitude aus der Energiebilanz

(7.19) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$A \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot M_{\mathrm{H}} \cdot Q}{z \cdot D}}$$

Im Beharrungszustand ist die Energie, die zwei Schläge der Unruh zuführen, gleich ihrem Verlust in einer Schwingung. Dieser Verlust wächst mit dem Quadrat der Amplitude. Darum steigt die Amplitude nur mit der Wurzel des Drehmoments: Das doppelte Drehmoment gibt die 1,4-fache Amplitude, nicht die doppelte.

Gilt: Q und η als fest angenommen; beide ändern sich in Wirklichkeit etwas mit der Amplitude. Der Gütefaktor ist 2π mal Schwingungsenergie, geteilt durch den Verlust je Schwingung (Kapitel 5). Die Formel liefert A im Bogenmaß.

A	Amplitude (im Beharrungszustand)	°
η	Wirkungsgrad (der Hemmung)	1
M_{H}	Drehmoment am Hemmungsrad	$\mu\mathrm{N{\cdot}m}$
Q	Gütefaktor (der Unruh mit Spirale)	1
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1
D	Richtmoment (der Spirale)	$\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde hat ein Hemmungsrad mit 20 Zähnen, an dem 1,6 µN·m ankommen. Das Richtmoment der Spiralfeder beträgt 0,632 µN·m je Radiant, der Gütefaktor 250, der Wirkungsgrad der Hemmung 0,35. Welche Amplitude stellt sich ein?

Gegeben: $\eta = 0{,}35$; $M_{\mathrm{H}} = 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m}$; $Q = 250$; $z = 20$; $D = 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}$

$$\begin{aligned} A &\approx \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot M_{\mathrm{H}} \cdot Q}{z \cdot D}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}35 \cdot 1{,}6\,\mu\mathrm{N{\cdot}m} \cdot 250}{20 \cdot 0{,}632\,\frac{\mu\mathrm{N{\cdot}m}}{\mathrm{rad}}}} \\ &\approx 4{,}71\,\mathrm{rad} \\ &\approx 270^\circ \end{aligned}$$

Die Unruh schwingt mit rund 270°. Fällt das Drehmoment gegen Ende der Gangdauer auf die Hälfte, sinkt die Amplitude auf etwa 190°.

7.4 Die Hemmung an der Zeitwaage

Die Zeitwaage hört die Hemmung ab. Jeder Schlag der Ankerhemmung besteht aus drei Geräuschen. Beim ersten trifft der Hebelstein die Gabel, die Auslösung beginnt. Beim zweiten trifft der Zahn die Hebefläche und die Gabel den Hebelstein, der Antrieb beginnt. Beim dritten fällt der nächste Zahn auf die Ruhefläche und der Anker an die Begrenzung. Aus den Zeiten zwischen diesen Geräuschen berechnet das Gerät Amplitude und Abfallfehler. Die Formeln dazu stehen mit Beispielen und Richtwerten in Abschnitt 8.2; hier folgt nur, was davon an der Hemmung liegt.

Amplitude. Zwischen dem ersten und dem dritten Geräusch durchläuft die Unruh ihren Hebungswinkel λ, je zur Hälfte vor und nach der Ruhelage. Je größer die Amplitude, desto schneller ist die Unruh dort und desto kürzer ist diese Hebungszeit. Die Zeitwaage misst die Hebungszeit und rechnet mit dem eingestellten Hebungswinkel auf die Amplitude zurück, Formel (8.9). Der Hebungswinkel ist eine Konstruktionsgröße der Hemmung (Abschnitt 7.2). Ist er am Gerät falsch eingestellt, ist die angezeigte Amplitude im selben Verhältnis falsch, Formel (8.10).

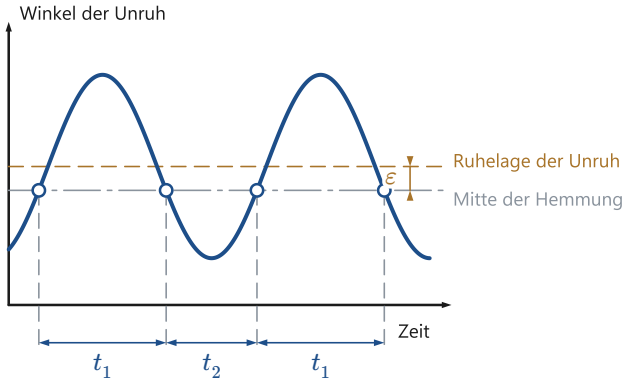


Abb. 7.9 Abfallfehler: Liegt die Ruhelage der Unruh um ε neben der Mitte der Hemmung, wechseln lange und kurze Halbschwingungen (stark übertrieben)

Abfallfehler. Liegt die Ruhelage der Unruh um den Winkel ε neben der Mitte der Hemmung, dauert die Halbschwingung zur einen Seite länger als zur anderen (Abb. 7.9): Die Uhr hinkt. Die Zeitwaage zeigt den halben Zeitunterschied als Abfallfehler in Millisekunden, Formel (8.7). Wie man daraus den Winkel ε berechnet, steht in Formel (8.8). Berichtigt wird an der Unruh: Spiralrolle oder beweglicher Spiralklötzchenträger werden um ε verdreht, bis der Hebelstein bei ruhender Unruh auf der Verbindungslinie von Ankerachse und Unruhachse steht.

7.5 Hemmungen der Großuhr

In Pendeluhren arbeiten ruhende und rückführende Ankerhemmungen. Bei der Grahamhemmung sind die Ruheflächen Kreisbögen um den Ankerdrehpunkt: Solange ein Zahn auf ihnen liegt, steht das Rad still. Bei der Hakenhemmung sind die Ruheflächen geneigt; das Pendel drückt das Rad im Ergänzungsbogen ein Stück zurück, daher heißt sie rückführend. Die Stiftenhemmung großer Uhren trägt statt der Zähne Stifte auf dem Radkranz und ist wie die Grahamhemmung eine ruhende Hemmung.

Teilung, Schritt, Umspannung, Achsabstand und Ankerarm werden für alle diese Hemmungen mit den Formeln aus den Abschnitten 7.1 und 7.2 gerechnet.

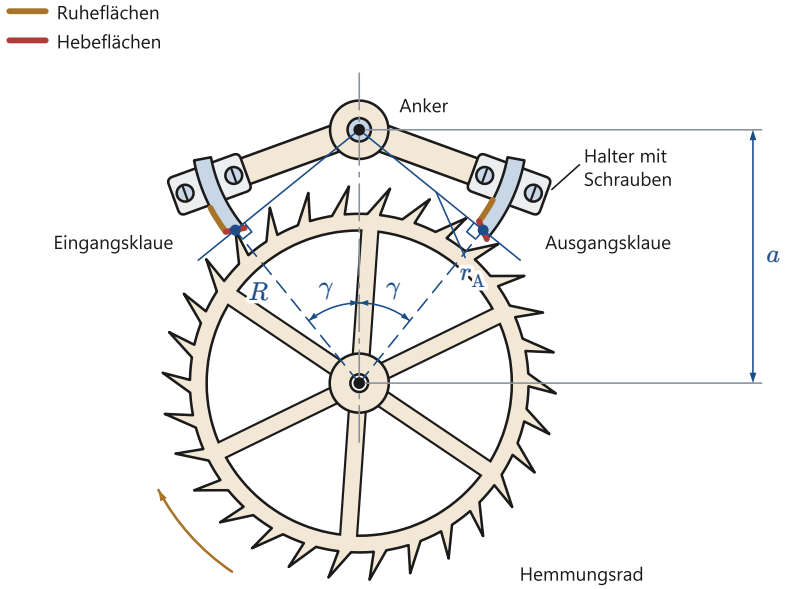


Abb. 7.10 Grahamhemmung mit 30 Zähnen und 6,5 Teilungen Umspannung: Die Ruheflächen sind Kreisbögen um den Ankerdrehpunkt

Achsabstand und Ankerarm bei tangentialem Eingriff

Zähnezahl z	Umspannung k in Teilungen	Umspannungswinkel 2γ	Achsabstand a in Vielfachen von R	Ankerarm r_A in Vielfachen von R
15	2,5	60°	1,155	0,577
30	6,5	78°	1,287	0,810
30	7,5	90°	1,414	1,000
30	8,5	102°	1,589	1,235
30	9,5	114°	1,836	1,540
30	10,5	126°	2,203	1,963

Erste Zeile: Schweizer Ankerhemmung. Die übrigen Zeilen gelten für Pendeluhren mit 30 Zähnen; je größer die Umspannung, desto länger der Ankerarm und desto kleiner der Winkel des Ankers bei gleicher Hebefläche.

Klauenbreite der Grahamhemmung

(7.20) MEISTER

$$b_\mathrm{K} = R \cdot \left(\frac{\pi}{z} - \gamma_\mathrm{F} \right)$$

Zwischen zwei Zahnspitzen muss abwechselnd eine Klaue Platz finden. Für die Klaue bleibt deshalb die halbe Teilung abzüglich des Falls. So breit ist der Ring um den Ankerdrehpunkt, aus dem beide Klauen geschnitten sind.

Gilt: spitze Zähne; tangentialer Eingriff. Winkel im Bogenmaß: Die halbe Teilung ist $\frac{\pi}{z}$, und $1^\circ = 0{,}01745\,\mathrm{rad}$.

b_K	Breite der Klaue, gemessen am Umfang des Rades	mm
R	Radius (des Hemmungsrads; bis zu den Zahnspitzen)	mm
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1
γ_F	Fall (als Winkel im Bogenmaß einsetzen)	rad

BEISPIEL Ein Hemmungsrad mit 30 Zähnen hat 20 mm Radius. Der Fall soll 1° betragen. Wie breit werden die Klauen?

Gegeben: $R = 20\,\mathrm{mm}$; $z = 30$; $\gamma_\mathrm{F} = 1^\circ$

$$\begin{aligned} b_\mathrm{K} &= R \cdot \left(\frac{\pi}{z} - \gamma_\mathrm{F} \right) \\ &= 20\,\mathrm{mm} \cdot \left(\frac{\pi}{30} - 1^\circ \right) \\ &= 20\,\mathrm{mm} \cdot (0{,}1047 - 0{,}0175) \\ &\approx 1{,}75\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Klauen werden 1,75 mm breit. Ein Grad Fall ist an diesem Rad 0,35 mm Luft.

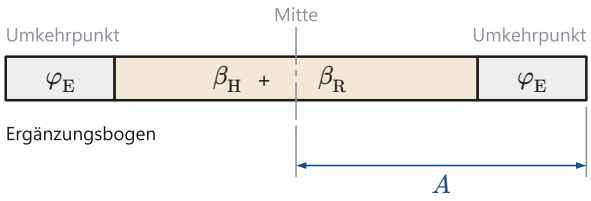


Abb. 7.11 Ausschlag des Pendels an der Grahamhemmung: in der Mitte Hebung und Ruhe, außen der Ergänzungsbogen φ_E

Ergänzungsbogen des Pendels

(7.21) MEISTER

$$\varphi_{\mathrm{E}} = A - \frac{\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}}{2}$$

Der Anker macht jede Bewegung des Pendels mit. In der Mitte des Ausschlags liegen Hebung und Ruhe, zusammen $\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}$ breit. Was das Pendel auf jeder Seite darüber hinaus schwingt, ist der Ergänzungsbogen. In ihm gleitet der Zahn auf der Ruhefläche.

Gilt: Anker mittig eingestellt (gleichmäßiger Abfall), Ankergabel ohne Spiel. Das Pendel muss weiter als $\frac{1}{2}(\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}})$ ausschlagen, sonst fällt kein Zahn ab und die Uhr bleibt stehen.

φ_{E}	Ergänzungsbogen (auf jeder Seite)	°
A	Amplitude (Ausschlag des Pendels, von der Mitte bis zum Umkehrpunkt)	°
β_{H}	Hebung am Anker	°
β_{R}	Ruhe (am Anker)	°

Gut zu wissen: Richtwerte für Grahamhemmungen an Sekundenpendeln: Hebung am Anker 1° bis 2°, Ruhe 0,5° bis 1°. Ein großer Ergänzungsbogen kostet Reibung auf den Ruheflächen.

BEISPIEL Ein Pendel schlägt 1,75° nach jeder Seite aus. Der Graham-Anker hat 1,5° Hebung und 0,5° Ruhe. Wie groß ist der Ergänzungsbogen?

Gegeben: $A = 1{,}75°$; $\beta_{\mathrm{H}} = 1{,}5°$; $\beta_{\mathrm{R}} = 0{,}5°$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{E}} &= A - \frac{\beta_{\mathrm{H}} + \beta_{\mathrm{R}}}{2} \\ &= 1{,}75° - \frac{1{,}5° + 0{,}5°}{2} \\ &= 0{,}75°\end{aligned}$$

Auf jeder Seite schwingt das Pendel 0,75° über Hebung und Ruhe hinaus. Diese Reserve fängt Schwankungen des Antriebs auf.

7.6 Weitere Hemmungen

Für die übrigen Hemmungen genügen wenige Kerngrößen. Teilung und Schlagzahl werden bei allen nach Abschnitt 7.1 gerechnet; die Tabelle zeigt, worin sich die Bauarten unterscheiden.

Hemmungen im Überblick

Hemmung	Bauart	Antriebe je Schwingung	Schritt des Rades je Antrieb
Schweizer Ankerhemmung	frei	2	halbe Teilung
Stiftankerhemmung	frei	2	halbe Teilung
Chronometerhemmung	frei	1	ganze Teilung
Zylinderhemmung	ruhend	2	halbe Teilung
Spindelhemmung	rückführend	2	halbe Teilung
Grahamhemmung	ruhend	2	halbe Teilung
Stiftenhemmung der Großuhr	ruhend	2	halbe Teilung
Hakenhemmung	rückführend	2	halbe Teilung

Frei: Der Gangregler schwingt außerhalb der Hebung ohne Berührung mit der Hemmung. Ruhend: Ein Zahn liegt während des Ergänzungsbogens am Gangregler oder Anker an, das Rad steht. Rückführend: Das Rad wird dabei ein Stück zurückgedreht.

Die Chronometerhemmung treibt die Unruh nur in einer Schwingungsrichtung an, dafür über die ganze Teilung des Rades. In der Gegenrichtung geht der Auslösestein an der Goldfeder vorbei, ohne das Rad freizugeben. Für die Schlagzahl gilt trotzdem Formel (7.2), denn auch hier geht je Schwingung ein Zahn durch.

Bei der Zylinderhemmung arbeitet das Rad ohne Anker direkt auf die Unruhwelle, einen aufgeschnittenen Hohlzylinder. Der Zahn ruht abwechselnd außen und innen auf der Zylinderwand; die Unruh schwingt nie frei.

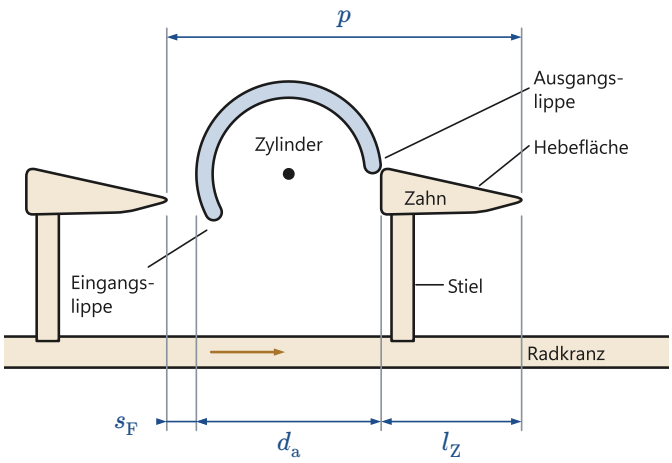


Abb. 7.12 Zylinderhemmung mit gestrecktem Teilkreis in dem Augenblick, in dem der rechte Zahn den Zylinder verlässt: Die Teilung p setzt sich aus Fall, Zylinderdurchmesser und Zahnlänge zusammen

Zylinderhemmung: Teilung, Zahnlänge und Zylinder

(7.22) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} \approx l_Z + d_a + s_F$$

UMGESTELLT $$d_a \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} - l_Z - s_F$$

Links steht die Teilung p des Rades am Umfang. Zwischen zwei Zähnen muss der Zylinder mit seinem Außendurchmesser Platz finden, dazu der äußere Fall. Im Zylinder muss der Zahn Platz finden: Der Innendurchmesser ist um den inneren Fall größer als die Zahnlänge.

Gilt: Teilkreis als gerade Strecke betrachtet (Bogen statt Sehne).

R	Radius (des Hemmungsrads; Zylinderrad, bis zu den Zahnspitzen)	mm
z	Zähnezahl (des Hemmungsrads)	1
l_Z	Länge eines Zahns	mm
d_a	Außendurchmesser des Zylinders	mm
s_F	Fall als Weg (äußerer Fall)	mm

BEISPIEL Ein Zylinderrad mit 15 Zähnen hat 2,50 mm Radius, die Zähne sind 0,45 mm lang, der äußere Fall soll 0,05 mm betragen. Welchen Außendurchmesser darf der Zylinder haben?

Gegeben: $R = 2{,}50\,\text{mm}$; $z = 15$; $l_Z = 0{,}45\,\text{mm}$; $s_F = 0{,}05\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} d_a &\approx \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{z} - l_Z - s_F \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}50\,\text{mm}}{15} - 0{,}45\,\text{mm} - 0{,}05\,\text{mm} \\ &= 1{,}047\,\text{mm} - 0{,}45\,\text{mm} - 0{,}05\,\text{mm} \\ &\approx 0{,}55\,\text{mm} \end{aligned}$$

Der Zylinder darf außen 0,55 mm messen. Bei 0,04 mm Wandstärke bleiben innen 0,47 mm, also 0,02 mm innerer Fall.

8 Gangkontrolle und Messen

Ob eine Uhr gut geht, entscheidet die Messung. Zwei Begriffe tragen das ganze Kapitel: Der Stand sagt, um wie viel die Uhr von der richtigen Zeit abweicht; der Gang sagt, wie schnell sich der Stand ändert. Den Stand liest man ab, den Gang rechnet man daraus aus oder misst ihn in weniger als einer Minute auf der Zeitwaage.

Die Zeitwaage liefert außerdem Amplitude und Abfallfehler. Gemessen wird in mehreren Lagen und bei verschiedenem Aufzugszustand, weil erst die Unterschiede zeigen, wo ein Fehler sitzt. In diesem Kapitel steht S für den Stand und D für die Differenz hängend–flach.

8.1 Stand und Gang

Der Stand ist eine Zeitspanne in Sekunden, der Gang eine Standänderung je Tag. Für beide gilt dieselbe Vorzeichenregel: Plus heißt, die Uhr ist voraus oder geht vor.

Stand

(8.1) GESELLE

$$S = t_\mathrm{U} - t_\mathrm{N}$$

Der Stand ist die Anzeige der Uhr minus die richtige Zeit. Als Normal dient eine Funkuhr oder ein Zeitzeichen.

Gilt: beide Zeiten im selben Augenblick abgelesen.

S	Stand (+ heißt: Uhr ist voraus)	s
t_U	Anzeige der Uhr	s
t_N	Normalzeit (richtige Zeit im selben Augenblick)	s

BEISPIEL Beim Zeitzeichen zur vollen Minute steht der Sekundenzeiger der Uhr schon auf 12 s.

Gegeben: $t_\mathrm{U} = 12\,\mathrm{s}$; $t_\mathrm{N} = 0\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} S &= t_\mathrm{U} - t_\mathrm{N} \\ &= 12\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s} \\ &= 12\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die Uhr ist 12 s voraus, ihr Stand ist +12 s.

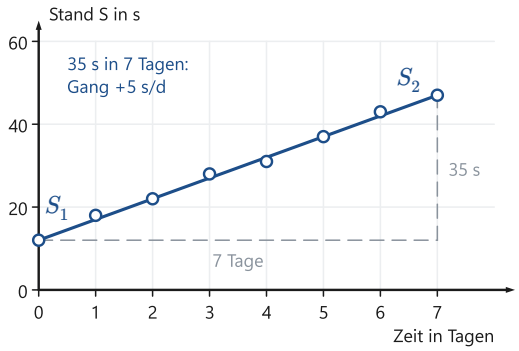


Abb. 8.1 Stand über der Zeit: Der Gang ist die Steigung der Linie durch die abgelesenen Stände

Gang aus zwei Ständen

(8.2) GESELLE

$$G = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

Der Gang ist die Standänderung je Tag. Im Stand-Zeit-Diagramm ist er die Steigung der Linie.

Gilt: mittlerer Gang zwischen den beiden Ablesungen; die Uhr wird dazwischen nicht gestellt.

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
S_2	Stand bei der zweiten Ablesung	s
S_1	Stand bei der ersten Ablesung	s
t_2	Zeitpunkt der zweiten Ablesung	d
t_1	Zeitpunkt der ersten Ablesung	d

Gut zu wissen: Je länger die Zeitspanne, desto genauer der Gang: Der Ablesefehler verteilt sich auf mehr Tage (Abschnitt 8.7).

BEISPIEL Am Tag 0 ist die Uhr 12 s voraus, am Tag 7 sind es 47 s. Welchen Gang hat sie?

Gegeben: $S_2 = 47\,\mathrm{s}$; $S_1 = 12\,\mathrm{s}$; $t_2 = 7\,\mathrm{d}$; $t_1 = 0\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{47\,\mathrm{s} - 12\,\mathrm{s}}{7\,\mathrm{d} - 0\,\mathrm{d}} \\ &= 5{,}0\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 5 s am Tag vor.

Standänderung in einer Laufzeit

(8.3) GESELLE

$$\Delta S = G \cdot t$$

UMGESTELLT $t = \frac{\Delta S}{G}$

ΔS	Standänderung (+ heißt: Uhr hat gewonnen)	s
G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
t	Zeit (Laufzeit)	d

Bei gleichbleibendem Gang wächst der Stand gleichmäßig. So rechnet man einen Gang auf den Monat oder das Jahr hoch, oder umgekehrt eine Angabe in Sekunden je Monat auf den Tag zurück.

Gilt: gleichbleibender Gang über die ganze Laufzeit.

BEISPIEL Eine Quarzuhr geht 0,5 s am Tag vor. Wie viel gewinnt sie in einem Monat mit 30 Tagen?

Gegeben: $G = 0{,}5\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $t = 30\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} \Delta S &= G \cdot t \\ &= 0{,}5\,\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \cdot 30\,\mathrm{d} \\ &= 15\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

15 s im Monat, ein üblicher Wert für eine einfache Quarzuhr. Im Jahr wären es rund 3 min.

Mittlerer Gang

(8.4) GESELLE

$$\bar{G} = \frac{\sum G_i}{n}$$

Über mehrere Tage ist der mittlere tägliche Gang zugleich die gesamte Standänderung geteilt durch die Zahl der Tage. Über mehrere Lagen gemittelt sagt er, wie die Uhr reguliert ist.

Gilt: alle Einzelgänge über gleich lange Zeiten gemessen; Vorzeichen beachten.

$\bar{G}$	mittlerer Gang (über Tage oder Lagen)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
$\sum G_i$	Summe der Einzelgänge, mit Vorzeichen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
n	Anzahl (der Einzelgänge)	1

BEISPIEL An fünf Tagen werden die Gänge +6, +4, +7, +3 und +5 Sekunden je Tag bestimmt. Die Summe ist +25 Sekunden je Tag.

Gegeben: $\sum G_i = 25\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $\quad n = 5$

$$\begin{aligned}\bar{G} &= \frac{\sum G_i}{n} \\ &= \frac{25\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{5} \\ &= 5{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Im Mittel +5 s am Tag. In den fünf Tagen hat die Uhr 25 s gewonnen.

Gang umrechnen

Gang in $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Sekunden im Monat (30 Tage)	Sekunden im Jahr (365 Tage)	ppm
0,1	3	36,5	1,16
0,5	15	182,5	5,79
1	30	365	11,6
5	150	1825	57,9
10	300	3650	116
30	900	10 950	347

ppm heißt Millionstel. 1 s am Tag ist ein Fehler von 1 zu 86 400, also 11,6 ppm (Abschnitt 1.1).

Gang aus der Abweichung der Schlagzahl

(8.5) GESELLE

$$G = \frac{n_{\text{ist}} - n_{\text{soll}}}{n_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Jede Uhr zählt Schwingungen. Schwingt der Gangregler um einen Bruchteil zu schnell, geht die Uhr um denselben Bruchteil vor. Mit Frequenzen statt Schlagzahlen steht die Formel in Abschnitt 5.4, für den Quarz in Abschnitt 10.5.

Gilt: Schlagzahl über die Messzeit gemittelt.

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
n_{ist}	gemessene Schlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$
n_{soll}	Sollschlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde macht in einer Stunde 28 803 Halbschwingungen.

Gegeben: $n_{\text{ist}} = 28\,803\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$; $\quad n_{\text{soll}} = 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$

$$\begin{aligned}G &= \frac{n_{\text{ist}} - n_{\text{soll}}}{n_{\text{soll}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{28\,803\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}} - 28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}}{28\,800\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 9{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr geht 9 s am Tag vor. Drei Schläge zu viel in der Stunde sind auf dem Zifferblatt drei Achtelsekunden, am Tag 24-mal so viel.

Merksatz: Der Stand ist ein Zustand, der Gang eine Änderung. Plus heißt bei beiden: Die Uhr ist vorn.

8.2 Zeitwaage

Die Zeitwaage hört die Schläge der Uhr mit einem Mikrofon ab und vergleicht ihre Folge mit einer Quarzfrequenz. Aus einer Messzeit von weniger als einer Minute berechnet sie Gang, Abfallfehler und Amplitude. Alle drei Werte folgen aus gemessenen Zeiten.

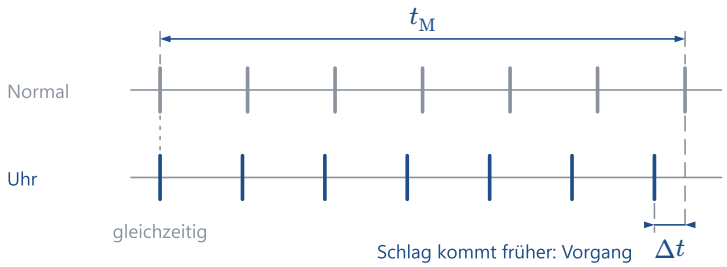


Abb. 8.2 Prinzip der Zeitwaage: In der Messzeit t_M verschieben sich die Schläge der Uhr um Δt gegen die Normalfrequenz

Gang aus der Zeitverschiebung der Schläge

(8.6) MEISTER

$$G = \frac{\Delta t}{t_\mathrm{M}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

UMGESTELLT $\quad \Delta t = \dfrac{G \cdot t_\mathrm{M}}{86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δt	Zeitverschiebung der Schläge gegen die Normalfrequenz während der Messzeit (+ heißt: Schläge kommen früher)	ms
t_M	Messzeit	s

Kommt jeder Schlag ein wenig früher, als die Normalfrequenz es vorgibt, summiert sich der Vorsprung. Aus Vorsprung und Messzeit folgt der Gang. Im Diagramm der Zeitwaage ist er die Steigung der Punktlinie.

Gilt: gleichmäßiger Gang während der Messzeit; über Tick und Tack gemittelt, damit der Abfallfehler nicht in den Gang eingeht.

Aber Vorsicht: Der Abstand der Schläge schwankt von Schlag zu Schlag, vor allem durch die Zähne des Hemmungsrads und die Eingriffe des Räderwerks. Wenige Sekunden reichen deshalb nicht für eine Aussage auf 1 s am Tag; üblich sind 10 s bis 60 s Messzeit, bei unruhigem Bild mehr.

BEISPIEL In 30 s Messzeit rücken die Schläge einer Uhr um 2,0 ms gegen die Normalfrequenz vor.

Gegeben: $\Delta t = 2{,}0\,\mathrm{ms}; \quad t_\mathrm{M} = 30\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\Delta t}{t_\mathrm{M}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{2{,}0\,\mathrm{ms}}{30\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 5{,}76\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 5,76 s am Tag vor. Die Zeitwaage zeigt gerundet +5,8 an.

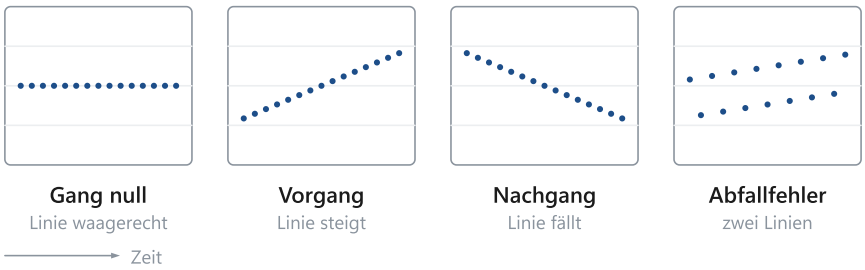


Abb. 8.3 Diagramm der Zeitwaage: Die Steigung der Punktlinie zeigt den Gang, der Abstand zweier Linien den Abfallfehler

Zeitverschiebung der Schläge bei 1 $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ Gang

Messzeit	Zeitverschiebung
2 s	23 µs
4 s	46 µs
10 s	116 µs
30 s	347 µs
60 s	694 µs

Zum Vergleich: Bei 28 800 Halbschwingungen je Stunde liegen zwei Schläge 125 000 µs auseinander.

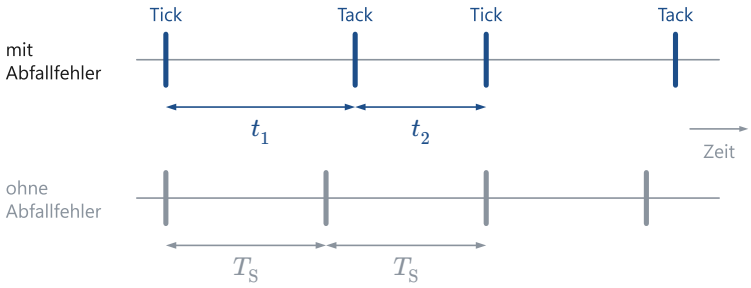


Abb. 8.4 Abfallfehler: Von Tick bis Tack vergeht mehr Zeit als von Tack bis Tick; T_S ist die Schlagdauer ohne Abfallfehler

Abfallfehler

(8.7) GESELLE

$$t_A = \frac{|t_1 - t_2|}{2}$$

t_A	Abfallfehler	ms
t_1	Dauer der einen Halbschwingung (Tick bis Tack)	ms
t_2	Dauer der folgenden Halbschwingung (Tack bis Tick)	ms

Steht die Unruh in Ruhe nicht genau in der Mitte der Hemmung, folgen Tick und Tack in ungleichen Abständen. Der Abfallfehler ist die Abweichung jedes Abstands vom Mittel, also der halbe Unterschied der beiden Abstände. Wie der Abfallfehler an der Hemmung entsteht, zeigt Abschnitt 7.4.

Gilt: Zeiten jeweils vom ersten Geräusch eines Schlags bis zum ersten Geräusch des nächsten; Anzeige als Betrag.

Gut zu wissen: Richtwerte: Die Werkhersteller lassen bei voll aufgezogenem Werk in der Lage Zifferblatt oben meist höchstens 0,6 ms bis 0,8 ms zu (ETA 2892A2 und ETA 7750: 0,6 ms; Sellita SW200 je nach Qualitätsstufe 0,8 ms oder 0,6 ms). Ab etwa 1 ms sollte der Abfall in jedem Fall berichtigt werden. Maßgebend ist die Angabe des Werkherstellers. Ein großer Abfallfehler erschwert das selbstständige Anlaufen der Uhr.

BEISPIEL Bei einem Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde misst die Zeitwaage von Tick bis Tack 125,6 ms und von Tack bis Tick 124,4 ms.

Gegeben: $t_1 = 125{,}6\,\text{ms}$; $t_2 = 124{,}4\,\text{ms}$

$$t_A = \frac{|t_1 - t_2|}{2} = \frac{|125{,}6\,\text{ms} - 124{,}4\,\text{ms}|}{2} = 0{,}6\,\text{ms}$$

0,6 ms: Der eine Abstand ist 0,6 ms länger, der andere 0,6 ms kürzer als die Sollschlagdauer von 125 ms. Im Diagramm laufen zwei Linien nebeneinander.

Abfallfehler als Winkel

(8.8) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$\varepsilon \approx \pi \cdot f \cdot A \cdot t_A$$

ε	Winkel (zwischen der Ruhelage der Unruh und der Mitte der Hemmung)	°
f	Frequenz (der Unruh; volle Schwingungen je Sekunde; 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 4 Hz)	Hz
A	Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt)	°
t_A	Abfallfehler	ms

Derselbe Versatz der Ruhelage zeigt sich bei kleiner Amplitude als größerer Abfallfehler in Millisekunden, weil die Unruh dann langsamer durch die Mitte läuft. Abfallfehler vergleicht man deshalb bei gleicher Amplitude.

Gilt: Versatz klein gegen die Amplitude; sinusförmige Schwingung.

BEISPIEL Eine Uhr mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde zeigt bei 270° Amplitude 0,6 ms Abfallfehler.

Gegeben: $f = 4\,\text{Hz}$; $A = 270°$; $t_A = 0{,}6\,\text{ms}$

$$\varepsilon \approx \pi \cdot f \cdot A \cdot t_A = \pi \cdot 4\,\text{Hz} \cdot 270° \cdot 0{,}6\,\text{ms} \approx 2{,}0°$$

Die Ruhelage der Unruh liegt rund 2° neben der Mitte. Um diesen Winkel muss die Spiralrolle oder der bewegliche Klötzchenträger gedreht werden. Bei 180° Amplitude zeigte dieselbe Uhr 0,9 ms.

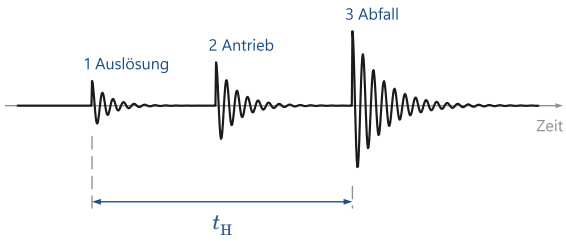


Abb. 8.5 Geräusch eines Schlags der Ankerhemmung: Die Hebungszeit t_H reicht vom ersten bis zum dritten Impuls

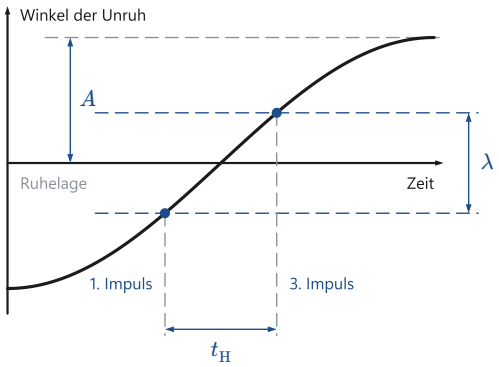


Abb. 8.6 Die Unruh durchläuft den Hebungswinkel λ beiderseits der Ruhelage in der Hebungszeit t_H (Winkel vergrößert gezeichnet)

Amplitude aus Hebungswinkel und Hebungszeit

(8.9) MEISTER

$$A = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot f \cdot t_H\right)}$$

UMGESTELLT

$$t_H = \frac{\arcsin\left(\frac{\lambda}{2 \cdot A}\right)}{\pi \cdot f}$$

A	Amplitude (von der Ruhelage bis zum Umkehrpunkt)	°
λ	Hebungswinkel (der Unruh; Angabe des Herstellers, an der Zeitwaage eingestellt)	°
f	Frequenz (der Unruh; volle Schwingungen je Sekunde; 28 800 Halbschwingungen je Stunde sind 4 Hz)	Hz
t_H	Hebungszeit (vom ersten bis zum dritten Geräusch eines Schlags)	ms

Die Unruh durchläuft den Hebungswinkel umso schneller, je größer ihre Amplitude ist. Die Zeitwaage misst die Hebungszeit zwischen dem ersten und dem dritten Geräusch eines Schlags und rechnet daraus die Amplitude.

Gilt: sinusförmige Schwingung, Hebungswinkel symmetrisch zur Ruhelage. Das Produkt $\pi \cdot f \cdot t_H$ ist ein Winkel im Bogenmaß; der Taschenrechner muss für den Sinus auf rad stehen.

Gut zu wissen: Herleitung: Die Unruh schwingt nach $\varphi = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$. Der Hebungswinkel liegt symmetrisch zur Ruhelage, also erreicht die Unruh den halben Hebungswinkel nach der halben Hebungszeit: $\frac{\lambda}{2} = A \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot t_H)$.

Gut zu wissen: Für übliche Amplituden genügt die Näherung $A \approx \frac{\lambda}{2\pi \cdot f \cdot t_H}$. Im Beispiel ergibt sie 268,7°, also 0,4° zu wenig.

BEISPIEL Ein Werk mit 28 800 Halbschwingungen je Stunde hat 52° Hebungswinkel. Die Zeitwaage misst 7,7 ms Hebungszeit.

Gegeben: $\lambda = 52°$; $f = 4\,\text{Hz}$; $t_H = 7{,}7\,\text{ms}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot f \cdot t_H\right)} \\ &= \frac{52°}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot 4\,\text{Hz} \cdot 7{,}7\,\text{ms}\right)} \\ &= \frac{52°}{2 \cdot \sin(0{,}0968)} \\ &\approx 269° \end{aligned}$$

Die Unruh schwingt mit rund 269°. Bei 300° wäre die Hebungszeit auf 6,9 ms geschrumpft.

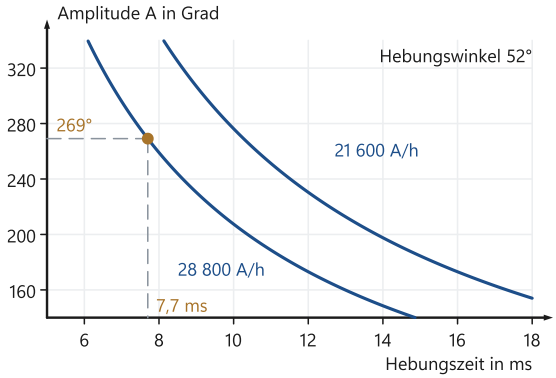


Abb. 8.7 Amplitude über der Hebungszeit bei 52° Hebungswinkel: Je kürzer die Hebungszeit, desto größer die Amplitude

Hebungszeit in ms bei 52° Hebungswinkel

Amplitude	28 800 A/h (4 Hz)	21 600 A/h (3 Hz)	18 000 A/h (2,5 Hz)
200°	10,4	13,8	16,6
220°	9,4	12,6	15,1
240°	8,6	11,5	13,8
260°	8,0	10,6	12,8
280°	7,4	9,9	11,8
300°	6,9	9,2	11,0
320°	6,5	8,6	10,4

Berechnet mit der umgestellten Formel. Zwischen 280° und 300° ändert sich die Hebungszeit bei 4 Hz nur um 0,5 ms: Die Zeitwaage muss sie auf Hundertstel Millisekunden genau messen.

Amplitude bei falsch eingestelltem Hebungswinkel

(8.10) MEISTER

$$A = \frac{A_Z \cdot \lambda}{\lambda_Z}$$

A	Amplitude (wirklicher Wert)	°
A_Z	von der Zeitwaage angezeigte Amplitude	°
λ	Hebungswinkel (der Unruh; wirklicher Wert des Werks)	°
λ_Z	an der Zeitwaage eingestellter Hebungswinkel	°

Die Zeitwaage misst nur die Hebungszeit; den Hebungswinkel muss man ihr sagen. Ist er falsch eingestellt, ist die angezeigte Amplitude im selben Verhältnis falsch: 4 % zu viel Hebungswinkel ergeben 4 % zu viel Amplitude. Für die Fehler gilt $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$.

Gilt: folgt aus der Amplitudenformel: Bei gleicher Hebungszeit ist die Amplitude proportional zum Hebungswinkel.

Aber Vorsicht: Bei unbekanntem Hebungswinkel die Amplitude an der Unruh prüfen. Eine Unruh mit zwei Schenkeln zeigt bei 180° Amplitude in den Umkehrpunkten dasselbe Bild wie in der Ruhelage; bei 270° stehen die Schenkel in beiden Umkehrpunkten gleich, quer zur Ruhelage. Den Hebungswinkel an der Zeitwaage so einstellen, dass die Anzeige dazu passt.

BEISPIEL Die Zeitwaage steht auf 52° und zeigt 280°. Das Werk hat aber 50° Hebungswinkel.

Gegeben: $A_Z = 280°$; $\lambda = 50°$; $\lambda_Z = 52°$

$$A = \frac{A_Z \cdot \lambda}{\lambda_Z} = \frac{280° \cdot 50°}{52°} \approx 269°$$

Die Unruh schwingt nur mit rund 269°. Jedes Grad Fehler im Hebungswinkel macht hier gut 5° in der Amplitude aus.

Übliche Hebungswinkel (Richtwerte)

Hemmung und Bauzeit	Hebungswinkel der Unruh
Schweizer Ankerhemmung, neuere Armbanduhrwerke	meist 49° … 53°
Schweizer Ankerhemmung, ältere Armbanduhr- und Taschenuhrwerke	häufig kleiner, etwa 38° … 46°
Co-Axial-Hemmung	rund 30° … 38°

Der Hebungswinkel ist eine Konstruktionsgröße des Kalibers. Maßgebend ist das Datenblatt des Herstellers; fehlt es, hilft die Sichtprobe an der Unruh. Beispiele: ETA 2824-2 50°, ETA 2892A2 51°, ETA 7750 49°, Sellita SW200 50°, ETA 6497-1 44°.

Merksatz: Die Zeitwaage misst Zeiten. Gang, Abfallfehler und Amplitude sind daraus gerechnet, und die Amplitude stimmt nur mit dem richtigen Hebungswinkel.

8.3 Lagen und Kennzahlen

Eine Uhr geht nicht in jeder Lage gleich: Lagerreibung, Schwerpunkt der Unruh und Spirale wirken je nach Lage verschieden. Geprüft wird deshalb in bis zu sechs Lagen, einmal voll aufgezogen und einmal nach 24 Stunden Lauf.

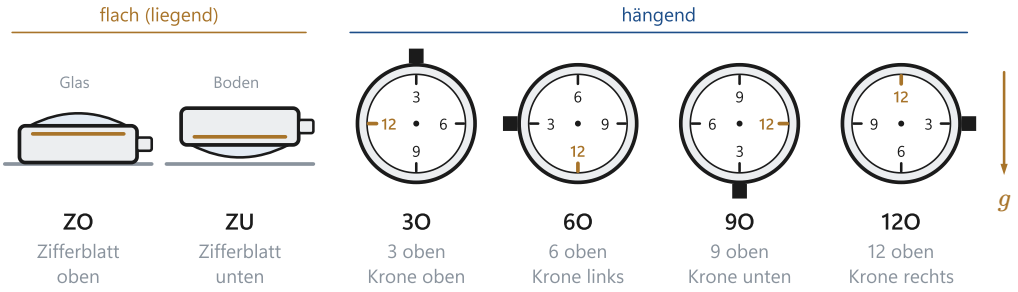


Abb. 8.8 Die sechs Prüflagen einer Armbanduhr mit der Krone bei der 3

Die sechs Prüflagen und ihre Kurzzeichen

Lage	deutsch	international	Krone der Armbanduhr
Zifferblatt oben	ZO	CH	liegend
Zifferblatt unten	ZU	FH (auch CB)	liegend
3 oben	3O	3H	oben
6 oben	6O	6H	links
9 oben	9O	9H	unten
12 oben	12O	12H	rechts

Die Kurzzeichen nennen, was oben ist. International sind die französischen Zeichen üblich: H für haut (oben), C für cadran (Zifferblatt), F für fond (Boden), B für bas (unten). Englisch heißen die flachen Lagen DU (dial up) und DD (dial down). Die Angaben zur Krone gelten für Armbanduhren mit der Krone bei der 3; bei Taschenuhren sitzt sie bei der 12.

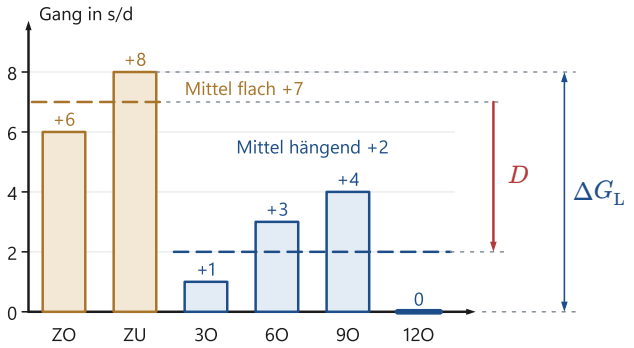


Abb. 8.9 Gänge in sechs Lagen: größte Lagendifferenz ΔG_L und Differenz hängend–flach D

Größte Lagendifferenz

(8.11) GESELLE

$$\Delta G_\mathrm{L} = G_\mathrm{max} - G_\mathrm{min}$$

Die größte Lagendifferenz ist das einfachste Maß für die Güte der Reglage: Je kleiner sie ist, desto weniger hängt der Gang davon ab, wie die Uhr getragen und abgelegt wird.

Gilt: alle Lagen bei gleichem Aufzugszustand und gleicher Temperatur gemessen.

ΔG_L	größte Lagendifferenz	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_max	größter Gang aller Lagen (mit Vorzeichen)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_min	kleinster Gang aller Lagen (mit Vorzeichen)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

BEISPIEL Eine Uhr zeigt voll aufgezogen: ZO +6, ZU +8, 3O +1, 6O +3, 9O +4 und 12O 0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $G_\mathrm{max} = 8\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_\mathrm{min} = 0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G_\mathrm{L} &= G_\mathrm{max} - G_\mathrm{min}\\ &= 8\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\\ &= 8\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

8 s am Tag zwischen der schnellsten Lage (Zifferblatt unten) und der langsamsten (12 oben). Der mittlere Gang der sechs Lagen ist +3,7 s am Tag.

Differenz hängend–flach

(8.12) MEISTER

$$D = G_{\mathrm{h}} - G_{\mathrm{f}}$$

Die hängenden Lagen werden gemittelt und mit dem Mittel der flachen Lagen verglichen. Ein negatives Ergebnis heißt: Die Uhr geht hängend langsamer als flach.

Gilt: gleicher Aufzugszustand in allen Lagen. Die Chronometerprüfung bildet D nur aus zwei Lagen, 6 oben und Zifferblatt oben (Abschnitt 8.4).

D	Differenz hängend–flach (+ heißt: Gang hängend größer als flach)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_{h}	mittlerer Gang der hängenden Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_{f}	mittlerer Gang der flachen Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

Gut zu wissen: Im Mittel der vier hängenden Lagen hebt sich der Einfluss einer Unwucht der Unruh weitgehend auf. Was bleibt, kommt von der kleineren Amplitude und der anderen Lagerung der Zapfen. Die Unwucht zeigt sich in den Unterschieden der hängenden Lagen untereinander (Abschnitt 5.3).

BEISPIEL Die Uhr aus dem Beispiel davor: Mittel der vier hängenden Lagen +2,0, Mittel der beiden flachen Lagen +7,0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $G_{\mathrm{h}} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_{\mathrm{f}} = 7{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} D &= G_{\mathrm{h}} - G_{\mathrm{f}} \\ &= 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 7{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -5{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Hängend geht die Uhr 5 s am Tag langsamer als flach. Hängend ist die Amplitude kleiner; die Uhr verliert also bei kleiner Amplitude, ein Zeichen für einen Isochronismusfehler (Abschnitt 5.7).

Was Lagenunterschiede zeigen (Richtschnur für die Fehlersuche)

Beobachtung	häufige Ursache
Zifferblatt oben und unten verschieden	Zapfenenden oder Decksteine, Öl, Spirale liegt nicht flach oder streift
hängend langsamer oder schneller als flach	Isochronismusfehler: Spiel der Spirale zwischen den Rückerstiften, Form der Spirale, Hemmung
hängende Lagen untereinander verschieden	Unwucht der Unruh, Spirale nicht zentrisch
Amplitude hängend viel kleiner als flach	Reibung an den Unruhzapfen: Zapfen, Lochsteine, Öl

Die Tabelle gibt Hinweise, keine sicheren Diagnosen; oft wirken mehrere Ursachen zusammen.

Gang im Tragen aus zwei Lagengruppen

(8.13) VERTIEFUNG

$$G_{\mathrm{T}} = a \cdot G_{\mathrm{f}} + (1 - a) \cdot G_{\mathrm{h}}$$

Am Arm und auf dem Nachttisch wechseln die Lagen. Der Gang im Tragen liegt zwischen dem Mittel flach und dem Mittel hängend, je nach Zeitanteil.

Gilt: vereinfachtes Modell mit zwei Lagengruppen; Temperatur am Arm, Bewegung und Aufzugszustand sind nicht berücksichtigt.

G_{T}	erwarteter Gang im Tragen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
a	Zeitanteil der flachen Lagen	1
G_{f}	mittlerer Gang der flachen Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_{h}	mittlerer Gang der hängenden Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

BEISPIEL Die Uhr aus den Beispielen davor liegt nachts und zeitweise am Tag flach, zusammen 40 % der Zeit.

Gegeben: $a = 0{,}4$; $G_{\mathrm{f}} = 7{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_{\mathrm{h}} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{T}} &= a \cdot G_{\mathrm{f}} + (1 - a) \cdot G_{\mathrm{h}} \\ &= 0{,}4 \cdot 7{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + (1 - 0{,}4) \cdot 2{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= 4{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Rund +4 s am Tag. Wer die Uhr nachts flach ablegt, lässt sie hier schneller gehen; hängend abgelegt geht sie langsamer.

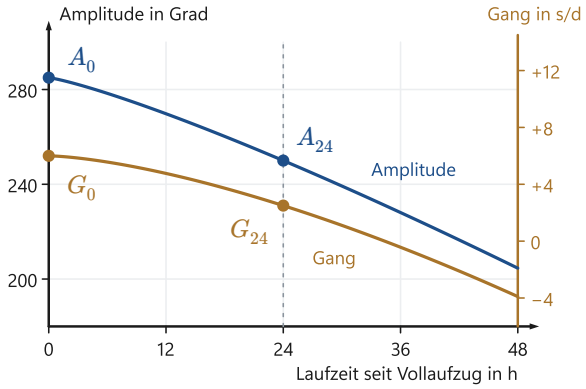


Abb. 8.10 Amplitude und Gang über der Laufzeit (Beispiel): Aus den Werten bei 0 h und 24 h folgen Amplitudenabfall und Isochronismusfehler

Isochronismusfehler aus 0 h und 24 h

(8.14) MEISTER

$$\Delta G = G_{24} - G_0$$

Mit dem Ablaufen der Zugfeder sinkt die Amplitude. Ändert sich dabei der Gang, ist der Gangregler nicht isochron. Die Formel ist dieselbe wie in Abschnitt 5.7, hier mit den beiden Messzeitpunkten der Werkstatt.

Gilt: gleiche Lage und gleiche Temperatur bei beiden Messungen.

ΔG	Isochronismusfehler (+ heißt: Uhr wird mit ablaufender Feder schneller)	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
G_{24}	Gang nach 24 Stunden Lauf	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
G_0	Gang voll aufgezogen	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$

BEISPIEL Eine Uhr geht mit Zifferblatt oben voll aufgezogen 6,0 s am Tag vor, nach 24 Stunden Lauf in derselben Lage 2,5 s am Tag.

Gegeben: $G_{24} = 2{,}5\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$; $G_0 = 6{,}0\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G &= G_{24} - G_0 \\ &= 2{,}5\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} - 6{,}0\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= -3{,}5\ \tfrac{\text{s}}{\text{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr ist nach 24 Stunden um 3,5 s am Tag langsamer geworden. Wird sie täglich aufgezogen, liegt ihr Gang zwischen beiden Werten.

Amplitudenabfall in 24 Stunden

(8.15) GESELLE

$$\Delta A = A_0 - A_{24}$$

Der Amplitudenabfall zeigt, wie gleichmäßig Zugfeder und Räderwerk die Kraft über den Tag liefern.

Gilt: gleiche Lage bei beiden Messungen, richtig eingestellter Hebungswinkel.

ΔA	Amplitudenabfall	°
A_0	Amplitude voll aufgezogen	°
A_{24}	Amplitude nach 24 Stunden Lauf	°

BEISPIEL Mit Zifferblatt oben schwingt die Unruh voll aufgezogen mit 285°, nach 24 Stunden mit 250°.

Gegeben: $A_0 = 285°$; $A_{24} = 250°$

$$\begin{aligned}\Delta A &= A_0 - A_{24} \\ &= 285° - 250° \\ &= 35°\end{aligned}$$

35° in 24 Stunden. Wichtiger als der Abfall selbst ist, dass die Amplitude nach 24 Stunden auch in den hängenden Lagen noch ausreicht; die Werkhersteller nennen dafür Mindestwerte, häufig 190° bis 200° in der Lage 6 oben (ETA 2892A2 und ETA 7750: 200°).

Merksatz: Flach gegen hängend zeigt den Einfluss der Amplitude, hängend gegen hängend die Unwucht, voll aufgezogen gegen 24 Stunden den Isochronismus.

8.4 Chronometerprüfung

Chronometer heißt nach ISO 3159 eine Uhr, deren Werk eine neutrale Stelle über mehrere Tage in verschiedenen Lagen und bei verschiedenen Temperaturen geprüft hat; in der Schweiz ist das die COSC. Die Prüfung dauert 15 Tage, mit fünf Lagen und drei Temperaturen. Aus den 15 Tagesgängen werden sieben Kennzahlen berechnet. Andere Prüfungen, etwa die der METAS oder nach DIN 8319, gelten der fertigen Uhr und verlangen zum Teil mehr.



Abb. 8.11 Prüfprogramm der Chronometerprüfung nach ISO 3159: Lage und Temperatur an den 15 Prüftagen

Die sieben Kennzahlen der Chronometerprüfung nach ISO 3159 (Uhren über 20 mm Durchmesser)

Nr.	Kennzahl	Berechnung aus den Tagesgängen G_1 bis G_{15}	Grenzwert nach ISO 3159 in $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
1	mittlerer täglicher Gang	$\bar{G} = \frac{1}{10} \cdot (G_1 + G_2 + \cdots + G_{10})$	−4 … +6
2	mittlere Gangabweichung	$\frac{1}{5} \cdot (\lvert G_2 - G_1\rvert + \lvert G_4 - G_3\rvert + \cdots + \lvert G_{10} - G_9\rvert)$	höchstens 2
3	größte Gangabweichung	größter der fünf Beträge aus Zeile 2	höchstens 5
4	Differenz hängend–flach D	$\frac{1}{2} \cdot (G_1 + G_2) - \frac{1}{2} \cdot (G_9 + G_{10})$	−6 … +8
5	größte Differenz zum mittleren Gang	größter der zehn Beträge $\lvert G_i - \bar{G}\rvert$ der Tage 1 bis 10	höchstens 10
6	Temperaturkoeffizient C	$\frac{1}{30\,\mathrm{K}} \cdot (G_{13} - G_{11})$	±0,6 je K
7	Gangwiederaufnahme	$G_{15} - \frac{1}{2} \cdot (G_1 + G_2)$	±5

Jede der sieben Grenzen muss eingehalten sein. Für Uhren bis 20 mm Durchmesser lässt die Norm etwas weitere Grenzen zu. Die Tagesgänge schreibt die Norm M_i; hier stehen sie wie im ganzen Buch als G_i.

Mittlere Gangabweichung

(8.16) MEISTER

$$\overline{\Delta G} = \frac{\sum |G_{2k} - G_{2k-1}|}{5}$$

$\overline{\Delta G}$	mittlere Gangabweichung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
$\sum \lvert G_{2k} - G_{2k-1}\rvert$	Summe der fünf Beträge: Unterschied der beiden Tagesgänge je Lage	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

In jeder der fünf Lagen wird an zwei Tagen hintereinander gemessen. Die Kennzahl sagt, wie gut die Uhr ihren Gang von einem Tag zum nächsten wiederholt.

Gilt: nach ISO 3159: Tage 1 bis 10 bei 23 °C; Grenzwert 2 s am Tag (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL In den fünf Lagen unterscheiden sich die beiden Tagesgänge um 1,0, 0,8, 2,1, 0,7 und 1,4 Sekunden je Tag. Die Summe ist 6,0 Sekunden je Tag.

Gegeben: $\sum |G_{2k} - G_{2k-1}| = 6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\overline{\Delta G} &= \frac{\sum |G_{2k} - G_{2k-1}|}{5} \\ &= \frac{6{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{5} \\ &= 1{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

1,2 s am Tag, der Grenzwert von 2 s am Tag ist eingehalten. Auch der größte Einzelwert, 2,1 s am Tag, liegt unter seiner Grenze von 5 s am Tag.

Temperaturkoeffizient in der Chronometerprüfung

(8.17) MEISTER

$$C = \frac{G_{38} - G_8}{30\,\mathrm{K}}$$

C	Temperaturkoeffizient des Gangs	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}$
G_{38}	Gang bei 38 °C (Tag 13)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_8	Gang bei 8 °C (Tag 11)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

Beide Gänge werden in derselben Lage gemessen, mit dem Zifferblatt oben. Die allgemeine Form für beliebige Prüftemperaturen steht in Abschnitt 5.5.

Gilt: nach ISO 3159: Grenzwert ±0,6 s am Tag je Kelvin (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL Eine Uhr geht bei 8 °C um 2,4 s am Tag vor und bei 38 °C um 7,2 s am Tag.

Gegeben: $G_{38} = 7{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $\quad G_8 = 2{,}4\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}C &= \frac{G_{38} - G_8}{30\,\mathrm{K}} \\ &= \frac{7{,}2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - 2{,}4\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{30\,\mathrm{K}} \\ &= 0{,}16\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}\cdot\mathrm{K}}\end{aligned}$$

+0,16 s am Tag je Kelvin: Die Uhr wird in der Wärme schneller. Der Grenzwert von 0,6 ist klar eingehalten.

Gangwiederaufnahme

(8.18) MEISTER

$$\Delta G_{\mathrm{W}} = G_{15} - \frac{G_1 + G_2}{2}$$

ΔG_{W}	Gangwiederaufnahme	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_{15}	Gang am letzten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_1	Gang am ersten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
G_2	Gang am zweiten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

Am letzten Tag liegt die Uhr wieder in der Lage der ersten beiden Tage. Die Kennzahl zeigt, ob die Uhr nach zwei Wochen Prüfung mit Kälte und Wärme zu ihrem Anfangsgang zurückfindet.

Gilt: nach ISO 3159: Lage 6 oben bei 23 °C; Grenzwert ±5 s am Tag (Uhren über 20 mm).

BEISPIEL Die Uhr aus dem Beispiel zur mittleren Gangabweichung geht an den ersten beiden Tagen 3,0 und 4,0 s am Tag vor, am letzten Tag 4,5 s am Tag.

Gegeben: $G_{15} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_1 = 3{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $G_2 = 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta G_{\mathrm{W}} &= G_{15} - \frac{G_1 + G_2}{2} \\ &= 4{,}5\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} - \frac{3{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} + 4{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{2} \\ &= 1{,}0\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

+1,0 s am Tag, weit innerhalb der Grenze von ±5 s am Tag. Die Uhr hat ihren Anfangsgang fast wieder erreicht.

Merksatz: Chronometer heißt: 15 Tage geprüft, in fünf Lagen und bei drei Temperaturen, im Mittel zwischen −4 und +6 s am Tag.

8.5 Wasserdichtheit und Druck

Wasser drückt mit jedem Meter Tiefe stärker auf Glas, Boden und Dichtungen. Die Druckangabe auf einer Uhr nennt den Prüfüberdruck. Er gilt für die neue Uhr und für ruhenden Druck, in Wasser oder in Luft. Die Anforderungen an wasserdichte Uhren stehen in ISO 22810.

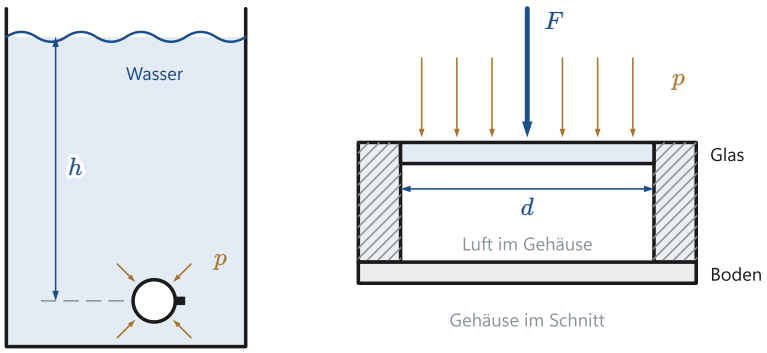


Abb. 8.12 Links: Der Wasserdruck wächst mit der Tiefe h. Rechts: Der Druck p belastet das Glas vom Durchmesser d mit der Kraft F

Druck einer Wassersäule

(8.19) GESELLE

$$p = \varrho \cdot g \cdot h$$

UMGESTELLT $h = \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$

Der Druck wächst gleichmäßig mit der Tiefe, in Süßwasser um knapp 1 bar je 10 m.

Gilt: ruhendes Wasser. Süßwasser hat $1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, Meerwasser rund $1025\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

p	Druck (Überdruck gegenüber der Wasseroberfläche)	bar
ϱ	Dichte (des Wassers)	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h	Höhe (der Wassersäule über der Uhr, also die Tauchtiefe)	m

BEISPIEL Welcher Überdruck herrscht in 100 m Tiefe in Süßwasser?

Gegeben: $\varrho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 100\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} p &= \varrho \cdot g \cdot h \\ &= 1000\ \tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\,\mathrm{m} \\ &= 981\,000\,\mathrm{Pa} \\ &= 9{,}81\,\mathrm{bar} \end{aligned}$$

9,81 bar, gerundet 10 bar. Daher die Faustregel: 10 m Wassersäule entsprechen 1 bar.

Druckkraft auf Glas oder Boden

(8.20) GESELLE

$$F = \frac{p \cdot \pi \cdot d^2}{4}$$

Die Kraft ist Druck mal Fläche (Abschnitt 2.2), hier mit der Kreisfläche ausgeschrieben. Sie wächst mit dem Quadrat des Durchmessers: Große Uhren brauchen dickere Gläser und steifere Böden.

Gilt: Druck gleichmäßig auf einer Kreisfläche; $1\,\mathrm{bar} = 0{,}1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.

F	Kraft (auf die gedrückte Fläche)	N
p	Druck (Überdruck außen gegenüber innen)	bar
d	Durchmesser (der gedrückten Fläche, hier des Glases)	mm

BEISPIEL Eine Taucheruhr wird mit 30 bar geprüft. Das Glas hat 28 mm Durchmesser. Mit welcher Kraft wird es belastet?

Gegeben: $p = 30\,\mathrm{bar}$; $d = 28\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} F &= \frac{p \cdot \pi \cdot d^2}{4} \\ &= \frac{30\,\mathrm{bar} \cdot \pi \cdot (28\,\mathrm{mm})^2}{4} \\ &= 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot 784\,\mathrm{mm}^2}{4} \\ &\approx 1847\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Rund 1850 N, so viel wie die Gewichtskraft von 188 kg. Diese Kraft presst das Glas in seine Dichtung und wölbt es nach innen. Das Beispiel für 10 bar steht bei Formel (2.11).

Geprüft wird meist trocken: Das Prüfgerät setzt die Uhr in einer Kammer unter Überdruck oder Unterdruck und tastet ab, wie sich das Gehäuse verformt. Ein dichtes Gehäuse wird zusammengedrückt oder gewölbt und bleibt so, solange der Druck ansteht. Ist es undicht, gleicht sich der Druck innen und außen aus und die Verformung geht zurück. Bei der Nassprüfung steht die Uhr zuerst über dem Wasser unter Druck, wird dann eingetaucht und der Druck abgelassen; aus einer undichten Uhr steigen Luftblasen auf.

Staudruck bei Bewegung im Wasser

(8.21) VERTIEFUNG

$$p_{\text{dyn}} = \frac{\varrho \cdot v^2}{2}$$

p_{dyn}	Staudruck (zusätzlicher Druck durch die Anströmung)	bar
ϱ	Dichte (des Wassers)	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v	Geschwindigkeit (der Uhr gegenüber dem Wasser)	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Bewegt sich die Uhr durch das Wasser, kommt zum Druck der Tiefe der Staudruck hinzu. Er bleibt klein.

Gilt: gleichmäßige Anströmung; das Wasser wird an der Uhr ganz abgebremst. Das ist der größte Druck, den eine gleichmäßige Bewegung erzeugt; der Schlag beim Aufprall auf die Wasseroberfläche ist damit nicht erfasst.

BEISPIEL Bei einer sehr schnellen Armbewegung fährt das Handgelenk mit 5 m in der Sekunde durch das Wasser.

Gegeben: $\varrho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $v = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\begin{aligned} p_{\text{dyn}} &= \frac{\varrho \cdot v^2}{2} \\ &= \frac{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \\ &= 12\,500\ \text{Pa} \\ &= 0{,}125\ \text{bar} \end{aligned}$$

0,125 bar, so viel wie 1,3 m mehr Tiefe. Schwimmbewegungen erhöhen den Druck also kaum. Wird eine Uhr im Wasser undicht, liegt das meist an gealterten Dichtungen, an Temperaturwechseln oder an Krone und Drückern, die unter Wasser betätigt wurden.

Merksatz: 10 m Wassersäule sind rund 1 bar. Die Kraft auf das Glas ist Druck mal Fläche.

8.6 Magnetismus und Stoß

Magnetfelder und Stöße sind die häufigsten Störungen im Alltag. Normen legen fest, was eine Uhr aushalten muss, um antimagnetisch oder stoßgesichert zu heißen: ISO 764 verlangt ein Feld von $4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$, ISO 1413 einen Stoß wie beim Fall aus 1 m Höhe.

Flussdichte und Feldstärke in Luft

(8.22) MEISTER

$$B = \mu_0 \cdot H$$

B	magnetische Flussdichte ($1\ \frac{\text{V·s}}{\text{m}^2} = 1\,\text{T} = 10\,000\,\text{G}$)	$\frac{\text{V·s}}{\text{m}^2}$
μ_0	magnetische Feldkonstante	$\frac{\text{V·s}}{\text{A·m}}$
H	magnetische Feldstärke	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$

Die Normen nennen die Feldstärke H, Magnete und Messgeräte meist die Flussdichte B in Millitesla oder Gauss. In Luft sind beide fest verknüpft: 1 mT entspricht $796\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und 10 Gauss.

Gilt: in Luft und in nicht magnetischen Stoffen.

BEISPIEL Welcher Flussdichte entspricht die Feldstärke von $4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$, die eine antimagnetische Uhr nach ISO 764 aushalten muss?

Gegeben: $\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{V·s}}{\text{A·m}}$; $H = 4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \cdot H \\ &= 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{V·s}}{\text{A·m}} \cdot 4800\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ &\approx 6{,}03 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{V·s}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

6,03 mT oder 60 Gauss. Ein kleiner Dauermagnet, etwa im Verschluss einer Tasche oder in einem Lautsprecher, ist an seiner Oberfläche um ein Vielfaches stärker.

Magnetfelder in Luft umrechnen

Feldstärke in $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Flussdichte in mT	Flussdichte in Gauss	Beispiel
40	0,05	0,5	Magnetfeld der Erde (Größenordnung)
796	1	10	Umrechnungswert
4800	6,03	60,3	Prüffeld für antimagnetische Uhren nach ISO 764
79 600	100	1000	dicht an kleinen Dauermagneten (Größenordnung)

Gauss ist eine ältere Einheit: 1 G = 0,1 mT. Die Beispiele außer dem Normwert sind Größenordnungen.

Aufprallgeschwindigkeit beim Fall

(8.23) MEISTER

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

v	Geschwindigkeit (beim Aufprall)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h	Höhe (Fallhöhe)	m

Die Stoßprüfung nach ISO 1413 bildet den Fall einer Uhr aus 1 m Höhe auf einen Holzboden nach. Die Formel liefert die Geschwindigkeit, mit der die Uhr aufkommt.

Gilt: freier Fall ohne Luftwiderstand.

BEISPIEL Eine Uhr fällt vom Werktisch 1 m tief auf den Boden.

Gegeben: $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $h = 1\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m}} \\ &\approx 4{,}43\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

$4{,}43\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind rund 16 km in der Stunde. Mit dieser Geschwindigkeit trifft bei der Stoßprüfung der Hammer auf die Uhr.

8.7 Ablesefehler und Streuung

Jede Messung streut. Mittelwert, Spannweite und Standardabweichung einer Messreihe stehen in Abschnitt 12.1; das Beispiel dort ist eine Reihe von Gangwerten. Für die Zeitwaage heißt das zum Beispiel: Streuen zehn Messungen derselben Lage mit einer Standardabweichung von 0,6 s am Tag, ist ihr Mittelwert nach Formel (12.4) auf rund 0,2 s am Tag sicher. Beim Gang aus zwei abgelesenen Ständen kommt der Ablesefehler hinzu.

Fehler des Gangs durch das Ablesen

(8.24) MEISTER

$$u_G = \frac{2 \cdot u_S}{t}$$

u_G	größter Fehler des Gangs durch das Ablesen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
u_S	größter Ablesefehler eines Standes	s
t	Zeit (Laufzeit zwischen den beiden Ablesungen)	d

In den Gang gehen zwei Ablesungen ein. Im ungünstigsten Fall addieren sich ihre Fehler; geteilt durch die Laufzeit ergibt das den größten Fehler des Gangs.

Gilt: Größtfehler; die Uhr läuft zwischen den Ablesungen ungestört.

BEISPIEL Der Stand lässt sich am Sekundenzeiger auf 0,5 s genau ablesen. Zwischen den beiden Ablesungen liegen 10 Tage.

Gegeben: $u_S = 0{,}5\,\mathrm{s}$; $t = 10\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} u_G &= \frac{2 \cdot u_S}{t} \\ &= \frac{2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{s}}{10\,\mathrm{d}} \\ &= 0{,}10\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Nach zehn Tagen ist der Gang auf 0,1 s am Tag sicher, nach einem Tag nur auf 1 s am Tag. Wer schneller ein genaues Ergebnis braucht, nimmt die Zeitwaage.

Merksatz: Länger messen bringt mehr als genauer ablesen: Die doppelte Laufzeit halbiert den Ablesefehler im Gang.

9 Fertigung und Werkstoffe

Wer Teile selbst anfertigt, rechnet anders als beim Regulieren: Drehzahl aus der Schnittgeschwindigkeit, Kegel und Gewinde, Passmaße und Lagerluft, Teilungen am Teilkopf, Zuschnitte für Biegeteile. Dazu kommen die Rechnungen rund um Edelmetalle, das Anlassen und das Galvanisieren.

Einige Formelzeichen haben in diesem Kapitel die in der Fertigung übliche Bedeutung: f ist der Vorschub, T die Toleranz, D und d sind Durchmesser, s ist eine Dicke, α ein Kegel- oder Biegewinkel, m eine Masse, M die molare Masse und A eine Fläche; z ist je nach Abschnitt die Zähnezahl, die Teilzahl oder die Wertigkeit, i die Zahl der Schnitte oder die Übersetzung des Teilkopfs, die ins Langsame geht und im Sinn von Kapitel 4 eine Untersetzung ist. Die Tabellen enthalten Richtwerte für den Anfang; maßgeblich sind das Datenblatt des Werkstoffs und der Versuch am Reststück.

9.1 Schnittdaten

Beim Drehen, Bohren und Fräsen hebt die Schneide einen Span ab. Wie schnell sie das tun darf, sagt die Schnittgeschwindigkeit; aus ihr und dem Durchmesser folgt die Drehzahl. Der Vorschub bestimmt Oberfläche und Bearbeitungszeit.

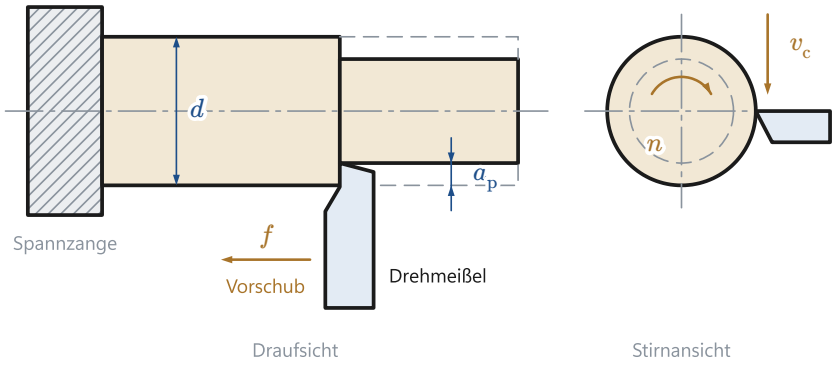


Abb. 9.1 Längsdrehen: Schnittgeschwindigkeit v_c am Umfang, Vorschub f je Umdrehung, Schnitttiefe a_p

Schnittgeschwindigkeit

(9.1) GESELLE

$$v_c = \pi \cdot d \cdot n$$

UMGESTELLT $n = \dfrac{v_c}{\pi \cdot d}$

Die Schnittgeschwindigkeit ist die Umfangsgeschwindigkeit an der Schneide. Sie hängt vom Werkstoff und vom Schneidstoff ab (Richtwerte in der Tabelle); die Drehzahl wird danach gewählt. Allgemein steht sie in Formel (2.6).

Gilt: Drehen, Bohren, Fräsen. Beim Plandrehen und an Kegeln ändert sich der Durchmesser und damit die Schnittgeschwindigkeit; gerechnet wird mit dem größten Durchmesser.

v_c	Schnittgeschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$
d	Durchmesser (an der Schnittstelle: Werkstück beim Drehen, Werkzeug beim Bohren und Fräsen)	mm
n	Drehzahl	$\frac{1}{\text{min}}$

BEISPIEL Eine Messingstange von 8 mm Durchmesser läuft mit 3000 Umdrehungen je Minute. Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit am Umfang?

Gegeben: $d = 8\,\text{mm}$; $n = 3000\,\frac{1}{\text{min}}$

$$\begin{aligned} v_c &= \pi \cdot d \cdot n \\ &= \pi \cdot 8\,\text{mm} \cdot 3000\,\tfrac{1}{\text{min}} \\ &\approx 75\,398\,\frac{\text{mm}}{\text{min}} \\ &\approx 75{,}4\,\tfrac{\text{m}}{\text{min}} \end{aligned}$$

Rund 75 m je Minute. Das passt für Messing mit einem Drehstahl aus Schnellarbeitsstahl.

Drehzahl aus der Schnittgeschwindigkeit (Werkstattformel)

(9.2) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$n = \frac{1000 \cdot v_c}{\pi \cdot d}$$

Dieselbe Formel wie Formel (9.1), nach der Drehzahl umgestellt und auf die üblichen Einheiten zugeschnitten. Der Faktor 1000 rechnet Meter in Millimeter um.

Gilt: v_c in m je Minute, d in mm, n in Umdrehungen je Minute.

n	Drehzahl (Zahlenwert in Umdrehungen je Minute)	$\frac{1}{\text{min}}$
v_c	Schnittgeschwindigkeit (Zahlenwert in m je Minute)	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$
d	Durchmesser (Zahlenwert in mm)	mm

BEISPIEL Ein Stück Silberstahl von 3 mm Durchmesser soll mit einem Drehstahl aus Schnellarbeitsstahl bei 25 m je Minute gedreht werden. Welche Drehzahl wird eingestellt?

Gegeben: $v_c = 25\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $d = 3\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1000 \cdot v_c}{\pi \cdot d} \\ &= \frac{1000 \cdot 25}{\pi \cdot 3} \\ &\approx 2653\,\tfrac{1}{\text{min}} \end{aligned}$$

Rund 2650 Umdrehungen je Minute. An der Maschine wird die nächstniedrigere Stufe gewählt.

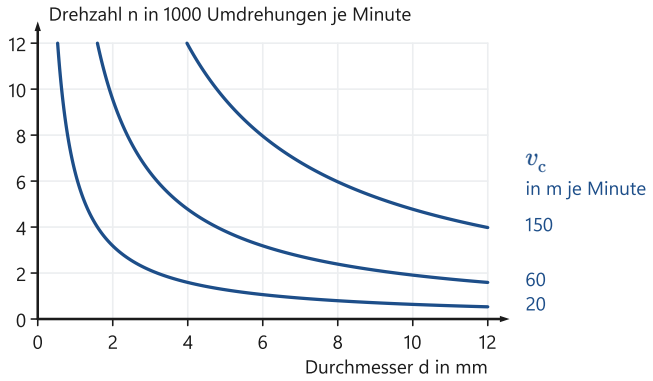


Abb. 9.2 Drehzahl über dem Durchmesser für drei Schnittgeschwindigkeiten: Je kleiner der Durchmesser, desto höher die Drehzahl

Schnittgeschwindigkeit beim Drehen (Richtwerte in m je Minute)

Werkstoff	Schnellarbeitsstahl (HSS)	Hartmetall
Messing, bleihaltig (CuZn39Pb3)	60 … 120	150 … 400
Neusilber, bleihaltig (CuNi18Zn19Pb1)	40 … 80	100 … 200
Automatenstahl (11SMnPb30)	40 … 70	120 … 250
Werkzeugstahl, weichgeglüht (Silberstahl 115CrV3)	20 … 30	60 … 120
Stahl, gehärtet und blau angelassen	–	25 … 40
Edelstahl, austenitisch (1.4404, 1.4435)	10 … 20	60 … 120
Titan (Grade 2 und Grade 5)	8 … 15	30 … 60

Anhaltswerte für das Drehen mit scharfer Schneide. Auf der Uhrmacherdrehbank und mit dem Handstichel am unteren Wert beginnen; für das Reiben und Gewindeschneiden höchstens die Hälfte ansetzen. Gehärteten, blau angelassenen Stahl schneidet Schnellarbeitsstahl nur noch als Handstichel bei kleiner Geschwindigkeit und mit häufigem Nachschärfen; auf der Maschine wird Hartmetall genommen. Edelstahl und Titan brauchen Kühlschmierstoff und einen stetigen Vorschub.

Vorschubgeschwindigkeit beim Drehen und Bohren

(9.3) GESELLE

$$v_\mathrm{f} = f \cdot n$$

Der Vorschub je Umdrehung bestimmt die Oberfläche: kleiner Vorschub, feinere Drehriefen. Die Vorschubgeschwindigkeit sagt, wie schnell der Schlitten dabei fährt.

v_f	Vorschubgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$
f	Vorschub je Umdrehung	mm
n	Drehzahl	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Der Längsschlitten rückt je Umdrehung um 0,02 mm vor, die Spindel läuft mit 2500 Umdrehungen je Minute.

Gegeben: $f = 0{,}02\,\mathrm{mm}; \quad n = 2500\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} v_\mathrm{f} &= f \cdot n \\ &= 0{,}02\,\mathrm{mm} \cdot 2500\,\tfrac{1}{\mathrm{min}} \\ &= 50\,\tfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Der Drehstahl legt 50 mm in der Minute zurück.

Vorschubgeschwindigkeit beim Fräsen

(9.4) GESELLE

$$v_\mathrm{f} = f_\mathrm{z} \cdot z \cdot n$$

Jede Schneide nimmt einen Span der Dicke f_z ab. Ist der Zahnvorschub zu klein, reibt der Fräser nur und wird stumpf; ist er zu groß, bricht er.

Gilt: Als Anhalt für kleine Fräser: Zahnvorschub rund 0,5 % bis 1 % des Fräserdurchmessers.

v_f	Vorschubgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$
f_z	Vorschub je Zahn	mm
z	Zähnezahl (Schneiden des Fräsers)	1
n	Drehzahl	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Ein Hartmetallfräser mit 1 mm Durchmesser und 2 Schneiden läuft in Messing mit 20 000 Umdrehungen je Minute. Je Zahn soll er 0,005 mm abnehmen.

Gegeben: $f_\mathrm{z} = 0{,}005\,\mathrm{mm}; \quad z = 2; \quad n = 20\,000\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} v_\mathrm{f} &= f_\mathrm{z} \cdot z \cdot n \\ &= 0{,}005\,\mathrm{mm} \cdot 2 \cdot 20\,000\,\tfrac{1}{\mathrm{min}} \\ &= 200\,\tfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Der Tisch fährt mit 200 mm je Minute. Die Schnittgeschwindigkeit liegt dabei nach Formel (9.1) bei 63 m je Minute.

Hauptzeit beim Drehen und Bohren

(9.5) GESELLE

$$t_\mathrm{h} = \frac{L \cdot i}{f \cdot n}$$

Die Hauptzeit ist der Vorschubweg aller Schnitte geteilt durch die Vorschubgeschwindigkeit. Sie ist die Grundlage für die Kalkulation von Drehteilen.

Gilt: gleiche Drehzahl und gleicher Vorschub in allen Schnitten.

t_h	Hauptzeit (Zeit, in der das Werkzeug im Vorschub läuft)	min
L	Länge (Vorschubweg: Werkstücklänge mit Anlauf und Überlauf)	mm
i	Anzahl (der Schnitte)	1
f	Vorschub je Umdrehung	mm
n	Drehzahl	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Ein Zapfen wird auf 10 mm Länge in 3 Schnitten überdreht, mit Anlauf und Überlauf sind es 12 mm Vorschubweg. Vorschub 0,02 mm, Drehzahl 2500 Umdrehungen je Minute.

Gegeben: $L = 12\,\mathrm{mm}; \quad i = 3; \quad f = 0{,}02\,\mathrm{mm}; \quad n = 2500\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{h} &= \frac{L \cdot i}{f \cdot n} \\ &= \frac{12\,\mathrm{mm} \cdot 3}{0{,}02\,\mathrm{mm} \cdot 2500\,\frac{1}{\mathrm{min}}} \\ &= 0{,}72\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

Die Maschine schneidet 0,72 Minuten, das sind 43 Sekunden. Rüsten, Messen und Rücklauf kommen dazu.

Zeitspanvolumen beim Drehen

(9.6) VERTIEFUNG

$$Q = a_\mathrm{p} \cdot f \cdot v_\mathrm{c}$$

Schnitttiefe mal Vorschub ist der Querschnitt des Spans, die Schnittgeschwindigkeit seine Länge je Zeit. Mit dem Zeitspanvolumen vergleicht man Schnittdaten und schätzt die nötige Antriebsleistung.

Gilt: Längsdrehen; Schnittgeschwindigkeit am mittleren Durchmesser des Schnitts.

Q	Zeitspanvolumen (abgetragenes Volumen je Zeit)	$\frac{\mathrm{mm}^3}{\mathrm{min}}$
a_p	Schnitttiefe (halbe Durchmesserabnahme je Schnitt)	mm
f	Vorschub je Umdrehung	mm
v_c	Schnittgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Messing wird mit 0,5 mm Schnitttiefe, 0,05 mm Vorschub und 75 m je Minute geschruppt.

Gegeben: $a_\mathrm{p} = 0{,}5\,\mathrm{mm}$; $f = 0{,}05\,\mathrm{mm}$; $v_\mathrm{c} = 75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} Q &= a_\mathrm{p} \cdot f \cdot v_\mathrm{c} \\ &= 0{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}05\,\mathrm{mm} \cdot 75\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} \\ &= 0{,}025\,\mathrm{mm}^2 \cdot 75\,000\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}} \\ &= 1875\ \tfrac{\mathrm{mm}^3}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Je Minute werden knapp 1,9 cm³ Messing zerspant.

Merksatz: Kleiner Durchmesser, hohe Drehzahl: Der halbe Durchmesser verlangt die doppelte Drehzahl.

9.2 Kegel und Neigung

Ein Kegel ist durch zwei Durchmesser und die Länge bestimmt oder durch das Kegelverhältnis. Zum Drehen braucht man den halben Kegelwinkel oder die Reitstockverstellung.

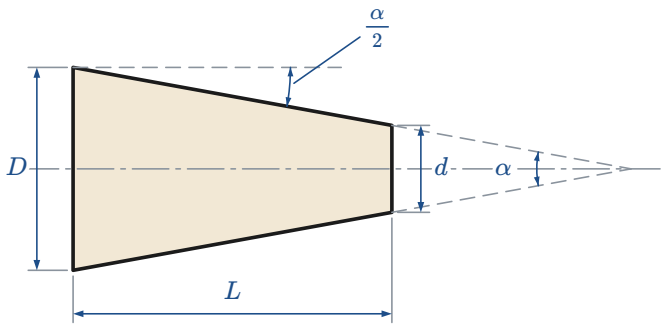


Abb. 9.3 Kegel: Durchmesser D und d, Länge L, Kegelwinkel α und Einstellwinkel $\frac{\alpha}{2}$ (zur Verdeutlichung steiler gezeichnet)

Kegelverhältnis (Verjüngung)

(9.7) GESELLE

$$C = \frac{D - d}{L}$$

UMGESTELLT $d = D - C \cdot L$

Das Kegelverhältnis sagt, um wie viel der Durchmesser je Länge abnimmt. 1 : 50 heißt: auf 50 mm Länge wird der Kegel um 1 mm dünner.

C	Kegelverhältnis (geschrieben als $1 : x$ mit $x = \frac{1}{C}$)	1
D	Durchmesser (großer Kegeldurchmesser)	mm
d	Durchmesser (kleiner Kegeldurchmesser)	mm
L	Länge (Kegellänge, in Achsrichtung gemessen)	mm

Gut zu wissen: Die Neigung bezieht sich auf die Mittellinie und ist halb so groß wie das Kegelverhältnis: Ein Kegel 1 : 50 hat die Neigung 1 : 100.

BEISPIEL Ein Kegelstift ist 20 mm lang und misst am dünnen Ende 2,0 mm, am dicken Ende 2,4 mm.

Gegeben: $D = 2{,}4\,\text{mm}$; $d = 2{,}0\,\text{mm}$; $L = 20\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{D - d}{L} \\ &= \frac{2{,}4\,\text{mm} - 2{,}0\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} \\ &= 0{,}02 \end{aligned}$$

Das Kegelverhältnis ist 0,02, also 1 : 50. So sind Kegelstifte genormt.

Kegelwinkel und Einstellwinkel

(9.8) GESELLE

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D - d}{2 \cdot L}$$

UMGESTELLT $\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{D - d}{2 \cdot L}\right)$

Beim Kegeldrehen mit dem Oberschlitten wird dieser um den halben Kegelwinkel geschwenkt. Der halbe Kegelwinkel heißt deshalb Einstellwinkel.

α	Kegelwinkel (voller Winkel an der Kegelspitze; $\frac{\alpha}{2}$ ist der Einstellwinkel)	°
D	Durchmesser (großer Kegeldurchmesser)	mm
d	Durchmesser (kleiner Kegeldurchmesser)	mm
L	Länge (Kegellänge, in Achsrichtung gemessen)	mm

Gut zu wissen: Für schlanke Kegel genügt: Einstellwinkel in Grad ≈ 28,65 · C. Ein Kegel 1 : 50 hat damit den Einstellwinkel 0,573°.

BEISPIEL Der konische Sitz einer Welle verjüngt sich auf 5 mm Länge von 1,2 mm auf 1,0 mm. Auf welchen Winkel wird der Oberschlitten geschwenkt?

Gegeben: $D = 1{,}2\,\text{mm}$; $d = 1{,}0\,\text{mm}$; $L = 5\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{D - d}{2 \cdot L}\right) \\ &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1{,}2\,\text{mm} - 1{,}0\,\text{mm}}{2 \cdot 5\,\text{mm}}\right) \\ &= 2 \cdot \arctan 0{,}02 \\ &\approx 2{,}29^\circ \end{aligned}$$

Der Kegelwinkel beträgt 2,29°. Der Oberschlitten wird auf die Hälfte gestellt, also auf rund 1,15°.

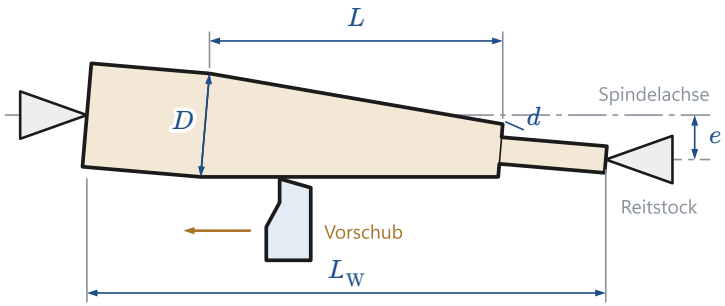


Abb. 9.4 Kegeldrehen zwischen Spitzen: Der Reitstock ist um e verstellt, der Drehmeißel läuft parallel zur Spindelachse (Draufsicht, übertrieben)

Reitstockverstellung

(9.9) NÄHERUNG GESELLE

$$e \approx \frac{L_W \cdot (D - d)}{2 \cdot L}$$

Steht die Reitstockspitze seitlich versetzt, liegt das Werkstück schräg zur Spindelachse, und der längs laufende Drehmeißel dreht einen Kegel. Reicht der Kegel über die ganze Werkstücklänge, ist die Verstellung der halbe Durchmesserunterschied.

Gilt: Drehen zwischen Spitzen, nur für schlanke Kegel. Als Richtwert soll die Verstellung höchstens ein Fünfzigstel der Werkstücklänge betragen.

e	Reitstockverstellung (seitlicher Versatz der Reitstockspitze)	mm
L_W	Länge (Werkstück zwischen den Spitzen)	mm
D	Durchmesser (großer Kegeldurchmesser)	mm
d	Durchmesser (kleiner Kegeldurchmesser)	mm
L	Länge (Kegellänge, in Achsrichtung gemessen)	mm

Aber Vorsicht: Mit verstelltem Reitstock sitzen die Zentrierbohrungen schief auf den Spitzen. Deshalb nur kleine Verstellungen wählen, nach dem ersten Schnitt messen und nachstellen.

BEISPIEL Ein Werkstück von 60 mm Länge soll auf 30 mm Länge einen Kegel 1 : 50 bekommen, von 4,0 mm auf 3,4 mm.

Gegeben: $L_W = 60\,\mathrm{mm}$; $D = 4{,}0\,\mathrm{mm}$; $d = 3{,}4\,\mathrm{mm}$; $L = 30\,\mathrm{mm}$

$$e \approx \frac{L_W \cdot (D - d)}{2 \cdot L}$$
$$= \frac{60\,\mathrm{mm} \cdot (4{,}0\,\mathrm{mm} - 3{,}4\,\mathrm{mm})}{2 \cdot 30\,\mathrm{mm}}$$
$$= 0{,}60\,\mathrm{mm}$$

Der Reitstock wird um 0,60 mm zum Drehmeißel hin verstellt; das dünne Ende des Kegels liegt dann am Reitstock. Die Verstellung ist ein Hundertstel der Werkstücklänge und damit zulässig.

9.3 Gewinde

Heutige Uhrenschrauben haben metrische Spitzgewinde mit 60° Flankenwinkel. Alle Maße des Profils folgen aus dem Nenndurchmesser d und der Steigung P.

Steigung aus der Gangzahl (Zollgewinde)

(9.10) GESELLE

$$P = \frac{1}{n_\mathrm{G}}$$

P	Gewindesteigung	mm
n_G	Gangzahl (Gewindegänge je Länge, bei Zollgewinden je Zoll)	$\frac{1}{\mathrm{in}}$

Die Steigung ist der Weg, den eine Schraube bei einer Umdrehung zurücklegt. Bei metrischen Gewinden steht sie in der Bezeichnung, bei Zollgewinden wird stattdessen die Gangzahl je Zoll angegeben.

Gilt: eingängige Gewinde.

BEISPIEL Ein Gewinde an einer englischen Uhr hat 40 Gänge je Zoll.

Gegeben: $n_\mathrm{G} = 40\ \frac{1}{\mathrm{in}}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n_\mathrm{G}} \\ &= \frac{1}{40\ \frac{1}{\mathrm{in}}} \\ &= \frac{25{,}4\,\mathrm{mm}}{40} \\ &= 0{,}635\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Steigung beträgt 0,635 mm, denn ein Zoll sind 25,4 mm.

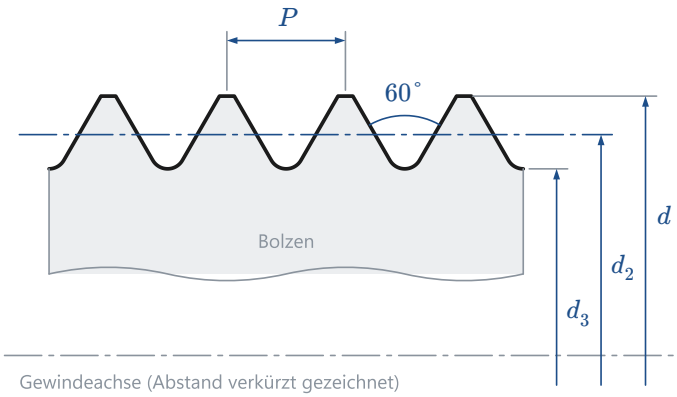


Abb. 9.5 Metrisches ISO-Gewinde, Profil des Bolzens: Steigung P, Außendurchmesser d, Flankendurchmesser d_2, Kerndurchmesser d_3

Flankendurchmesser

(9.11) MEISTER

$$d_2 = d - 0{,}6495 \cdot P$$

d_2	Flankendurchmesser	mm
d	Durchmesser (Nenndurchmesser des Gewindes, außen am Bolzen)	mm
P	Gewindesteigung	mm

Auf dem Flankendurchmesser sind Gewindezahn und Lücke gleich breit. Er entscheidet, wie Schraube und Mutter zueinander passen, und wird mit Lehren oder über Messdrähte geprüft.

Gilt: metrisches ISO-Gewinde mit 60° Flankenwinkel, Nennmaß ohne Toleranz. Der Faktor ist $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3}$.

BEISPIEL Gewinde M 1,6 mit der Steigung 0,35 mm.

Gegeben: $d = 1{,}6\,\mathrm{mm}; \quad P = 0{,}35\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} d_2 &= d - 0{,}6495 \cdot P \\ &= 1{,}6\,\mathrm{mm} - 0{,}6495 \cdot 0{,}35\,\mathrm{mm} \\ &\approx 1{,}373\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der Flankendurchmesser beträgt 1,373 mm.

Kerndurchmesser des Bolzens

(9.12) MEISTER

$$d_3 = d - 1{,}2269 \cdot P$$

Der Kerndurchmesser ist der tragende Querschnitt der Schraube. Dort reißt eine überdrehte Schraube ab.

Gilt: metrisches ISO-Gewinde ab M 1 (Gewindetiefe $0{,}6134 \cdot P$). Für die Miniaturgewinde S 0,3 bis S 1,4 ist die Gewindetiefe kleiner: $d_3 = d - 1{,}12 \cdot P$.

d_3	Kerndurchmesser (im Gewindegrund des Bolzens)	mm
d	Durchmesser (Nenndurchmesser des Gewindes, außen am Bolzen)	mm
P	Gewindesteigung	mm

BEISPIEL Gewinde M 1,6 mit der Steigung 0,35 mm.

Gegeben: $d = 1{,}6\,\text{mm}; \quad P = 0{,}35\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} d_3 &= d - 1{,}2269 \cdot P \\ &= 1{,}6\,\text{mm} - 1{,}2269 \cdot 0{,}35\,\text{mm} \\ &\approx 1{,}171\,\text{mm} \end{aligned}$$

Im Gewindegrund ist die Schraube noch 1,171 mm dick.

Kernlochdurchmesser

(9.13) NÄHERUNG GESELLE

$$d_\text{K} \approx d - P$$

Auf diesen Durchmesser wird gebohrt, bevor der Gewindebohrer das Profil schneidet.

Gilt: metrische Gewinde mit 60° Flankenwinkel. In zähen Werkstoffen wie Stahl und Neusilber eher eine Bohrerstufe größer wählen, damit der Gewindebohrer nicht klemmt.

d_K	Kernlochdurchmesser (Bohrung vor dem Gewindeschneiden)	mm
d	Durchmesser (Nenndurchmesser des Gewindes, außen am Bolzen)	mm
P	Gewindesteigung	mm

BEISPIEL Für eine Schraube M 1,2 mit der Steigung 0,25 mm soll ein Gewinde geschnitten werden.

Gegeben: $d = 1{,}2\,\text{mm}; \quad P = 0{,}25\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} d_\text{K} &\approx d - P \\ &= 1{,}2\,\text{mm} - 0{,}25\,\text{mm} \\ &= 0{,}95\,\text{mm} \end{aligned}$$

Gebohrt wird mit 0,95 mm.

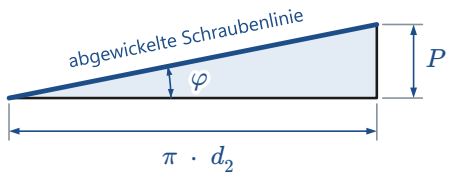


Abb. 9.6 Ein abgewickelter Gewindegang: Steigung P über dem Umfang am Flankendurchmesser

Steigungswinkel

(9.14) MEISTER

$$\tan\varphi = \frac{P}{\pi \cdot d_2}$$

UMGESTELLT $\varphi = \arctan\left(\frac{P}{\pi \cdot d_2}\right)$

φ	Steigungswinkel (am Flankendurchmesser)	°
P	Gewindesteigung	mm
d_2	Flankendurchmesser	mm

Wickelt man einen Gewindegang ab, entsteht ein Keil: Höhe P, Grundlinie der Umfang am Flankendurchmesser. Ist der Steigungswinkel kleiner als der Reibungswinkel (Kapitel 2), löst sich die Schraube nicht von selbst.

Gilt: eingängige Gewinde.

BEISPIEL Gewinde M 1,6: Steigung 0,35 mm, Flankendurchmesser 1,373 mm.

Gegeben: $P = 0{,}35\,\text{mm}$; $d_2 = 1{,}373\,\text{mm}$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\left(\frac{P}{\pi \cdot d_2}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{0{,}35\,\text{mm}}{\pi \cdot 1{,}373\,\text{mm}}\right)\\ &\approx \arctan 0{,}0811\\ &\approx 4{,}64^\circ\end{aligned}$$

Der Steigungswinkel beträgt 4,64°. Er liegt unter dem Reibungswinkel, die Schraube hält also von selbst.

Metrische Uhren- und Feingewinde (Nennmaße in mm)

Gewinde	Steigung P	Flankendurchmesser d_2	Kerndurchmesser d_3	Kernlochbohrer
S 0,3	0,08	0,248	0,210	0,22
S 0,4	0,1	0,335	0,288	0,30
S 0,5	0,125	0,419	0,360	0,38
S 0,6	0,15	0,503	0,432	0,45
S 0,7	0,175	0,586	0,504	0,53
S 0,8	0,2	0,670	0,576	0,60
S 0,9	0,225	0,754	0,648	0,68
M 1	0,25	0,838	0,693	0,75
M 1,2	0,25	1,038	0,893	0,95
M 1,4	0,3	1,205	1,032	1,10
M 1,6	0,35	1,373	1,171	1,25
M 2	0,4	1,740	1,509	1,60

S: ISO-Miniaturgewinde (Kerndurchmesser mit $d - 1{,}12 \cdot P$ gerechnet). M: metrisches ISO-Regelgewinde. Kernlochbohrer nach Formel (9.13), auf 0,01 mm gerundet. Schrauben älterer Werke weichen oft von der Norm ab; im Zweifel Durchmesser und Steigung messen.

Merksatz: Kernloch gleich Nenndurchmesser minus Steigung.

9.4 Passungen und Toleranzen

Kein Teil lässt sich genau auf Maß fertigen. Die Zeichnung gibt deshalb zwei Grenzmaße vor, zwischen denen das Istmaß liegen muss. Ob zwei Teile mit Spiel oder mit Übermaß zusammenpassen, entscheidet die Lage ihrer Toleranzfelder.

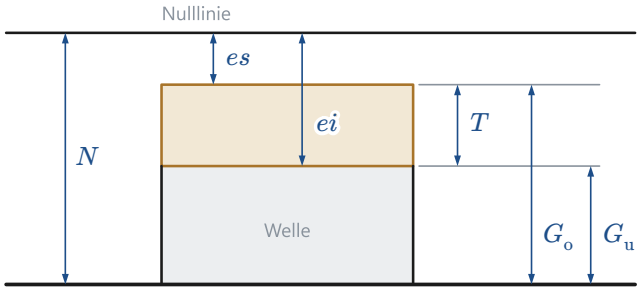


Abb. 9.7 Grenzmaße einer Welle: Nennmaß N, Abmaße es und ei, Höchstmaß G_o, Mindestmaß G_u, Toleranz T (Toleranzfeld stark vergrößert)

Höchstmaß und Mindestmaß

(9.15) GESELLE

$$G_o = N + es$$

Die Abmaße werden mit ihrem Vorzeichen zum Nennmaß addiert. Für das Mindestmaß gilt entsprechend $G_u = N + ei$ mit dem unteren Abmaß ei.

Gilt: Wellen und alle Außenmaße; für Bohrungen und Innenmaße mit ES und EI.

G_o	Höchstmaß	mm
N	Nennmaß	mm
es	oberes Abmaß (+ heißt: über dem Nennmaß; bei Bohrungen ES)	mm

BEISPIEL Eine Welle hat das Nennmaß 2 mm und die Abmaße −0,006 mm und −0,016 mm (Toleranzfeld f7).

Gegeben: $N = 2\,\mathrm{mm}$; $es = -0{,}006\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} G_o &= N + es \\ &= 2\,\mathrm{mm} + (-0{,}006\,\mathrm{mm}) \\ &= 1{,}994\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Höchstmaß ist 1,994 mm. Mit dem unteren Abmaß folgt das Mindestmaß 1,984 mm.

Toleranz

(9.16) GESELLE

$$T = es - ei$$

Die Toleranz ist der Abstand der beiden Grenzmaße: $T = G_o - G_u$. Sie hat kein Vorzeichen.

T	Toleranz (zulässiger Unterschied zwischen Höchstmaß und Mindestmaß)	mm
es	oberes Abmaß (+ heißt: über dem Nennmaß; bei Bohrungen ES)	mm
ei	unteres Abmaß (+ heißt: über dem Nennmaß; bei Bohrungen EI)	mm

BEISPIEL Welle mit den Abmaßen −0,006 mm und −0,016 mm.

Gegeben: $es = -0{,}006\,\mathrm{mm}$; $ei = -0{,}016\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} T &= es - ei \\ &= -0{,}006\,\mathrm{mm} - (-0{,}016\,\mathrm{mm}) \\ &= 0{,}010\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Toleranz beträgt 0,010 mm: Um so viel darf der Durchmesser von Teil zu Teil schwanken.

Wie zwei Teile zusammenpassen, hängt von der Lage der Toleranzfelder ab. **Spielpassung:** Die Bohrung ist immer größer als die Welle, etwa bei einem Zapfen im Lager. **Presspassung:** Die Welle ist immer größer als die Bohrung,

etwa bei einem Lagerstein in der Platine oder einem Rad auf seiner Welle. **Übergangspassung:** Je nach den Istmaßen entsteht ein kleines Spiel oder ein kleines Übermaß, etwa bei einem Stellstift.

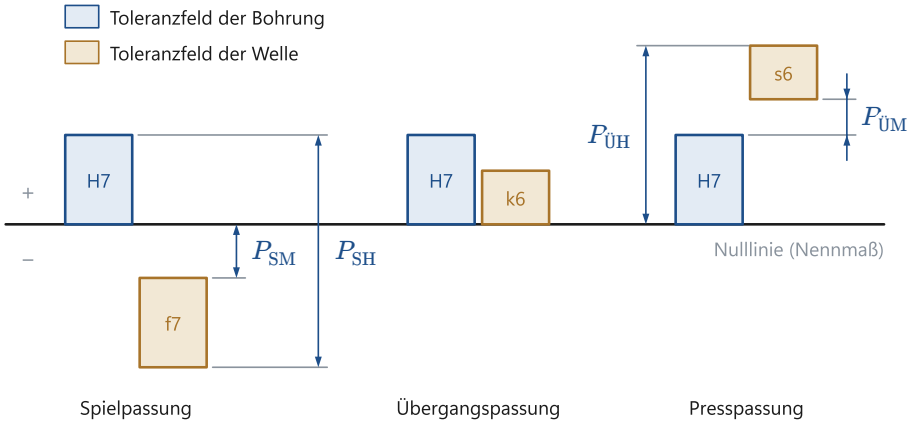


Abb. 9.8 Toleranzfelder von Bohrung und Welle, bezogen auf die Nulllinie, für drei Passungen mit der Bohrung H7

Höchstspiel

(9.17) GESELLE

$$P_{SH} = G_{oB} - G_{uW}$$

Das größte Spiel entsteht, wenn die größte zulässige Bohrung auf die kleinste zulässige Welle trifft.

P_{SH}	Höchstspiel	mm
G_{oB}	Höchstmaß (Bohrung)	mm
G_{uW}	Mindestmaß (Welle)	mm

BEISPIEL Bohrung 2 mm mit den Abmaßen 0 und +0,010 mm (H7), Welle 2 mm mit −0,006 mm und −0,016 mm (f7).

Gegeben: $G_{oB} = 2{,}010\,\text{mm}$; $G_{uW} = 1{,}984\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} P_{SH} &= G_{oB} - G_{uW} \\ &= 2{,}010\,\text{mm} - 1{,}984\,\text{mm} \\ &= 0{,}026\,\text{mm} \end{aligned}$$

Größte Bohrung und kleinste Welle ergeben 0,026 mm Spiel.

Mindestspiel

(9.18) GESELLE

$$P_{SM} = G_{uB} - G_{oW}$$

Das kleinste Spiel entsteht, wenn die kleinste Bohrung auf die größte Welle trifft. Bleibt es positiv, lässt sich jedes Paar fügen.

P_{SM}	Mindestspiel (ein negativer Wert ist ein Übermaß)	mm
G_{uB}	Mindestmaß (Bohrung)	mm
G_{oW}	Höchstmaß (Welle)	mm

BEISPIEL Dieselbe Passung: Bohrung 2,000 mm bis 2,010 mm, Welle 1,984 mm bis 1,994 mm.

Gegeben: $G_{uB} = 2{,}000\,\text{mm}$; $G_{oW} = 1{,}994\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} P_{SM} &= G_{uB} - G_{oW} \\ &= 2{,}000\,\text{mm} - 1{,}994\,\text{mm} \\ &= 0{,}006\,\text{mm} \end{aligned}$$

Auch im ungünstigsten Fall bleiben 0,006 mm Spiel: Es ist eine Spielpassung.

Höchstübermaß

(9.19) GESELLE

$$P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{H}} = G_{\mathrm{oW}} - G_{\mathrm{uB}}$$

$P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{H}}$	Höchstübermaß	mm
G_{oW}	Höchstmaß (Welle)	mm
G_{uB}	Mindestmaß (Bohrung)	mm

Bei der Presspassung ist das Innenteil größer als die Bohrung. Der Unterschied heißt Übermaß; er wird beim Einpressen elastisch aufgenommen und hält das Teil fest.

Gilt: Das Innenteil (hier der Stein) zählt als Welle.

BEISPIEL Ein Lagerstein mit 1,200 mm bis 1,204 mm Durchmesser wird in eine Bohrung gepresst, die auf 1,190 mm bis 1,194 mm gerieben ist.

Gegeben: $G_{\mathrm{oW}} = 1{,}204\,\mathrm{mm}$; $G_{\mathrm{uB}} = 1{,}190\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{H}} &= G_{\mathrm{oW}} - G_{\mathrm{uB}} \\ &= 1{,}204\,\mathrm{mm} - 1{,}190\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}014\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Der größte Stein ist 0,014 mm dicker als die kleinste Bohrung.

Mindestübermaß

(9.20) GESELLE

$$P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{M}} = G_{\mathrm{uW}} - G_{\mathrm{oB}}$$

$P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{M}}$	Mindestübermaß	mm
G_{uW}	Mindestmaß (Welle)	mm
G_{oB}	Höchstmaß (Bohrung)	mm

Das Mindestübermaß entscheidet, ob der Sitz in jedem Fall hält.

Gut zu wissen: Lagersteine werden mit rund 0,01 mm Übermaß eingepresst: Die Bohrung wird um diesen Betrag kleiner gerieben als der Stein. Bei zu wenig Übermaß wandert der Stein, bei zu viel kann er springen oder die Platine verformen.

BEISPIEL Derselbe Lagerstein: Stein 1,200 mm bis 1,204 mm, Bohrung 1,190 mm bis 1,194 mm.

Gegeben: $G_{\mathrm{uW}} = 1{,}200\,\mathrm{mm}$; $G_{\mathrm{oB}} = 1{,}194\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} P_{\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{M}} &= G_{\mathrm{uW}} - G_{\mathrm{oB}} \\ &= 1{,}200\,\mathrm{mm} - 1{,}194\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}006\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Auch der kleinste Stein sitzt noch mit 0,006 mm Übermaß in der größten Bohrung.

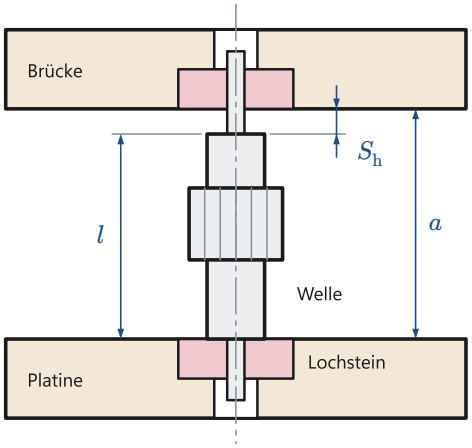


Abb. 9.9 Höhenluft S_h: Abstand a der Lagerflächen minus Länge l zwischen den Ansätzen (Luft übertrieben)

Höhenluft einer Welle

(9.21) GESELLE

$$S_\mathrm{h} = a - l$$

Jede Welle braucht in Achsrichtung etwas Luft, sonst klemmt sie zwischen den Lagern. Bei Lagern mit Decksteinen zählen statt der Ansätze die Zapfenenden und der Abstand der beiden Decksteine.

S_h	Höhenluft (Spiel der Welle in Achsrichtung)	mm
a	Abstand (der Lagerflächen; Innenflächen der beiden Lochsteine oder Lager)	mm
l	Länge (Welle zwischen den beiden Ansätzen)	mm

BEISPIEL Die Lochsteine eines Kleinbodenrads haben 2,45 mm Abstand, die Welle misst zwischen den Ansätzen 2,42 mm.

Gegeben: $a = 2{,}45\,\mathrm{mm}$; $l = 2{,}42\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} S_\mathrm{h} &= a - l \\ &= 2{,}45\,\mathrm{mm} - 2{,}42\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}03\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Welle hat 0,03 mm Höhenluft, ein üblicher Wert für das Räderwerk einer Armbanduhr.

Größte Höhenluft

(9.22) MEISTER

$$S_\mathrm{h,max} = a_\mathrm{max} - l_\mathrm{min}$$

Die größte Luft entsteht aus dem größten Abstand und der kürzesten Welle.

$S_\mathrm{h,max}$	Höhenluft (Größtwert)	mm
a_max	Abstand der Lagerflächen (Höchstmaß)	mm
l_min	Länge (Welle zwischen den Ansätzen, Mindestmaß)	mm

BEISPIEL Abstand der Lochsteine 2,45 mm ± 0,01 mm, Wellenlänge zwischen den Ansätzen 2,42 mm ± 0,005 mm.

Gegeben: $a_\mathrm{max} = 2{,}46\,\mathrm{mm}$; $l_\mathrm{min} = 2{,}415\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} S_\mathrm{h,max} &= a_\mathrm{max} - l_\mathrm{min} \\ &= 2{,}46\,\mathrm{mm} - 2{,}415\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}045\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Im ungünstigsten Fall hat die Welle 0,045 mm Luft.

Kleinste Höhenluft

(9.23) MEISTER

$$S_\mathrm{h,min} = a_\mathrm{min} - l_\mathrm{max}$$

Die kleinste Luft entsteht aus dem kleinsten Abstand und der längsten Welle. Sie muss größer als null bleiben.

$S_\mathrm{h,min}$	Höhenluft (Kleinstwert)	mm
a_min	Abstand der Lagerflächen (Mindestmaß)	mm
l_max	Länge (Welle zwischen den Ansätzen, Höchstmaß)	mm

BEISPIEL Dieselben Maße: Abstand 2,45 mm ± 0,01 mm, Wellenlänge 2,42 mm ± 0,005 mm.

Gegeben: $a_\mathrm{min} = 2{,}44\,\mathrm{mm}$; $l_\mathrm{max} = 2{,}425\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} S_\mathrm{h,min} &= a_\mathrm{min} - l_\mathrm{max} \\ &= 2{,}44\,\mathrm{mm} - 2{,}425\,\mathrm{mm} \\ &= 0{,}015\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Mindestens 0,015 mm Luft bleiben immer. Die Welle klemmt also in keinem Fall.

Toleranz der Höhenluft (Toleranzkette)

(9.24) MEISTER

$$T_{\text{Luft}} = T_a + T_l$$

In einer Maßkette addieren sich die Toleranzen aller beteiligten Maße. Die Luft schwankt deshalb stärker als jedes einzelne Maß.

Gilt: arithmetische Rechnung für den ungünstigsten Fall; gilt ebenso für Ketten mit mehr als zwei Maßen.

T_{Luft}	Toleranz (Höhenluft)	mm
T_a	Toleranz (Abstand der Lagerflächen)	mm
T_l	Toleranz (Wellenlänge)	mm

Gut zu wissen: Soll die Luft enger liegen, als die Summe der Toleranzen erlaubt, wird beim Zusammenbau eingestellt: Der eingepresste Lagerstein wird verschoben, bis die Höhenluft stimmt.

BEISPIEL Der Abstand der Lochsteine ist auf ± 0,01 mm toleriert (Toleranz 0,02 mm), die Wellenlänge auf ± 0,005 mm (Toleranz 0,01 mm).

Gegeben: $T_a = 0{,}02\,\text{mm}; \quad T_l = 0{,}01\,\text{mm}$

$$\begin{aligned} T_{\text{Luft}} &= T_a + T_l \\ &= 0{,}02\,\text{mm} + 0{,}01\,\text{mm} \\ &= 0{,}03\,\text{mm} \end{aligned}$$

Die Höhenluft schwankt um 0,03 mm, nämlich zwischen 0,015 mm und 0,045 mm.

9.5 Teilen

Zum Fräsen von Rädern, Trieben und Teilungen wird das Werkstück nach jedem Schnitt um einen festen Winkel weitergedreht. Beim direkten Teilen rastet die Spindel selbst an einer Teilscheibe ein. Beim indirekten Teilen dreht eine Kurbel die Spindel über ein Schneckengetriebe, meist mit der Übersetzung 40 : 1.

Teilwinkel

(9.25) GESELLE

$$\tau = \frac{360^\circ}{z}$$

Der volle Umfang wird in z gleiche Teile geteilt.

τ	Teilwinkel (Drehwinkel des Werkstücks je Teilschritt)	°
z	Teilzahl (Zahl der gleichen Teile am Umfang, zum Beispiel die Zähnezahl)	1

BEISPIEL Ein Trieb mit 12 Zähnen wird gefräst.

Gegeben: $z = 12$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{360^\circ}{z} \\ &= \frac{360^\circ}{12} \\ &\approx 30^\circ \end{aligned}$$

Nach jedem Zahn wird der Trieb um 30° weitergedreht. Für das Hemmungsrad heißt derselbe Winkel Teilung, Formel (7.1).

Direktes Teilen

(9.26) GESELLE

$$n_{\mathrm{L}} = \frac{N_{\mathrm{L}}}{z}$$

n_{L}	Lochabstände je Teilschritt	1
N_{L}	Lochzahl des Lochkreises	1
z	Teilzahl (Zahl der gleichen Teile am Umfang, zum Beispiel die Zähnezahl)	1

Beim direkten Teilen sitzt die Teilscheibe auf der Spindel, die das Werkstück trägt, und der Raststift greift unmittelbar in den Lochkreis.

Gilt: Die Lochzahl muss durch die Teilzahl teilbar sein.

BEISPIEL Die Teilscheibe an der Spindel hat einen Lochkreis mit 60 Löchern. Gefräst werden soll ein Trieb mit 12 Zähnen.

Gegeben: $N_{\mathrm{L}} = 60; \quad z = 12$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{L}} &= \frac{N_{\mathrm{L}}}{z} \\ &= \frac{60}{12} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Nach jedem Zahn wird um 5 Lochabstände weitergeschaltet.

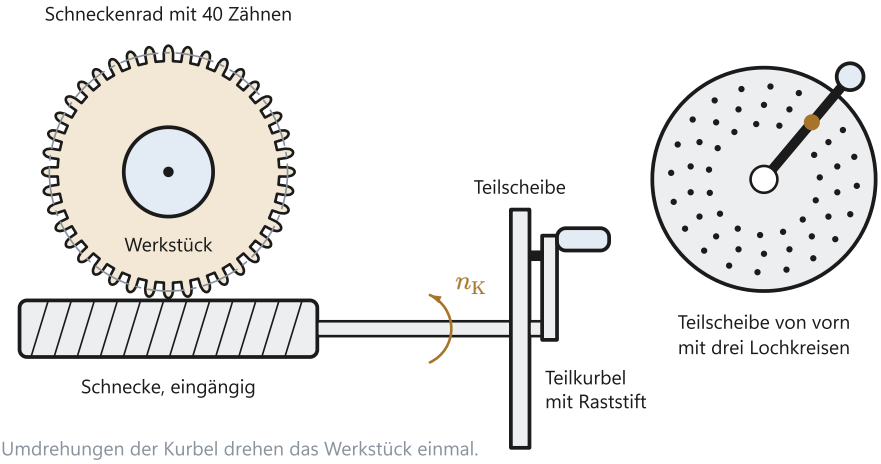


Abb. 9.10 Teilkopf: Die Teilkurbel dreht über Schnecke und Schneckenrad das Werkstück; der Raststift greift in einen Lochkreis der Teilscheibe

Indirektes Teilen mit dem Teilkopf

(9.27) MEISTER

$$n_{\mathrm{K}} = \frac{i}{z}$$

Die Kurbel dreht das Werkstück über Schnecke und Schneckenrad. Den Bruchteil einer Umdrehung zählt man auf einem Lochkreis ab: den Bruch so kürzen oder erweitern, dass im Nenner eine vorhandene Lochzahl steht. Der Zähler ist dann die Zahl der Lochabstände.

Gilt: Für den Bruchteil muss ein passender Lochkreis vorhanden sein; sonst hilft nur das Differentialteilen oder eine andere Teilscheibe.

n_{K}	Kurbelumdrehungen je Teilschritt	1
i	Übersetzung (des Teilkopfs, ins Langsame: Kurbelumdrehungen je Umdrehung des Werkstücks; gleich der Zähnezahl des Schneckenrads bei eingängiger Schnecke, meist 40)	1
z	Teilzahl (Zahl der gleichen Teile am Umfang, zum Beispiel die Zähnezahl)	1

Aber Vorsicht: Gezählt werden Lochabstände, nicht Löcher. Das Loch, in dem der Raststift steckt, zählt nicht mit; die Teilschere wird entsprechend eingestellt.

BEISPIEL Ein Hemmungsrad mit 15 Zähnen wird auf einem Teilkopf mit der Übersetzung 40 gefräst.

Gegeben: $i = 40;\quad z = 15$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{K}} &= \frac{i}{z} \\ &= \frac{40}{15} \\ &= 2\,\tfrac{2}{3} = 2\,\tfrac{10}{15} \\ &\approx 2{,}667 \end{aligned}$$

Je Zahn zwei volle Kurbelumdrehungen und 10 Lochabstände auf dem Lochkreis mit 15 Löchern. Gleichwertig sind 12 Lochabstände auf dem Lochkreis mit 18 Löchern.

Winkelteilen mit dem Teilkopf

(9.28) MEISTER

$$n_{\mathrm{K}} = \frac{i \cdot \tau}{360^\circ}$$

Ist statt der Teilzahl ein Winkel gegeben, rechnet man ihn in Kurbelumdrehungen um. Bei der Übersetzung 40 dreht eine Kurbelumdrehung das Werkstück um 9°.

n_{K}	Kurbelumdrehungen je Teilschritt	1
i	Übersetzung (des Teilkopfs, ins Langsame: Kurbelumdrehungen je Umdrehung des Werkstücks; gleich der Zähnezahl des Schneckenrads bei eingängiger Schnecke, meist 40)	1
τ	Teilwinkel (Drehwinkel des Werkstücks je Teilschritt)	°

BEISPIEL Auf einem Teilkopf mit der Übersetzung 40 soll eine Minutenteilung angerissen werden, also Striche im Abstand von 6°.

Gegeben: $i = 40;\quad \tau = 6^\circ$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{K}} &= \frac{i \cdot \tau}{360^\circ} \\ &= \frac{40 \cdot 6^\circ}{360^\circ} \\ &= \tfrac{2}{3} = \tfrac{12}{18} \\ &\approx 0{,}667 \end{aligned}$$

Zwei Drittel einer Umdrehung, also 12 Lochabstände auf dem Lochkreis mit 18 Löchern.

Merksatz: Teilkopf mit der Übersetzung 40: Kurbelumdrehungen gleich 40 durch Teilzahl.

9.6 Biegen und Zuschnitt

Beim Biegen wird die Außenseite gestreckt und die Innenseite gestaucht. Dazwischen liegt die neutrale Faser, die ihre Länge behält. Ihre Länge ist die Zuschnittlänge.

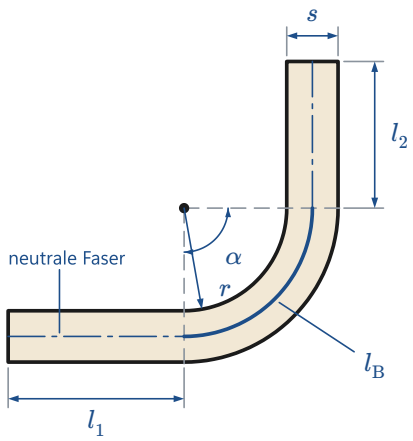


Abb. 9.11 Biegeteil: Die neutrale Faser liegt beim Radius $r + \frac{s}{2}$

Gestreckte Länge eines Bogens

(9.29) GESELLE

$$l_\mathrm{B} = \frac{\pi \cdot \left(r + \frac{s}{2}\right) \cdot \alpha}{180^\circ}$$

Die neutrale Faser liegt in der Mitte des Blechs und behält beim Biegen ihre Länge. Die Zuschnittlänge des ganzen Teils ist die Summe der geraden Schenkel und aller Bögen: $L = l_1 + l_\mathrm{B} + l_2$.

Gilt: Biegeradius mindestens etwa das Fünffache der Dicke. Bei engeren Radien mit dem Korrekturfaktor aus Formel (9.30) rechnen.

l_B	Länge (Bogen der neutralen Faser)	mm
r	Biegeradius (innen gemessen)	mm
s	Dicke (Blech, Band oder Draht)	mm
α	Biegewinkel (Winkel, den der Bogen überstreicht)	$^\circ$

BEISPIEL Ein Federblech von 0,5 mm Dicke wird mit 3 mm Innenradius um 90° gebogen.

Gegeben: $r = 3\,\mathrm{mm}; \quad s = 0{,}5\,\mathrm{mm}; \quad \alpha = 90^\circ$

$$l_\mathrm{B} = \frac{\pi \cdot \left(r + \frac{s}{2}\right) \cdot \alpha}{180^\circ}$$

$$= \frac{\pi \cdot \left(3\,\mathrm{mm} + \frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{2}\right) \cdot 90^\circ}{180^\circ}$$

$$\approx 5{,}11\,\mathrm{mm}$$

Für den Bogen werden 5,11 mm Material gebraucht.

Korrekturfaktor für enge Biegeradien

(9.30) VERTIEFUNG

$$k = 0{,}65 + 0{,}5 \cdot \lg\left(\frac{r}{s}\right)$$

k	Korrekturfaktor (Lage der neutralen Faser)	1
r	Biegeradius (innen gemessen)	mm
s	Dicke (Blech, Band oder Draht)	mm

Bei engem Radius wandert die neutrale Faser zur Innenseite. In Formel (9.29) wird dann $\frac{s}{2}$ durch $k \cdot \frac{s}{2}$ ersetzt: $l_\mathrm{B} = \pi \cdot \left(r + k \cdot \frac{s}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{180°}$.

Gilt: übliche Rechenregel für Blechbiegeteile; Verhältnis r zu s zwischen 0,65 und 5. Darüber ist $k = 1$. Für genaue Teile ein Probestück biegen.

BEISPIEL Ein Blech von 0,5 mm Dicke wird mit 1 mm Innenradius gebogen.

Gegeben: $r = 1\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}5\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} k &= 0{,}65 + 0{,}5 \cdot \lg\left(\frac{r}{s}\right) \\ &= 0{,}65 + 0{,}5 \cdot \lg\left(\frac{1\,\mathrm{mm}}{0{,}5\,\mathrm{mm}}\right) \\ &\approx 0{,}80 \end{aligned}$$

Mit $k = 0{,}80$ wird ein Bogen von 90° 1,88 mm lang statt 1,96 mm.

Zuschnitt für einen Ring

(9.31) GESELLE

$$L = \pi \cdot (d_\mathrm{i} + s)$$

L	Länge (Zuschnitt, gestreckt)	mm
d_i	Durchmesser (Innendurchmesser des Rings)	mm
s	Dicke (Blech, Band oder Draht)	mm

Bei einem geschlossenen Ring, etwa einem Glasreif oder Federring, zählt der Umfang am mittleren Durchmesser. Vom Außendurchmesser aus gerechnet: $L = \pi \cdot (d_\mathrm{a} - s)$.

Gilt: stumpf gestoßener Ring; Zugabe für das Verputzen der Lötstelle nach Erfahrung.

BEISPIEL Ein Glasreif mit 30 mm Innendurchmesser soll aus Band von 0,8 mm Dicke gebogen werden.

Gegeben: $d_\mathrm{i} = 30\,\mathrm{mm}$; $s = 0{,}8\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} L &= \pi \cdot (d_\mathrm{i} + s) \\ &= \pi \cdot (30\,\mathrm{mm} + 0{,}8\,\mathrm{mm}) \\ &\approx 96{,}8\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Das Band wird 96,8 mm lang zugeschnitten.

9.7 Edelmetalle

Edelmetalle werden fast immer als Legierung verarbeitet. Der Feingehalt gibt an, welcher Anteil der Masse reines Edelmetall ist, in Tausendteilen (‰) oder bei Gold auch in Karat. Der Stempel nennt den Feingehalt in Tausendteilen: 750 heißt 750 ‰ Feingold. Ob ein Stück zur gestempelten Legierung passen kann, zeigt seine Dichte; wie man sie durch Wägen in Luft und Wasser bestimmt, steht in Abschnitt 1.3, Formel (1.29).

Feingewicht

(9.32) GESELLE

$$m_\mathrm{f} = m \cdot w$$

UMGESTELLT $w = \dfrac{m_\mathrm{f}}{m}$

Der Feingehalt ist der Anteil des reinen Edelmetalls an der Masse der Legierung. Mit dem Feingewicht und dem Tagespreis wird der Materialwert berechnet.

m_f	Feingewicht (Masse des reinen Edelmetalls)	g
m	Masse (Legierung)	g
w	Feingehalt (Massenanteil des Edelmetalls)	‰

BEISPIEL Ein Gehäuse aus Gold mit dem Stempel 750 wiegt ohne Werk und Glas 42 g.

Gegeben: $m = 42\,\mathrm{g}$; $w = 750\,‰$

$$\begin{aligned} m_\mathrm{f} &= m \cdot w \\ &= 42\,\mathrm{g} \cdot 750\,‰ \\ &= 31{,}5\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Das Gehäuse enthält 31,5 g Feingold.

Feingehalt in Karat

(9.33) GESELLE

$$K = 24 \cdot w$$

Das Karat teilt die Legierung in 24 Teile: 18 Karat heißt 18 Teile Gold und 6 Teile Zusatzmetalle.

K	Karatzahl (24 Karat ist reines Gold)	1
w	Feingehalt (Massenanteil des Edelmetalls)	‰

Gilt: Goldlegierungen. Nicht verwechseln mit dem Karat der Edelsteine, einer Masse von 0,2 g.

BEISPIEL Welcher Karatzahl entspricht Gold mit dem Stempel 750?

Gegeben: $w = 750\,‰$

$$\begin{aligned} K &= 24 \cdot w \\ &= 24 \cdot 750\,‰ \\ &= 18 \end{aligned}$$

750er Gold hat 18 Karat. 585er Gold hat rechnerisch 14,04 Karat und heißt 14 Karat.

Gebräuchliche Feingehalte

Metall	Feingehalt in ‰	Bezeichnung
Gold	333	8 Karat
Gold	375	9 Karat
Gold	585	14 Karat
Gold	750	18 Karat
Gold	916	22 Karat
Gold	999	24 Karat, Feingold
Silber	800	
Silber	925	Sterlingsilber
Silber	999	Feinsilber
Platin	950	

Edelmetallpreise gelten je Feinunze: 1 Feinunze = 31,1035 g. Die Feinunze ist schwerer als die Handelsunze von 28,35 g.

Feingehalt einer Mischung

(9.34) GESELLE

$$w = \frac{m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2}{m_1 + m_2}$$

Beim Zusammenschmelzen bleibt das Feingewicht erhalten: $m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2 = (m_1 + m_2) \cdot w$.

Gilt: ohne Abbrand. Für reines Zusatzmetall wie Kupfer ist der Feingehalt null, für Feinmetall 1000 ‰.

w	Feingehalt (Mischung)	‰
m_1	Masse (Legierung 1)	g
w_1	Feingehalt (Legierung 1)	‰
m_2	Masse (Legierung 2)	g
w_2	Feingehalt (Legierung 2)	‰

BEISPIEL 20 g Gold 750 und 10 g Gold 333 werden zusammengeschmolzen.

Gegeben: $m_1 = 20\,\mathrm{g}$; $w_1 = 750\,‰$; $m_2 = 10\,\mathrm{g}$; $w_2 = 333\,‰$

$$\begin{aligned} w &= \frac{m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{20\,\mathrm{g} \cdot 750\,‰ + 10\,\mathrm{g} \cdot 333\,‰}{20\,\mathrm{g} + 10\,\mathrm{g}} \\ &\approx 611\,‰ \end{aligned}$$

Die Mischung hat einen Feingehalt von 611 ‰. Stempeln darf man sie nur mit 585.

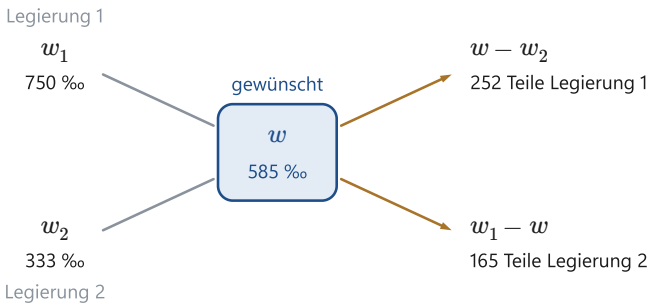


Abb. 9.12 Mischungskreuz mit dem Beispiel zu Formel (9.35)

Mischungskreuz

(9.35) MEISTER

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w - w_2}{w_1 - w}$$

UMGESTELLT $m_1 = \dfrac{m_2 \cdot (w - w_2)}{w_1 - w}$

Das Mischungskreuz liefert das Massenverhältnis zweier Legierungen für einen gewünschten Feingehalt: Die Differenzen zum Zielwert werden über Kreuz abgelesen.

Gilt: Der gewünschte Feingehalt muss zwischen den beiden Ausgangswerten liegen.

m_1	Masse (Legierung 1)	g
m_2	Masse (Legierung 2)	g
w	Feingehalt (gewünschte Mischung)	‰
w_1	Feingehalt (Legierung 1)	‰
w_2	Feingehalt (Legierung 2)	‰

BEISPIEL Aus Gold 750 und Gold 333 soll Gold 585 werden. Vorhanden sind 10 g Gold 333. Wie viel Gold 750 gehört dazu?

Gegeben: $m_2 = 10\,\text{g}$; $w = 585\,‰$; $w_2 = 333\,‰$; $w_1 = 750\,‰$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_2 \cdot (w - w_2)}{w_1 - w} \\ &= \frac{10\,\text{g} \cdot (585\,‰ - 333\,‰)}{750\,‰ - 585\,‰} \\ &= 10\,\text{g} \cdot \frac{252}{165} \\ &\approx 15{,}3\,\text{g} \end{aligned}$$

Zu 10 g Gold 333 gehören 15,3 g Gold 750. Das Kreuz zeigt dasselbe Verhältnis: 252 Teile zu 165 Teilen.

Feingehalt erhöhen mit Feinmetall

(9.36) MEISTER

$$m_{\text{zu}} = \frac{m_1 \cdot (w_2 - w_1)}{1000\,‰ - w_2}$$

Sonderfall der Mischungsrechnung: Die zweite Legierung ist reines Edelmetall.

Gilt: ohne Abbrand; Feinmetall mit 1000 ‰ gerechnet.

m_{zu}	Masse (zugesetztes Feinmetall)	g
m_1	Masse (vorhandene Legierung)	g
w_1	Feingehalt (vorher)	‰
w_2	Feingehalt (nachher)	‰

BEISPIEL 20 g Gold 585 sollen auf 750 gebracht werden.

Gegeben: $m_1 = 20\,\text{g}$; $w_1 = 585\,‰$; $w_2 = 750\,‰$

$$\begin{aligned} m_{\text{zu}} &= \frac{m_1 \cdot (w_2 - w_1)}{1000\,‰ - w_2} \\ &= \frac{20\,\text{g} \cdot (750\,‰ - 585\,‰)}{1000\,‰ - 750\,‰} \\ &= 13{,}2\,\text{g} \end{aligned}$$

Es müssen 13,2 g Feingold zugegeben werden; danach sind es 33,2 g Gold 750.

Feingehalt senken mit Zusatzmetall

(9.37) MEISTER

$$m_{\text{zu}} = \frac{m_1 \cdot (w_1 - w_2)}{w_2}$$

Sonderfall der Mischungsrechnung: Das zugesetzte Metall enthält kein Edelmetall.

Gilt: ohne Abbrand.

m_{zu}	Masse (zugesetztes Metall ohne Edelmetallanteil)	g
m_1	Masse (vorhandene Legierung)	g
w_1	Feingehalt (vorher)	‰
w_2	Feingehalt (nachher)	‰

BEISPIEL 20 g Gold 750 sollen auf 585 gebracht werden.

Gegeben: $m_1 = 20\,\text{g}$; $w_1 = 750\,‰$; $w_2 = 585\,‰$

$$m_{\text{zu}} = \frac{m_1 \cdot (w_1 - w_2)}{w_2} = \frac{20\,\text{g} \cdot (750\,‰ - 585\,‰)}{585\,‰} \approx 5{,}64\,\text{g}$$

Es werden 5,64 g Zusatzmetall zugegeben, bei Gelbgold Silber und Kupfer im Verhältnis der gewünschten Farbe.

9.8 Härte und Wärmebehandlung

Gehärteter Stahl ist glashart und spröde. Beim Anlassen, dem erneuten Erwärmen auf 200 °C bis 350 °C, gibt er etwas Härte ab und wird zäher. Auf blank geschliffenem Stahl zeigt eine dünne Oxidschicht dabei die Temperatur an: die Anlassfarbe.

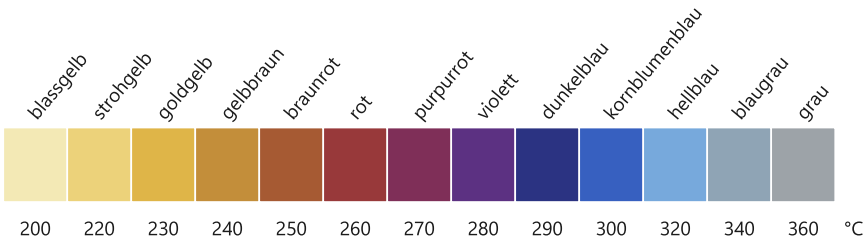


Abb. 9.13 Anlassfarben von blankem unlegiertem Stahl (Farbwiedergabe im Druck nur angenähert)

Anlassfarben von unlegiertem Stahl (Richtwerte)

Anlassfarbe	Temperatur in °C	Beispiele
blassgelb	200	Stichel, Schaber
strohgelb	220	Drehstähle, Fräser, Bohrer
goldgelb	230	Gewindebohrer, Schneideisen
gelbbraun	240	Stempel, Punzen
braunrot	250	Körner, Durchschläge
rot	260	Meißel
purpurrot	270	Schraubendreherklingen
violett	280	Schraubendreherklingen, Wellen und Triebe
dunkelblau	290	Wellen, Triebe, Federn
kornblumenblau	300	Federn; gebläute Schrauben und Zeiger
hellblau	320	weiche Federn
blaugrau	340	
grau	360	kaum noch Härte

Die Farben gelten für blanken, unlegierten Stahl bei zügigem Erwärmen. Hält man die Temperatur länger, läuft die Farbe weiter, obwohl der Stahl nicht heißer wird; legierte Stähle färben sich erst bei höherer Temperatur. Die Beispiele sind Erfahrungswerte der Werkstatt.

Härtetemperaturen von Werkzeugstählen (Richtwerte)

Stahl	Härtetemperatur in °C	Abschrecken in
Unlegierter Werkzeugstahl mit rund 1 % Kohlenstoff (C105U)	770 … 800	Wasser
Silberstahl 115CrV3 (1.2210)	780 … 810	Wasser
Silberstahl 115CrV3 (1.2210), dünne Teile	810 … 840	Öl
Ölhärter 100MnCrW4 (1.2510)	780 … 820	Öl
Ölhärter 90MnCrV8 (1.2842)	790 … 820	Öl

Maßgeblich ist das Datenblatt des Herstellers. Bei rund 800 °C glüht der Stahl kirschrot und wird von einem Magneten nicht mehr angezogen. Nach dem Abschrecken sofort anlassen.

Vickershärte und Rockwellhärte von Stahl (grobe Umwertung)

HV	HRC
240	20
300	30
350	35 … 36
400	41
450	45
500	49
550	52
600	55
650	58
700	60
800	64
900	67

Werte der genormten Umwertungstabelle für unlegierte und niedrig legierte Stähle, auf ganze HRC gerundet. Eine Umwertung ist immer nur ein Anhalt; für andere Werkstoffe gilt sie nicht. Gehärteter Werkzeugstahl erreicht 62 bis 66 HRC, blau angelassen noch rund 55 HRC.

9.9 Galvanik

Beim Galvanisieren scheidet Gleichstrom Metall aus einem Elektrolyten auf dem Werkstück ab. Die abgeschiedene Masse folgt aus Stromstärke und Zeit, die Schichtdicke aus Masse, Fläche und Dichte.

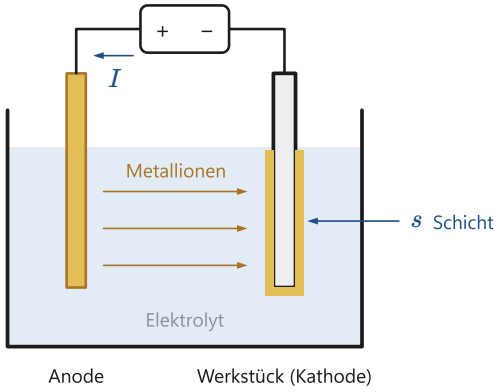


Abb. 9.14 Galvanisches Bad: Das Werkstück ist die Kathode, auf ihm wächst die Schicht der Dicke s

Abgeschiedene Masse (Faradaysches Gesetz)

(9.38) VERTIEFUNG

$$m = \frac{\eta \cdot M \cdot I \cdot t}{z \cdot F}$$

Die abgeschiedene Masse wächst mit der geflossenen Ladung, also mit Stromstärke mal Zeit. Je höher die Wertigkeit der Ionen, desto mehr Ladung wird je Atom gebraucht.

Gilt: Gleichstrom mit konstanter Stromstärke. Die Stromausbeute hängt vom Bad ab: nahe 1 bei Silber- und Kupferbädern, deutlich kleiner bei sauren Goldbädern und bei Rhodium.

m	Masse (abgeschiedenes Metall)	mg
η	Stromausbeute (Anteil des Stroms, der Metall abscheidet)	1
M	molare Masse des abgeschiedenen Metalls	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$
I	Stromstärke	A
t	Zeit (Dauer der Abscheidung)	s
z	Wertigkeit (Ladungszahl der Metallionen im Bad)	1
F	Faraday-Konstante ($96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$)	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$

BEISPIEL Ein Gehäuse wird 10 Minuten lang bei 0,05 A vergoldet. Im Bad ist Gold einwertig, die Stromausbeute wird mit 90 % angenommen.

Gegeben: $\eta = 0{,}9$; $M = 196{,}97\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$; $I = 0{,}05\ \mathrm{A}$; $t = 600\ \mathrm{s}$; $z = 1$; $F = 96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$

$$m = \frac{\eta \cdot M \cdot I \cdot t}{z \cdot F}$$
$$= \frac{0{,}9 \cdot 196{,}97\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 0{,}05\ \mathrm{A} \cdot 600\ \mathrm{s}}{1 \cdot 96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}}$$
$$\approx 55{,}1\ \mathrm{mg}$$

Auf dem Gehäuse scheiden sich rund 55 mg Gold ab.

Schichtdicke aus der Masse

(9.39) VERTIEFUNG

$$s = \frac{m}{\varrho \cdot A}$$

Die Masse verteilt sich als Schicht auf der Oberfläche. An Kanten und Spitzen wird die Schicht dicker, in Vertiefungen dünner; die Formel liefert den Mittelwert.

Gilt: gleichmäßige, dichte Schicht.

s	Dicke (Schichtdicke)	$\mu\mathrm{m}$
m	Masse (abgeschiedenes Metall)	mg
ϱ	Dichte (des Schichtmetalls)	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
A	Fläche (beschichtete Oberfläche)	cm^2

BEISPIEL Die 55,1 mg Gold aus dem Beispiel davor verteilen sich auf 15 cm² Oberfläche. Gold hat die Dichte $19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

Gegeben: $m = 55{,}1\ \mathrm{mg}$; $\varrho = 19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$; $A = 15\ \mathrm{cm}^2$

$$\begin{aligned} s &= \frac{m}{\varrho \cdot A} \\ &= \frac{55{,}1\ \mathrm{mg}}{19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 15\ \mathrm{cm}^2} \\ &\approx 1{,}90 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm} \\ &= 1{,}90\ \mu\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Goldschicht ist im Mittel 1,9 µm dick.

Schichtdicke aus Stromdichte und Zeit

(9.40) VERTIEFUNG

$$s = \frac{\eta \cdot M \cdot j \cdot t}{z \cdot F \cdot \varrho}$$

Bäder werden mit einer vorgeschriebenen Stromdichte betrieben. Aus ihr und der Zeit folgt die Schichtdicke unmittelbar, ohne die Masse zu kennen.

Gilt: wie bei den Formeln (9.38) und (9.39).

s	Dicke (Schichtdicke)	$\mu\mathrm{m}$
η	Stromausbeute (Anteil des Stroms, der Metall abscheidet)	1
M	molare Masse des abgeschiedenen Metalls	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$
j	Stromdichte (Stromstärke je Fläche, $j = \frac{I}{A}$)	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dm}^2}$
t	Zeit (Dauer der Abscheidung)	s
z	Wertigkeit (Ladungszahl der Metallionen im Bad)	1
F	Faraday-Konstante ($96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$)	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$
ϱ	Dichte (des Schichtmetalls)	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

BEISPIEL Dasselbe Goldbad: 0,05 A auf 15 cm² sind $0{,}333\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dm}^2}$. Wie dick ist die Schicht nach 10 Minuten?

Gegeben: $\eta = 0{,}9$; $M = 196{,}97\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$; $j = 0{,}333\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dm}^2}$; $t = 600\ \mathrm{s}$; $z = 1$; $F = 96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$; $\varrho = 19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\eta \cdot M \cdot j \cdot t}{z \cdot F \cdot \varrho} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 196{,}97\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 0{,}333\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dm}^2} \cdot 600\ \mathrm{s}}{1 \cdot 96\,485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}} \cdot 19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} \\ &\approx 1{,}90\ \mu\mathrm{m} \end{aligned}$$

Wieder 1,9 µm. Für die doppelte Schichtdicke wird doppelt so lange galvanisiert, nicht mit doppeltem Strom: Die Stromdichte gibt das Bad vor.

Werte für die Galvanik

Metall	Wertigkeit z im Bad	Molare Masse M in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$	Dichte ϱ in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$
Gold (cyanidische Bäder)	1	196,97	19,3
Silber	1	107,87	10,5
Kupfer (saure Bäder)	2	63,55	8,96
Nickel	2	58,69	8,90
Rhodium	3	102,91	12,4

Die Dichte gilt für das reine Metall; Legierungsschichten wie Hartgold weichen etwas ab.

10 Elektrotechnik, Quarz und Batterie

Die Quarzuhr ersetzt Zugfeder, Hemmung und Unruh durch Batterie, Schaltkreis und Quarz. Wer sie prüfen und reparieren will, braucht nur wenig Elektrotechnik: das Ohmsche Gesetz, Leistung und Ladung, dazu das Verhalten von Batterie, Kondensator und Spule.

Darauf bauen die Formeln der Uhr selbst auf: Laufzeit der Batterie, Frequenzteilung, Gang und Temperaturverhalten des Quarzes, Stromaufnahme des Schrittmotors. In diesem Kapitel steht U für die Spannung, A für den Leiterquerschnitt, P für die Leistung und C für die Kapazität.

10.1 Grundgrößen des Stromkreises

Spannung treibt den Strom durch den Stromkreis, der Widerstand bremst ihn. Mit diesen drei Größen und der Zeit lassen sich Leistung, Arbeit und Ladung berechnen. In der Quarzuhr sind die Spannungen klein und die Ströme winzig: Gerechnet wird in Volt, Mikroampere und Kiloohm.

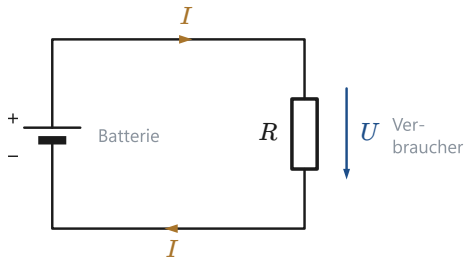


Abb. 10.1 Einfacher Stromkreis: Die Spannung U treibt den Strom I durch den Widerstand R

Ohmsches Gesetz

(10.1) GESELLE

$$U = R \cdot I$$

UMGESTELLT $\quad I = \dfrac{U}{R} \qquad R = \dfrac{U}{I}$

U	Spannung (am Widerstand)	V
R	Widerstand	Ω
I	Stromstärke	A

An einem Widerstand sind Spannung und Strom zueinander proportional. Doppelte Spannung treibt den doppelten Strom, doppelter Widerstand lässt nur den halben Strom fließen.

Gilt: Gleichstrom und Widerstände, deren Wert nicht von Spannung und Strom abhängt (Drähte, Spulen, Schichtwiderstände).

BEISPIEL Eine Motorspule mit 1,8 kΩ liegt an 1,55 V. Welcher Strom fließt, wenn der Strom voll angestiegen ist?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}; \quad R = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R} \\ &= \frac{1{,}55\,\mathrm{V}}{1{,}8\,\mathrm{k\Omega}} \\ &\approx 0{,}86\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

Rund 0,86 mA. Höher kann der Strom im Motorimpuls nicht steigen. Im Mittel braucht die Uhr nur etwa ein Tausendstel davon, weil der Impuls nur wenige Millisekunden dauert.

Elektrische Leistung

(10.2) GESELLE

$$P = U \cdot I$$

P	Leistung	W
U	Spannung	V
I	Stromstärke	A

Die Leistung sagt, wie viel Energie je Sekunde umgesetzt wird. Ein Watt ist ein Volt mal ein Ampere.

Gilt: Gleichstrom; bei Impulsbetrieb an gleichbleibender Spannung mit dem Mittelwert des Stroms.

BEISPIEL Ein Quarzwerk nimmt an 1,55 V im Mittel 1,2 µA auf. Wie groß ist die Leistung?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $I = 1{,}2\,\mu\mathrm{A}$

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 1{,}2\,\mu\mathrm{A} \\ &= 1{,}86\,\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

Knapp 2 µW. Ein mechanisches Armbanduhrwerk setzt aus der Zugfeder ebenfalls nur ein bis wenige Mikrowatt um (Kapitel 3).

Leistung am Widerstand aus der Spannung

(10.3) GESELLE

$$P = \frac{U^2}{R}$$

P	Leistung	W
U	Spannung (am Widerstand)	V
R	Widerstand	Ω

Folgt aus der Leistung und dem Ohmschen Gesetz. Die Leistung wächst mit dem Quadrat der Spannung: doppelte Spannung, vierfache Leistung.

Gilt: wie beim Ohmschen Gesetz.

BEISPIEL Ein Batterieprüfgerät belastet eine Zelle mit 2 kΩ. Die Spannung unter Last beträgt 1,55 V. Welche Leistung gibt die Zelle ab?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $R = 2\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{U^2}{R} \\ &= \frac{(1{,}55\,\mathrm{V})^2}{2\,\mathrm{k\Omega}} \\ &\approx 1{,}20\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

Rund 1,2 mW, etwa das 600-Fache der Leistung, die das Werk im Betrieb braucht. Darum belastet man die Zelle nur kurz.

Leistung am Widerstand aus dem Strom

(10.4) GESELLE

$$P = I^2 \cdot R$$

P	Leistung	W
I	Stromstärke	A
R	Widerstand	Ω

Diese Leistung wird im Widerstand zu Wärme. In der Motorspule ist sie Verlust: Nur der Rest des Impulses bewegt den Rotor.

Gilt: wie beim Ohmschen Gesetz.

BEISPIEL Durch eine Spule mit 1,8 kΩ fließen während des Impulses 0,5 mA. Welche Leistung wird im Draht zu Wärme?

Gegeben: $I = 0{,}5\,\mathrm{mA}$; $R = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} P &= I^2 \cdot R \\ &= (0{,}5\,\mathrm{mA})^2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{k\Omega} \\ &= 0{,}45\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

0,45 mW, allerdings nur während der wenigen Millisekunden des Impulses.

Elektrische Arbeit

(10.5) GESELLE

$$W = U \cdot I \cdot t$$

W	Arbeit (elektrische Arbeit, umgesetzte Energie)	J
U	Spannung	V
I	Stromstärke	A
t	Zeit (Dauer des Stromflusses)	s

Arbeit ist Leistung mal Zeit. Ein Joule ist eine Wattsekunde; eine Wattstunde sind 3600 J.

Gilt: Spannung konstant; schwankt der Strom, wird sein Mittelwert eingesetzt.

BEISPIEL Welche Energie setzt ein Quarzwerk in einem Jahr um, das an 1,55 V im Mittel 1,2 µA aufnimmt?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $I = 1{,}2\,\mathrm{\mu A}$; $t = 365\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} W &= U \cdot I \cdot t \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 1{,}2\,\mathrm{\mu A} \cdot 365\,\mathrm{d} \\ &\approx 58{,}7\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Knapp 59 J in einem ganzen Jahr. Eine Glühlampe mit 60 W setzt dieselbe Energie in einer Sekunde um.

Ladung

(10.6) GESELLE

$$Q = I \cdot t$$

Q	Ladung (Elektrizitätsmenge)	C
I	Stromstärke	A
t	Zeit (Dauer des Stromflusses)	s

Ein Strom von einem Ampere transportiert in einer Sekunde die Ladung ein Coulomb. Bei Batterien rechnet man in Milliamperestunden: 1 mAh sind 3,6 C.

Gilt: konstanter Strom oder Mittelwert des Stroms.

BEISPIEL Welche Ladung entnimmt ein Werk mit 1,2 µA Stromaufnahme der Batterie in einem Jahr (8760 h)?

Gegeben: $I = 1{,}2\,\mathrm{\mu A}$; $t = 8760\,\mathrm{h}$

$$\begin{aligned} Q &= I \cdot t \\ &= 1{,}2\,\mathrm{\mu A} \cdot 8760\,\mathrm{h} \\ &\approx 10{,}5\,\mathrm{mAh} \end{aligned}$$

Rund 10,5 mAh je Jahr. Eine Zelle mit 28 mAh reicht also rechnerisch für gut zweieinhalb Jahre.

Widerstand eines Drahts

(10.7) GESELLE

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

UMGESTELLT $l = \frac{R \cdot A}{\rho}$

R	Widerstand	Ω
ρ	spezifischer Widerstand des Werkstoffs	$\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$
l	Länge (des Drahts)	m
A	Fläche (Querschnitt des Drahts)	mm^2

Je länger und je dünner der Draht, desto größer sein Widerstand. Motorspulen sind aus Kupferlackdraht von nur 0,015 mm bis 0,02 mm Durchmesser gewickelt, dünner als ein Haar.

Gilt: gleichmäßiger Querschnitt; ρ gilt für 20 °C. Kreisquerschnitt: $A = \frac{\pi}{4} d^2$ (Kapitel 1).

BEISPIEL Eine Spule ist aus 26 m Kupferdraht mit 0,018 mm Durchmesser gewickelt; der Querschnitt beträgt 0,000254 mm². Wie groß ist ihr Widerstand?

Gegeben: $\rho = 0{,}0178\ \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$; $l = 26\,\mathrm{m}$; $A = 0{,}000\,254\,\mathrm{mm}^2$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho \cdot l}{A} \\ &= \frac{0{,}0178\ \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot 26\,\mathrm{m}}{0{,}000\,254\,\mathrm{mm}^2} \\ &\approx 1{,}82\,\mathrm{k\Omega} \end{aligned}$$

Rund 1,8 kΩ, ein üblicher Wert für die Spule eines Dreizeigerwerks.

Widerstand und Temperatur

(10.8) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$R_\vartheta \approx R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$$

R_ϑ	Widerstand bei der Temperatur ϑ	Ω
R_{20}	Widerstand bei 20 °C	Ω
α_{20}	Temperaturkoeffizient des Widerstands (bezogen auf 20 °C)	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung (gegenüber 20 °C; + heißt: wärmer)	K

Metalle leiten warm schlechter. Bei Kupfer steigt der Widerstand um rund 0,4 % je Kelvin, das sind 4 % je 10 K.

Gilt: Metalle im Bereich von etwa −50 °C bis 150 °C; $\Delta\vartheta = \vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C}$.

BEISPIEL Eine Spule hat bei 20 °C einen Widerstand von 1,80 kΩ. Wie groß ist er bei 35 °C, etwa in einer gerade vom Arm genommenen Uhr?

Gegeben: $R_{20} = 1{,}80\,\mathrm{k\Omega}$; $\alpha_{20} = 0{,}0039\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\Delta\vartheta = 15\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned} R_\vartheta &\approx R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta) \\ &= 1{,}80\,\mathrm{k\Omega} \cdot \left(1 + 0{,}0039\ \tfrac{1}{\mathrm{K}} \cdot 15\,\mathrm{K}\right) \\ &\approx 1{,}91\,\mathrm{k\Omega} \end{aligned}$$

Rund 1,91 kΩ, also 6 % mehr. Spulenwiderstände vergleicht man deshalb bei Raumtemperatur mit der Herstellerangabe.

Leiterwerkstoffe bei 20 °C (Richtwerte)

Werkstoff	spezifischer Widerstand ρ in $\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$	Temperaturkoeffizient α_{20} in $\frac{1}{\mathrm{K}}$	Verwendung
Silber	0,016	0,0038	Kontakte
Kupfer	0,0178	0,0039	Spulendraht, Leiterbahnen
Aluminium	0,028	0,0040	Leitungen
Messing (CuZn37)	0,07	0,0015	Kontaktfedern, Batteriebügel
Konstantan	0,49	nahezu 0	Messwiderstände

Werte schwanken mit Reinheit und Zustand des Werkstoffs.

10.2 Schaltungen von Widerständen, Batterie unter Last

Widerstände lassen sich hintereinander (in Reihe) oder nebeneinander (parallel) schalten. Auch die Batterie selbst enthält einen Widerstand, den Innenwiderstand. Er entscheidet, ob eine Zelle den Motorimpuls noch liefern kann.

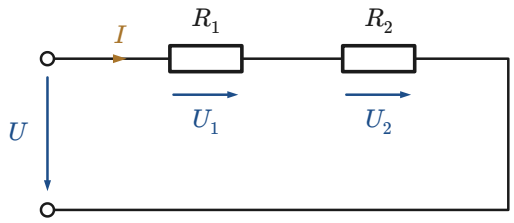


Abb. 10.2 Reihenschaltung: derselbe Strom I durch beide Widerstände, die Teilspannungen addieren sich

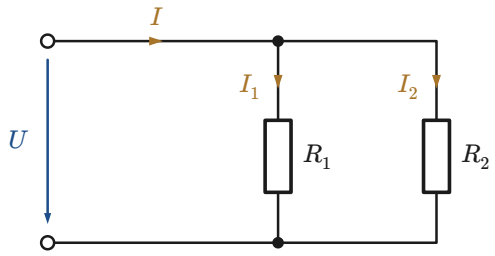


Abb. 10.3 Parallelschaltung: dieselbe Spannung U an beiden Widerständen, die Teilströme addieren sich

Reihenschaltung von Widerständen

(10.9) GESELLE

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Durch alle Widerstände fließt derselbe Strom. Die Teilspannungen addieren sich zur Gesamtspannung und verhalten sich wie die Widerstände. Die Formel gilt für beliebig viele Widerstände.

R	Widerstand (Gesamtwiderstand der Schaltung)	Ω
R_1	erster Teilwiderstand	Ω
R_2	zweiter Teilwiderstand	Ω
R_3	dritter Teilwiderstand (weitere entsprechend)	Ω

BEISPIEL Die Spule eines Schrittmotors hat 1,8 kΩ. Zum Messen liegen ein Vorwiderstand von 3,3 kΩ und ein Messwiderstand von 1,0 kΩ mit ihr in Reihe. Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

Gegeben: $R_1 = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$; $R_2 = 3{,}3\,\mathrm{k\Omega}$; $R_3 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= 1{,}8\,\mathrm{k\Omega} + 3{,}3\,\mathrm{k\Omega} + 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\ &= 6{,}1\,\mathrm{k\Omega} \end{aligned}$$

6,1 kΩ. Der Gesamtwiderstand ist immer größer als der größte Teilwiderstand.

Parallelschaltung von Widerständen

(10.10) GESELLE

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

UMGESTELLT

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots}$$

R	Widerstand (Gesamtwiderstand der Schaltung)	Ω
R_1	erster Teilwiderstand	Ω
R_2	zweiter Teilwiderstand	Ω
R_3	dritter Teilwiderstand (weitere entsprechend)	Ω

An allen Widerständen liegt dieselbe Spannung. Die Teilströme addieren sich zum Gesamtstrom; durch den kleineren Widerstand fließt der größere Strom. Die Formel gilt für beliebig viele Widerstände. Für zwei Widerstände rechnet man kürzer $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Aber Vorsicht: Feuchtigkeit oder Schmutz zwischen den Spulenanschlüssen wirkt wie ein parallel geschalteter Widerstand. Die Spule misst sich dann zu klein, und die Stromaufnahme des Werks steigt.

BEISPIEL Drei Widerstände von 2 kΩ, 3 kΩ und 6 kΩ liegen parallel. Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

Gegeben: $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$; $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$; $R_3 = 6\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{3\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{6\,\mathrm{k\Omega}}} \\ &= 1\,\mathrm{k\Omega} \end{aligned}$$

1 kΩ. Der Gesamtwiderstand ist immer kleiner als der kleinste Teilwiderstand.

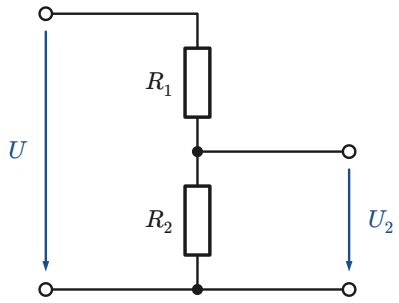


Abb. 10.4 Unbelasteter Spannungsteiler: Am Widerstand R_2 liegt die Teilspannung U_2

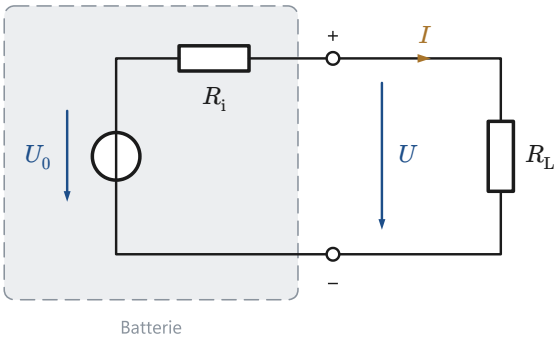


Abb. 10.5 Ersatzschaltbild der Batterie: Quellenspannung U_0 und Innenwiderstand R_i; an der Last R_L liegt die Klemmenspannung U

Spannungsteiler (unbelastet)

(10.11) GESELLE

$$U_2 = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

U_2	Teilspannung am Widerstand R_2	V
U	Spannung (Gesamtspannung)	V
R_1	erster Teilwiderstand	Ω
R_2	zweiter Teilwiderstand (an ihm wird abgegriffen)	Ω

Zwei Widerstände in Reihe teilen die Spannung im Verhältnis ihrer Werte. So gewinnt man aus einer Spannung eine kleinere.

Gilt: unbelastet: Der Strom am Abgriff ist viel kleiner als der Strom durch den Teiler. Ein Verbraucher parallel zu R_2 senkt die Teilspannung.

BEISPIEL Aus einer Lithiumzelle mit 3,0 V soll eine Teilspannung gewonnen werden. Der Teiler besteht aus 120 kΩ und 100 kΩ. Welche Spannung liegt am 100-kΩ-Widerstand?

Gegeben: $U = 3{,}0\,\mathrm{V}$; $R_1 = 120\,\mathrm{k\Omega}$; $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{3{,}0\,\mathrm{V} \cdot 100\,\mathrm{k\Omega}}{120\,\mathrm{k\Omega} + 100\,\mathrm{k\Omega}} \\ &\approx 1{,}36\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Rund 1,36 V, solange am Abgriff kein nennenswerter Strom entnommen wird.

Klemmenspannung der belasteten Batterie

(10.12) GESELLE

$$U = U_0 - I \cdot R_\mathrm{i}$$

UMGESTELLT $R_\mathrm{i} = \dfrac{U_0 - U}{I}$

U	Spannung (Klemmenspannung unter Last)	V
U_0	Quellenspannung (Leerlaufspannung, ohne Last gemessen)	V
I	Stromstärke (Laststrom)	A
R_i	Innenwiderstand der Batterie	Ω

Sobald Strom fließt, fällt ein Teil der Spannung am Innenwiderstand der Batterie ab. An den Klemmen bleibt weniger übrig, und zwar umso weniger, je größer der Strom und je älter die Zelle ist.

Gilt: Ersatzschaltbild aus Quellenspannung und einem festen Innenwiderstand. Bei echten Zellen wächst R_i mit der Entladung, mit dem Alter und in der Kälte.

Aber Vorsicht: Die Spannung ohne Last sagt wenig über den Zustand einer Zelle. Auch eine fast leere Silberoxidzelle zeigt am hochohmigen Messgerät noch über 1,5 V. Batterien deshalb immer unter Last prüfen.

BEISPIEL Eine Silberoxidzelle hat ohne Last 1,57 V und einen Innenwiderstand von 50 Ω. Welche Spannung liegt an, während der Motorimpuls 0,8 mA zieht?

Gegeben: $U_0 = 1{,}57\,\mathrm{V}$; $I = 0{,}8\,\mathrm{mA}$; $R_\mathrm{i} = 50\,\Omega$

$$\begin{aligned} U &= U_0 - I \cdot R_\mathrm{i} \\ &= 1{,}57\,\mathrm{V} - 0{,}8\,\mathrm{mA} \cdot 50\,\Omega \\ &\approx 1{,}53\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

1,53 V. Eine frische Zelle bricht unter dem Impuls nur um wenige Hundertstel Volt ein.

Innenwiderstand aus Leerlauf- und Lastmessung

(10.13) MEISTER

$$R_\mathrm{i} = \frac{R_\mathrm{L} \cdot (U_0 - U)}{U}$$

Zwei Messungen genügen: einmal ohne, einmal mit bekanntem Lastwiderstand. Innenwiderstand und Last bilden einen Spannungsteiler; aus dem Einbruch der Spannung folgt der Innenwiderstand.

Gilt: Messgerät viel hochohmiger als der Lastwiderstand; Last nur kurz anlegen, damit sich die Zelle nicht entlädt.

R_i	Innenwiderstand der Batterie	Ω
R_L	Lastwiderstand (des Prüfgeräts)	Ω
U_0	Quellenspannung (Leerlaufspannung, ohne Last gemessen)	V
U	Spannung (Klemmenspannung unter Last)	V

BEISPIEL Eine gebrauchte Zelle zeigt ohne Last 1,57 V und an einem Lastwiderstand von 2 kΩ noch 1,49 V. Wie groß ist ihr Innenwiderstand?

Gegeben: $R_\mathrm{L} = 2\,\mathrm{k\Omega}$; $U_0 = 1{,}57\,\mathrm{V}$; $U = 1{,}49\,\mathrm{V}$

$$\begin{aligned} R_\mathrm{i} &= \frac{R_\mathrm{L} \cdot (U_0 - U)}{U} \\ &= \frac{2\,\mathrm{k\Omega} \cdot (1{,}57\,\mathrm{V} - 1{,}49\,\mathrm{V})}{1{,}49\,\mathrm{V}} \\ &\approx 107\,\Omega \end{aligned}$$

Rund 107 Ω. Die Zelle ist deutlich gealtert und sollte ersetzt werden, auch wenn sie ohne Last noch gut aussieht.

Merksatz: Batterien werden unter Last geprüft. Die Spannung ohne Last zeigt nur, um welches System es sich handelt.

10.3 Kondensator und Spule

Der Kondensator speichert Ladung, die Spule wehrt sich gegen jede Änderung des Stroms. In der Uhr begegnen uns Kondensatoren am Quarzoszillator (wenige Picofarad) und als Energiespeicher älterer Solar- und Automatikquarzwerke (einige Zehntel Farad). Die Spule ist das Herz des Schrittmotors.

Ladung des Kondensators

(10.14) MEISTER

$$Q = C \cdot U$$

Die Kapazität sagt, wie viel Ladung der Kondensator je Volt aufnimmt. Ein Farad ist ein Coulomb je Volt.

Q	Ladung (im Kondensator gespeichert)	C
C	Kapazität	F
U	Spannung (am Kondensator)	V

BEISPIEL Ein Speicherkondensator mit 0,33 F ist auf 1,8 V geladen. Welche Ladung enthält er?

Gegeben: $C = 0{,}33\,\mathrm{F}$; $U = 1{,}8\,\mathrm{V}$

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U \\ &= 0{,}33\,\mathrm{F} \cdot 1{,}8\,\mathrm{V} \\ &= 0{,}594\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

0,594 C, das sind nur 0,165 mAh. Eine kleine Silberoxidzelle speichert mehr als das Hundertfache.

Kapazität des Plattenkondensators

(10.15) VERTIEFUNG

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A}{d}$$

Große Platten, kleiner Abstand und ein guter Isolierstoff ergeben eine große Kapazität. Im Drehtrimmer ändert man die Fläche, mit der sich die Platten überdecken.

Gilt: Plattenabstand klein gegenüber den Abmessungen der Platten.

C	Kapazität	F
ε_0	elektrische Feldkonstante, $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
ε_r	Permittivitätszahl des Isolierstoffs (Luft 1, Kunststofffolien 2 bis 4)	1
A	Fläche (einer Platte, soweit sich die Platten gegenüberstehen)	m^2
d	Abstand (der Platten)	m

BEISPIEL Zwei Platten von je 100 mm² stehen sich im Abstand von 0,01 mm gegenüber, dazwischen liegt eine Folie mit der Permittivitätszahl 4. Wie groß ist die Kapazität?

Gegeben: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$; $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$; $A = 100\,\mathrm{mm}^2$; $d = 0{,}01\,\mathrm{mm}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A}{d} \\ &= \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 4 \cdot 100\,\mathrm{mm}^2}{0{,}01\,\mathrm{mm}} \\ &\approx 354\,\mathrm{pF} \end{aligned}$$

Rund 354 pF. Kondensatoren mit Mikrofarad oder gar Farad brauchen gewickelte Folien oder poröse Elektroden mit riesiger Oberfläche.

Parallelschaltung von Kondensatoren

(10.16) MEISTER

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$

Parallel geschaltete Kondensatoren wirken wie ein Kondensator mit größerer Plattenfläche: Die Kapazitäten addieren sich. Es ist genau umgekehrt wie bei Widerständen. Die Formel gilt für beliebig viele Kondensatoren.

C	Kapazität (Gesamtkapazität der Schaltung)	F
C_1	erste Teilkapazität	F
C_2	zweite Teilkapazität	F
C_3	dritte Teilkapazität (weitere entsprechend)	F

BEISPIEL Am Quarz liegt ein Festkondensator von 10 pF, parallel dazu ein Trimmer, der auf 12 pF eingestellt ist. Die Leiterbahnen bringen weitere 3 pF. Wie groß ist die Kapazität zusammen?

Gegeben: $C_1 = 10\,\mathrm{pF}$; $C_2 = 12\,\mathrm{pF}$; $C_3 = 3\,\mathrm{pF}$

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + C_3 \\ &= 10\,\mathrm{pF} + 12\,\mathrm{pF} + 3\,\mathrm{pF} \\ &= 25\,\mathrm{pF} \end{aligned}$$

25 pF. Mit dem Trimmer lässt sich die Gesamtkapazität und damit die Frequenz des Quarzes fein verstellen.

Reihenschaltung von Kondensatoren

(10.17) MEISTER

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

UMGESTELLT $$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots}$$

C	Kapazität (Gesamtkapazität der Schaltung)	F
C_1	erste Teilkapazität	F
C_2	zweite Teilkapazität	F
C_3	dritte Teilkapazität (weitere entsprechend)	F

In Reihe addieren sich die Kehrwerte. Die Gesamtkapazität ist kleiner als die kleinste Teilkapazität. Die Formel gilt für beliebig viele Kondensatoren; für zwei rechnet man kürzer $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$.

BEISPIEL Drei Kondensatoren von 30 pF, 20 pF und 12 pF liegen in Reihe. Welche Kapazität ergibt das?

Gegeben: $C_1 = 30\,\mathrm{pF}$; $C_2 = 20\,\mathrm{pF}$; $C_3 = 12\,\mathrm{pF}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{30\,\mathrm{pF}} + \frac{1}{20\,\mathrm{pF}} + \frac{1}{12\,\mathrm{pF}}} \\ &= 6\,\mathrm{pF} \end{aligned}$$

6 pF. Im Quarzoszillator liegen die beiden Lastkondensatoren für den Quarz in Reihe: 22 pF und 15 pF ergeben 8,9 pF. Dazu kommen einige Picofarad der Leiterbahnen; die Summe ist die Lastkapazität, für die der Quarz abgeglichen sein muss.

Zeitkonstante beim Laden und Entladen

(10.18) MEISTER

$$\tau = R \cdot C$$

τ	Zeitkonstante	s
R	Widerstand (im Lade- oder Entladekreis)	Ω
C	Kapazität	F

Ein Kondensator lädt sich über einen Widerstand nicht schlagartig. Nach einer Zeitkonstante sind 63 % der Ladespannung erreicht, nach fünf Zeitkonstanten über 99 %. Beim Entladen fällt die Spannung im selben Takt.

BEISPIEL Ein Speicherkondensator mit 0,33 F wird über 1 kΩ geladen. Wie groß ist die Zeitkonstante?

Gegeben: $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 0{,}33\,\mathrm{F}$

$$\begin{aligned} \tau &= R \cdot C \\ &= 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 0{,}33\,\mathrm{F} \\ &= 330\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

330 s. Praktisch voll ist der Kondensator nach fünf Zeitkonstanten, also nach gut 27 Minuten.

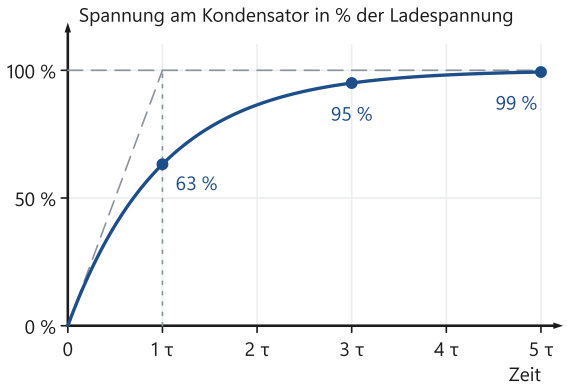


Abb. 10.6 Ladekurve des Kondensators: nach einer Zeitkonstante τ 63 %, nach $5\,\tau$ über 99 % der Ladespannung

Spannung am Kondensator beim Laden

(10.19) VERTIEFUNG

$$u_\mathrm{C} = U \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Die Spannung steigt anfangs schnell und nähert sich dann immer langsamer der Ladespannung. Beim Entladen gilt $u_\mathrm{C} = U \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$.

Gilt: Kondensator zu Beginn leer; Ladespannung und Widerstand konstant.

u_C	Spannung am Kondensator zur Zeit t	V
U	Spannung (Ladespannung der Quelle)	V
t	Zeit (seit Beginn des Ladens)	s
τ	Zeitkonstante	s

BEISPIEL Der Kondensator aus dem vorigen Beispiel (Zeitkonstante 330 s) wird an 1,8 V geladen. Welche Spannung hat er nach 10 Minuten?

Gegeben: $U = 1{,}8\,\mathrm{V}$; $t = 600\,\mathrm{s}$; $\tau = 330\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} u_\mathrm{C} &= U \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= 1{,}8\,\mathrm{V} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{600\,\mathrm{s}}{330\,\mathrm{s}}}\right) \\ &\approx 1{,}51\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Rund 1,51 V, das sind 84 % der Ladespannung.

Energie im Kondensator

(10.20) MEISTER

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

Die gespeicherte Energie wächst mit dem Quadrat der Spannung. Nutzbar ist nur der Teil oberhalb der Mindestspannung des Werks.

W	Energie (im Kondensator gespeichert)	J
C	Kapazität	F
U	Spannung (am Kondensator)	V

BEISPIEL Welche Energie speichert ein Kondensator mit 0,33 F bei 1,8 V?

Gegeben: $C = 0{,}33\,\mathrm{F}$; $U = 1{,}8\,\mathrm{V}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0{,}33\,\mathrm{F} \cdot (1{,}8\,\mathrm{V})^2 \\ &\approx 0{,}53\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 0,53 J. Bei 2 µW Leistungsaufnahme wären das rechnerisch drei Tage; nutzbar ist weniger, weil die Spannung beim Entladen sinkt.

Spule. Ändert sich der Strom in einer Spule, entsteht in ihr eine Induktionsspannung, die der Änderung entgegenwirkt. Darum steigt der Motorstrom nicht schlagartig an, und beim Abschalten entsteht eine Spannungsspitze. Auch der drehende Rotor induziert eine Spannung in der Spule; viele Schaltkreise erkennen daran, ob der Schritt ausgeführt wurde.

In der Werkstatt prüfen wir die Spule über ihren Widerstand. Je nach Kaliber liegt er bei rund 0,8 kΩ bis 2,7 kΩ. Zeigt das Messgerät keinen Durchgang, ist der Draht unterbrochen; ein deutlich zu kleiner Wert weist auf einen Windungsschluss hin.

10.4 Batterie

Die Kapazität einer Batterie ist die Ladung, die sich ihr entnehmen lässt, angegeben in Milliamperestunden (mAh). Sie hat mit der Kapazität des Kondensators nur den Namen gemeinsam. Zusammen mit der Stromaufnahme des Werks ergibt sie die Laufzeit.

Laufzeit aus Kapazität und Stromaufnahme

(10.21) GESELLE

$$t = \frac{C_\mathrm{N}}{I}$$

UMGESTELLT $I = \frac{C_\mathrm{N}}{t}$

t	Zeit (Laufzeit der Batterie)	h
C_N	Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung)	mAh
I	Stromstärke (mittlere Stromaufnahme des Werks)	mA

Kapazität durch Strom ergibt die Laufzeit. Umgekehrt zeigt die Formel, welche Stromaufnahme ein Werk höchstens haben darf, damit die Batterie die versprochene Zeit hält.

Gilt: gleichbleibende mittlere Stromaufnahme; Selbstentladung nicht berücksichtigt. Einheiten passend einsetzen: mAh und mA ergeben Stunden.

BEISPIEL Eine Zelle SR626SW hat 28 mAh. Das Werk nimmt im Mittel 1,2 µA auf. Wie lange läuft die Uhr?

Gegeben: $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$; $I = 1{,}2\,\mu\mathrm{A}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{C_\mathrm{N}}{I} \\ &= \frac{28\,\mathrm{mAh}}{1{,}2\,\mu\mathrm{A}} \\ &= 23\,333\,\mathrm{h} \\ &\approx 2{,}66\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Rund 23 300 Stunden, das sind gut zweieinhalb Jahre. Nimmt das Werk durch Verschmutzung 3 µA auf, ist die Zelle schon nach einem Jahr leer.

Energieinhalt der Batterie

(10.22) NÄHERUNG MEISTER

$$W \approx U_\mathrm{N} \cdot C_\mathrm{N}$$

Nennspannung mal Kapazität ergibt die gespeicherte Energie, meist in Milliwattstunden. Mit ihr lassen sich Zellen verschiedener Spannung vergleichen.

Gilt: Spannung über die Entladung annähernd konstant, wie bei Silberoxid- und Lithiumzellen.

W	Energie (in der Batterie gespeichert)	J
U_N	Nennspannung der Batterie	V
C_N	Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung)	mAh

BEISPIEL Welche Energie enthält eine Silberoxidzelle mit 1,55 V und 28 mAh?

Gegeben: $U_\mathrm{N} = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$

$$\begin{aligned} W &\approx U_\mathrm{N} \cdot C_\mathrm{N} \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 28\,\mathrm{mAh} \\ &= 43{,}4\,\mathrm{mWh} \end{aligned}$$

43,4 mWh, das sind rund 156 J. Eine voll aufgezogene Zugfeder einer Armbanduhr speichert weniger als 1 J (Kapitel 3).

Laufzeit mit Selbstentladung

(10.23) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$t \approx \frac{C_\mathrm{N}}{I + s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}}$$

Jede Zelle verliert auch ohne Verbraucher langsam Ladung. Die Selbstentladung wirkt wie ein kleiner zusätzlicher Strom $s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}$ neben der Stromaufnahme des Werks.

Gilt: Selbstentladung als gleichbleibender Verlust gerechnet. Richtwert für Silberoxidzellen bei Raumtemperatur: wenige Prozent je Jahr, in der Wärme deutlich mehr.

t	Zeit (Laufzeit der Batterie)	h
C_N	Nennkapazität der Batterie (entnehmbare Ladung)	mAh
I	Stromstärke (mittlere Stromaufnahme des Werks)	mA
s_E	Selbstentladung (Anteil der Nennkapazität, der je Zeit verloren geht)	$\frac{\%}{\mathrm{a}}$

BEISPIEL Wie lange läuft die Uhr aus dem Beispiel zur Laufzeit (28 mAh, 1,2 µA), wenn die Zelle zusätzlich 4 % ihrer Kapazität je Jahr durch Selbstentladung verliert?

Gegeben: $C_\mathrm{N} = 28\,\mathrm{mAh}$; $I = 1{,}2\,\mu\mathrm{A}$; $s_\mathrm{E} = 4\,\frac{\%}{\mathrm{a}}$

$$\begin{aligned} t &\approx \frac{C_\mathrm{N}}{I + s_\mathrm{E} \cdot C_\mathrm{N}} \\ &= \frac{28\,\mathrm{mAh}}{1{,}2\,\mu\mathrm{A} + 4\,\frac{\%}{\mathrm{a}} \cdot 28\,\mathrm{mAh}} \\ &\approx 2{,}41\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Rund 2,4 Jahre statt 2,7 Jahre. Je kleiner die Stromaufnahme des Werks, desto stärker zählt die Selbstentladung.

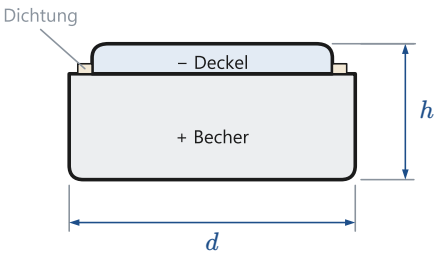


Abb. 10.7 Knopfzelle: Der Becher ist der Pluspol, der Deckel der Minuspol; Durchmesser d und Höhe h stecken in der Bezeichnung

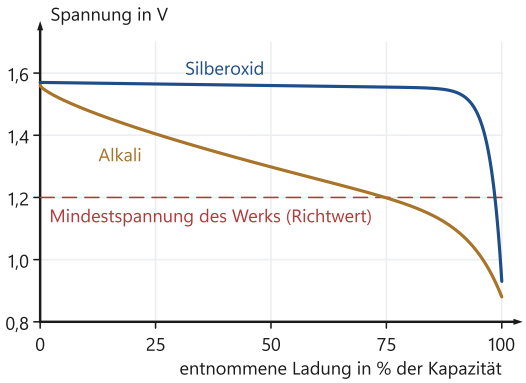


Abb. 10.8 Entladekurven im Prinzip: Die Silberoxidzelle hält ihre Spannung bis kurz vor dem Ende, die Alkalizelle fällt stetig ab

Batteriesysteme für Uhren

System	Kennbuchstaben	Nennspannung	Verhalten beim Entladen	Verwendung
Silberoxid	SR	1,55 V	Spannung bleibt bis kurz vor dem Ende fast gleich	Standard für Quarz-Armbanduhren
Alkali-Mangan	LR	1,5 V	Spannung fällt von Anfang an stetig	preiswerter Ersatz, Großuhren, Wecker
Lithium-Mangandioxid	CR	3 V	Spannung bleibt lange fast gleich	Uhren mit hohem Strombedarf, lange Laufzeit

Eine Alkalizelle gleicher Größe passt mechanisch, hat aber weniger Kapazität und eine fallende Spannung. In die Armbanduhr gehört die Silberoxidzelle.

Bezeichnung von Knopfzellen nach IEC

Teil der Bezeichnung	Bedeutung	Beispiel SR626SW
erster Buchstabe	elektrochemisches System: S Silberoxid, L Alkali-Mangan, C Lithium-Mangandioxid	S: Silberoxid
zweiter Buchstabe	Bauform: R rund	R: runde Zelle
erste Ziffer oder die ersten beiden Ziffern	Durchmesser in mm, abgerundet auf ganze Millimeter	6: Durchmesser 6,8 mm
letzte beiden Ziffern	Höhe in Zehntelmillimetern	26: Höhe 2,6 mm
Zusatz der Hersteller	SW: für kleine Dauerströme (Analoguhren); W: für hohe Stromspitzen (Licht, Alarm)	SW: für kleine Ströme

Eine CR2032 ist demnach eine runde Lithiumzelle mit 20 mm Durchmesser und 3,2 mm Höhe. Ältere Bezeichnungen wie SR44 sind fortlaufende Nummern ohne Maßangabe.

Gängige Silberoxid-Knopfzellen (1,55 V)

Bezeichnung	Handelsnummer	Durchmesser in mm	Höhe in mm	Kapazität in mAh (typisch)
SR521SW	379	5,8	2,15	14 bis 16
SR616SW	321	6,8	1,65	14 bis 16
SR621SW	364	6,8	2,15	19 bis 23
SR626SW	377	6,8	2,6	24 bis 28
SR721SW	362	7,9	2,1	21 bis 25
SR920SW	371	9,5	2,05	35 bis 40
SR927SW	395	9,5	2,7	50 bis 55
SR1130SW	390	11,6	3,05	60 bis 85
SR44W	357	11,6	5,4	150 bis 180

Die Kapazität hängt vom Hersteller ab; maßgeblich ist das Datenblatt der Zelle.

10.5 Quarz und Frequenzteiler

Der Gangregler der Quarzuhr ist ein winziger Quarzkristall in Form einer Stimmgabel. Er schwingt mit 32 768 Hz, das sind 2^{15} Schwingungen je Sekunde. Ein Teiler halbiert diese Frequenz 15-mal und erhält so genau einen Impuls je Sekunde.

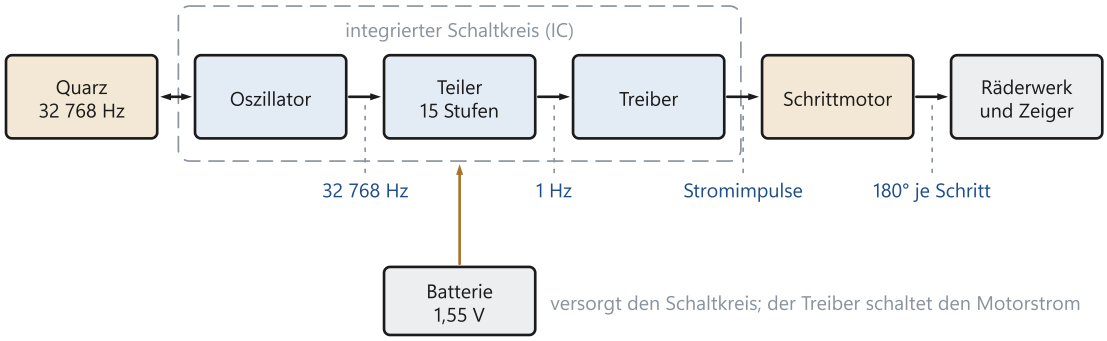


Abb. 10.9 Blockschaltbild der analogen Quarzuhr

Frequenzteiler

(10.24) GESELLE

$$f_{\text{aus}} = \frac{f}{2^n}$$

f_{aus}	Frequenz am Ausgang des Teilers	Hz
f	Frequenz (des Quarzes)	Hz
n	Anzahl (der Teilerstufen; jede halbiert die Frequenz)	1

Jede Stufe ist eine Kippschaltung, die bei jedem zweiten Eingangsimpuls einen Ausgangsimpuls abgibt. Darum wählt man als Quarzfrequenz eine Zweierpotenz.

BEISPIEL Welche Frequenz liefert ein Teiler mit 15 Stufen aus der Quarzfrequenz 32 768 Hz?

Gegeben: $f = 32\,768\,\text{Hz}$; $n = 15$

$$\begin{aligned} f_{\text{aus}} &= \frac{f}{2^n} \\ &= \frac{32\,768\,\text{Hz}}{2^{15}} \\ &= 1\,\text{Hz} \end{aligned}$$

Genau 1 Hz: ein Impuls je Sekunde für den Schrittmotor.

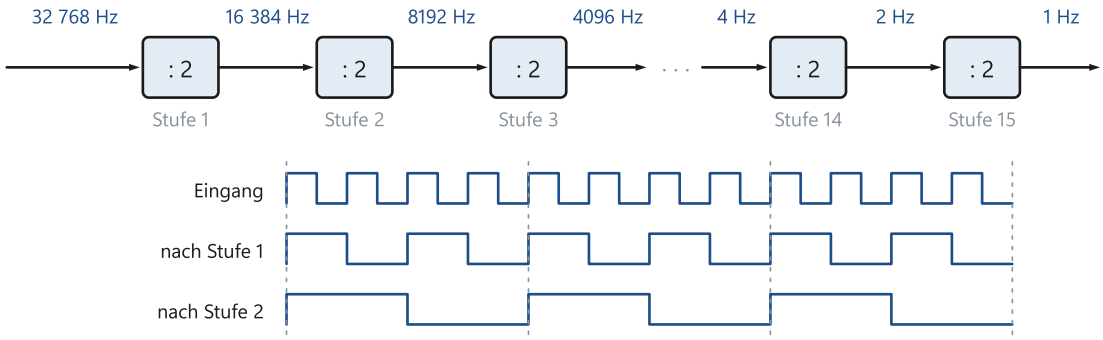


Abb. 10.10 Teilerkette: Jede Stufe halbiert die Frequenz; nach 15 Stufen bleibt 1 Hz

Gang der Quarzuhr aus der Frequenzabweichung

(10.25) GESELLE

$$G = \frac{\Delta f}{f} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
Δf	Frequenzabweichung (+ heißt: Quarz schwingt zu schnell)	Hz
f	Frequenz (Sollfrequenz des Quarzes)	Hz

Schwingt der Quarz zu schnell, geht die Uhr im selben Verhältnis vor. Relative Abweichungen gibt man in Millionsteln an (ppm, Kapitel 1). Für die Unruh steht dieselbe Formel in Abschnitt 5.4.

Gilt: die Uhr zählt jede Quarzschwingung (keine Inhibition).

Gut zu wissen: 1 ppm entspricht 0,0864 $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$, rund 2,6 s im Monat und rund 31,5 s im Jahr.

BEISPIEL Ein Quarz schwingt mit 32 768,2 Hz statt 32 768 Hz, also 0,2 Hz zu schnell. Welchen Gang hat die Uhr?

Gegeben: $\Delta f = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$; $f = 32\,768\,\mathrm{Hz}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\Delta f}{f} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{0{,}2\,\mathrm{Hz}}{32\,768\,\mathrm{Hz}} \cdot 86\,400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 0{,}53\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Uhr geht 0,53 s am Tag vor, das sind rund 16 s im Monat. Die Abweichung beträgt 6,1 ppm.

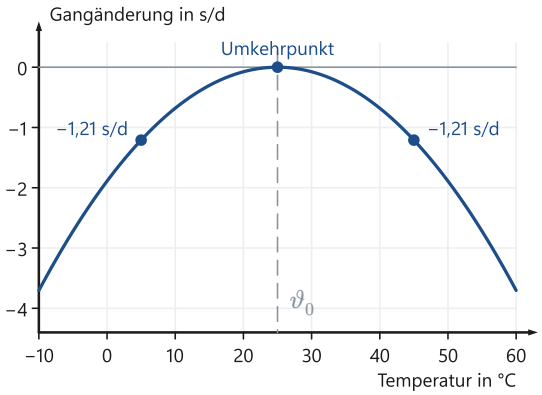


Abb. 10.11 Temperaturgang des Stimmgabelquarzes, gerechnet mit $\beta = 0{,}035\ \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K}^2}$ und Umkehrpunkt 25 °C

Temperaturgang des Stimmgabelquarzes

(10.26) NÄHERUNG MEISTER

$$\Delta G \approx -\beta \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Frequenz des Stimmgabelquarzes ist am Umkehrpunkt am höchsten und fällt nach beiden Seiten mit dem Quadrat des Temperaturabstands. Die Uhr wird also in der Kälte wie in der Hitze langsamer als am Umkehrpunkt, nie schneller.

Gilt: Stimmgabelquarze mit 32 768 Hz; Koeffizient und Umkehrpunkt streuen von Quarz zu Quarz, maßgeblich ist das Datenblatt.

ΔG	Gangänderung (gegenüber dem Gang am Umkehrpunkt; − heißt: Uhr wird langsamer)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
β	Temperaturkoeffizient des Quarzes (Richtwert 0,03 bis 0,04 ppm je Kelvin zum Quadrat)	$\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$
ϑ	Temperatur (des Quarzes)	$^\circ\mathrm{C}$
ϑ_0	Temperatur des Umkehrpunkts (rund 25 °C)	$^\circ\mathrm{C}$

Gut zu wissen: Dazu kommt die Alterung: Im ersten Jahr ändert sich die Frequenz eines Quarzes um wenige ppm, danach immer langsamer. Thermokompensierte Werke messen die Temperatur und gleichen die Parabel rechnerisch aus.

BEISPIEL Eine Quarzuhr liegt im Winter bei 5 °C im Auto. Um wie viel ändert sich ihr Gang gegenüber 25 °C, wenn der Koeffizient 0,035 ppm je Kelvin zum Quadrat beträgt?

Gegeben: $\beta = 0{,}035\ \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$; $\vartheta = 5^\circ\mathrm{C}$; $\vartheta_0 = 25^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned}\Delta G &\approx -\beta \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -0{,}035\ \tfrac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}} \cdot (5^\circ\mathrm{C} - 25^\circ\mathrm{C})^2 \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -1{,}21\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Die Uhr wird um rund 1,2 s am Tag langsamer. Am Arm bleibt der Quarz nahe am Umkehrpunkt; eine getragene Uhr geht deshalb gleichmäßiger als eine abgelegte.

Inhibition: Gangkorrektur durch ausgeblendete Impulse

(10.27) MEISTER

$$\Delta G = -\frac{N}{f \cdot t_\mathrm{I}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Werke ohne Trimmer gleichen den Gang digital ab. Der Quarz ist absichtlich etwas zu schnell; der Schaltkreis lässt in jeder Inhibitionsperiode eine gespeicherte Zahl von Impulsen aus und bremst die Uhr damit auf den Sollgang.

Gilt: Inhibitionsperiode je nach Schaltkreis meist 60 s, bei manchen Werken 10 s, bei thermokompensierten Werken auch mehrere Minuten (ETA 252.511: 8 min); Herstellerangabe beachten.

ΔG	Gangänderung (durch die Inhibition; − heißt: Uhr wird langsamer)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
N	Anzahl (der je Inhibitionsperiode ausgeblendeten Impulse)	1
f	Frequenz (der Impulse an der Stelle des Teilers, an der ausgeblendet wird)	Hz
t_I	Inhibitionsperiode	s

Aber Vorsicht: Zwischen den Korrekturen läuft die Uhr mit der unkorrigierten Quarzfrequenz. Der Gang muss deshalb über eine ganze Inhibitionsperiode oder ein Vielfaches davon gemessen werden, am Motorimpuls und nicht an der Quarzfrequenz. Sonst zeigt das Prüfgerät ein scheinbares Vorgehen.

BEISPIEL Ein Schaltkreis blendet alle 60 s einen Impuls der Quarzfrequenz 32 768 Hz aus. Wie groß ist dieser kleinste Korrekturschritt?

Gegeben: $N = 1$; $f = 32\,768\,\mathrm{Hz}$; $t_\mathrm{I} = 60\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\frac{N}{f \cdot t_\mathrm{I}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= -\frac{1}{32\,768\,\mathrm{Hz} \cdot 60\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx -0{,}044\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Jeder ausgeblendete Impuls macht die Uhr um 0,044 s am Tag langsamer, das sind 0,51 ppm. Ein Quarz, der 5 ppm zu schnell schwingt, braucht also rund 10 ausgeblendete Impulse je Minute.

Merksatz: Der Uhrenquarz schwingt mit 32 768 Hz. 15 Teilerstufen machen daraus den Sekundentakt. 1 ppm sind rund 2,6 s im Monat.

10.6 Schrittmotor

Der Schrittmotor nach Lavet besteht aus Spule, Stator und einem Rotor mit zweipoligem Dauermagnet. Jeder Stromimpuls dreht den Rotor um eine halbe Umdrehung weiter. Der nächste Impuls muss umgekehrt gepolt sein, sonst bleibt der Rotor stehen. Zwischen den Impulsen halten ihn die Rastkerben des Stators ohne Strom in seiner Lage.

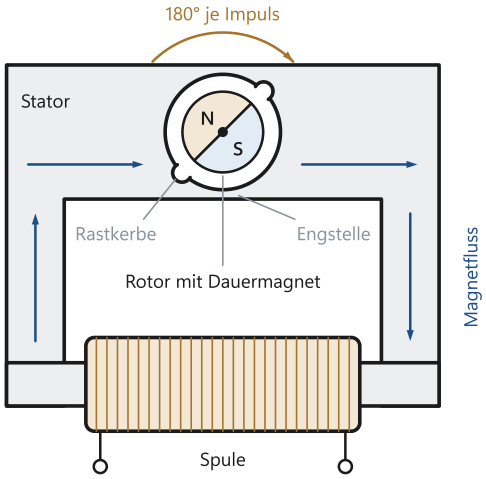


Abb. 10.12 Lavet-Schrittmotor im Prinzip: Die Engstellen des Stators sind magnetisch gesättigt, der Fluss der Spule geht deshalb durch den Rotor und dreht ihn um 180° in die nächste Rastlage

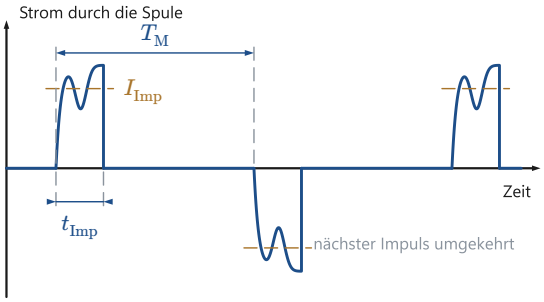


Abb. 10.13 Motorstrom: kurze Impulse der Dauer t_{Imp} im Abstand T_M mit wechselnder Richtung (Impulsbreite stark übertrieben)

Drehzahl des Rotors

(10.28) GESELLE

$$n_R = \frac{f_M \cdot \varphi_S}{360°}$$

Bei einem Impuls je Sekunde und einer halben Umdrehung je Schritt dreht sich der Rotor in zwei Sekunden einmal.

n_R	Drehzahl (des Rotors)	$\frac{1}{min}$
f_M	Frequenz der Motorimpulse (Schritte je Zeit)	Hz
φ_S	Schrittwinkel des Rotors (beim Lavet-Motor 180°)	°

BEISPIEL Wie schnell dreht sich der Rotor eines Werks mit Sekundenzeiger, das jede Sekunde einen Schritt von 180° macht?

Gegeben: $f_M = 1\,\text{Hz}$; $\varphi_S = 180°$

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{f_M \cdot \varphi_S}{360°} \\ &= \frac{1\,\text{Hz} \cdot 180°}{360°} \\ &= 0{,}5\,\frac{1}{s} \cdot 60\,\frac{s}{min} \\ &= 30\,\frac{1}{min} \end{aligned}$$

30 Umdrehungen je Minute.

Untersetzung vom Rotor zum Sekundenrad

(10.29) GESELLE

$$i_{\mathrm{U}} = \frac{n_{\mathrm{R}}}{n_{\mathrm{S}}}$$

Im Quarzwerk treibt der kleine Rotortrieb die Räder, das Räderwerk übersetzt ins Langsame. Die Übersetzung i nach Kapitel 4 ist dann kleiner als 1. Anschaulicher ist ihr Kehrwert, die Untersetzung: Sie sagt, wie oft sich der Rotor für eine Umdrehung des Sekundenrads dreht. Sie ist das Produkt der Verhältnisse aus Zähnezahl des Rades und Zähnezahl des treibenden Triebes je Stufe.

i_{U}	Untersetzung (Drehzahl des treibenden Rotors durch Drehzahl des Sekundenrads; Kehrwert der Übersetzung i aus Kapitel 4)	1
n_{R}	Drehzahl (des Rotors)	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
n_{S}	Drehzahl des Sekundenrads (eine Umdrehung je Minute)	$\frac{1}{\mathrm{min}}$

BEISPIEL Der Rotor macht 30 Umdrehungen je Minute, das Sekundenrad eine. Welche Untersetzung braucht das Räderwerk dazwischen?

Gegeben: $n_{\mathrm{R}} = 30\,\frac{1}{\mathrm{min}}$; $n_{\mathrm{S}} = 1\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{U}} &= \frac{n_{\mathrm{R}}}{n_{\mathrm{S}}} \\ &= \frac{30\,\frac{1}{\mathrm{min}}}{1\,\frac{1}{\mathrm{min}}} \\ &= 30 \end{aligned}$$

30, zum Beispiel in zwei Stufen mit 6 und 5: Der Sekundenzeiger rückt je Schritt um 6° weiter, eine Sekundenteilung.

Mittlere Stromaufnahme des Werks

(10.30) MEISTER

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}}{T_{\mathrm{M}}} + I_{\mathrm{IC}}$$

Der Motor zieht nur während des kurzen Impulses Strom. Über die ganze Sekunde gemittelt bleibt davon der Bruchteil Impulsdauer durch Periodendauer; dazu kommt der kleine Dauerstrom des Schaltkreises.

Gilt: gleichmäßige Folge gleicher Impulse. Ein träges Messgerät oder eine Messung über mehrere Sekunden zeigt diesen Mittelwert.

I_{m}	mittlere Stromaufnahme des Werks	$\mu\mathrm{A}$
I_{Imp}	Strom durch die Spule während des Impulses (Mittelwert über die Impulsdauer)	mA
t_{Imp}	Impulsdauer	ms
T_{M}	Periodendauer der Motorimpulse (bei Sekundenschritt 1 s)	s
I_{IC}	Stromaufnahme des Schaltkreises mit Oszillator	$\mu\mathrm{A}$

Gut zu wissen: Bei Werken mit Stoppschalter steht der Motor bei gezogener Krone, und es fließt nur der Strom des Schaltkreises. So lassen sich beide Anteile getrennt messen. Läuft das Räderwerk schwer, verlängern viele Schaltkreise den Impuls, und die Stromaufnahme steigt.

BEISPIEL Während des Impulses von 3,9 ms fließen im Mittel 0,24 mA. Der Schaltkreis braucht 0,15 µA. Wie groß ist die mittlere Stromaufnahme bei einem Schritt je Sekunde?

Gegeben: $I_{\mathrm{Imp}} = 0{,}24\,\mathrm{mA}$; $t_{\mathrm{Imp}} = 3{,}9\,\mathrm{ms}$; $T_{\mathrm{M}} = 1\,\mathrm{s}$; $I_{\mathrm{IC}} = 0{,}15\,\mu\mathrm{A}$

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{m}} &= \frac{I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}}{T_{\mathrm{M}}} + I_{\mathrm{IC}} \\ &= \frac{0{,}24\,\mathrm{mA} \cdot 3{,}9\,\mathrm{ms}}{1\,\mathrm{s}} + 0{,}15\,\mu\mathrm{A} \\ &= 1{,}09\,\mu\mathrm{A} \end{aligned}$$

Rund 1,1 µA, ein üblicher Wert für ein Dreizeigerwerk. Der Motor braucht davon gut 85 %.

Energie eines Motorimpulses

(10.31) MEISTER

$$W = U \cdot I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}}$$

So viel Energie entnimmt ein Schritt der Batterie. Nur ein Teil davon bewegt den Rotor und das Räderwerk, der Rest wird in der Spule zu Wärme.

Gilt: Spannung während des Impulses annähernd konstant.

W	Arbeit (elektrische Arbeit je Impuls)	J
U	Spannung (der Batterie unter Last)	V
I_{Imp}	Strom durch die Spule während des Impulses (Mittelwert über die Impulsdauer)	mA
t_{Imp}	Impulsdauer	ms

BEISPIEL Welche Energie kostet ein Impuls von 3,9 ms Dauer mit im Mittel 0,24 mA an 1,55 V?

Gegeben: $U = 1{,}55\,\mathrm{V}$; $I_{\mathrm{Imp}} = 0{,}24\,\mathrm{mA}$; $t_{\mathrm{Imp}} = 3{,}9\,\mathrm{ms}$

$$\begin{aligned} W &= U \cdot I_{\mathrm{Imp}} \cdot t_{\mathrm{Imp}} \\ &= 1{,}55\,\mathrm{V} \cdot 0{,}24\,\mathrm{mA} \cdot 3{,}9\,\mathrm{ms} \\ &\approx 1{,}45\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

Rund 1,5 µJ je Schritt. An einem Tag mit 86 400 Schritten sind das 0,13 J.

10.7 Messen an der Quarzuhr

Mit wenigen Messungen lässt sich fast jeder Fehler einer Quarzuhr eingrenzen: Batterie, Stromaufnahme, untere Arbeitsspannung, Spule und Gang. Die Werte der Tabelle sind Richtwerte für Dreizeigerwerke. Verbindlich sind die Angaben in der technischen Unterlage des Kalibers.

Prüfgrößen der analogen Quarzuhr (Richtwerte)

Prüfgröße	Richtwert	Bedeutung
Batteriespannung ohne Last (Silberoxid)	1,55 V bis 1,6 V	zeigt nur das System; sagt wenig über den Zustand der Zelle
Batteriespannung unter leichter Last (in der Uhr gemessen)	mindestens 1,5 V	darunter die Zelle ersetzen; an einem kräftigen Lastwiderstand des Prüfgeräts (einige hundert Ohm) darf die Spannung tiefer sinken, dort gilt die Skala des Geräts
Stromaufnahme des Werks	je nach Kaliber höchstens 0,7 µA bis 1,3 µA	ohne Batterie an 1,55 V gemessen; zu hoch: Räderwerk schwergängig, Verschmutzung, Feuchtigkeit oder Kurzschluss; Chronographen und Werke mit Zusatzfunktionen brauchen mehr, rund 3 µA bis 6,5 µA
Stromaufnahme bei gezogener Krone (Werke mit Stoppschalter)	höchstens 0,4 µA bis 0,5 µA	nur der Schaltkreis; zu hoch: Schaltkreis oder Leiterplatte fehlerhaft
untere Arbeitsspannung	höchstens 1,3 V	Speisespannung von 1,55 V absenken, bis das Werk stehen bleibt; bis 1,3 V muss es noch sicher jeden Schritt ausführen. Bleibt es früher stehen, läuft das Räderwerk zu schwer oder Motor oder Schaltkreis sind fehlerhaft
Spulenwiderstand	je nach Kaliber rund 0,8 kΩ bis 2,7 kΩ	kein Durchgang: Draht unterbrochen; deutlich zu klein: Windungsschluss. Mit kleiner Prüfspannung messen, höchstens 0,4 V, besser 0,2 V
Isolationswiderstand (Spule gegen Werkplatte)	kein Durchgang (Anzeige unendlich)	zeigt das Messgerät einen Widerstand: Feuchtigkeit, beschädigte Isolation
Gang	je nach Hersteller rund −10 s bis +20 s im Monat, das sind $-0{,}3\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ bis $+0{,}7\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	am Motorimpuls über die Inhibitionsperiode messen, meist 60 s (Abschnitt 10.5)

Richtwerte aus Herstellerangaben, gemessen bei 20 °C bis 25 °C. Beispiele für die höchste zulässige Stromaufnahme: ETA 902.002 0,7 µA, Ronda 1005 0,95 µA, ETA F06.111 1,1 µA, ETA 255.411 1,2 µA, ETA 805.112 1,3 µA; Chronograph ETA G10.211 3,5 µA, mit laufender Stoppfunktion 6,5 µA. Beispiele für den Spulenwiderstand: ETA 805.112 0,8 kΩ bis 1,1 kΩ, ETA 255.411 1,3 kΩ bis 1,75 kΩ, Ronda 1005 2,5 kΩ bis 2,7 kΩ. Verbindlich sind Sollwerte und Prüfbedingungen in der technischen Unterlage des Kalibers.

Merksatz: Erst die Batterie unter Last, dann die Stromaufnahme, dann die untere Arbeitsspannung. Stimmen alle drei, liegt der Fehler selten an der Elektronik.

11 Zeit und Kalender

Unsere Uhren zeigen mittlere Sonnenzeit: einen gedachten, völlig gleichmäßigen Sonnentag von 86 400 s. Die wahre Sonne, die Sterne und der Mond halten sich nicht an dieses Maß. Für eine Sternzeituhr, einen ewigen Kalender, eine Äquationsanzeige oder eine Mondphase brauchen wir die Zahlen und Formeln dieses Kapitels.

Am Ende stehen die Skalen der Chronographen: Tachymeter, Telemeter und Pulsometer. In diesem Kapitel ist E die Zeitgleichung, λ die geographische Länge, s ein Weg und c die Schallgeschwindigkeit. Die Zähnezahlen für Kalender- und Mondwerke stehen in Kapitel 4.

11.1 Tag und Jahr

Ein Tag ist eine Erddrehung, aber gemessen woran? Gegenüber der Sonne dauert sie im Mittel 24 h, gegenüber den Sternen rund 4 min weniger. Der Grund: Die Erde zieht an einem Tag auf ihrer Bahn knapp 1° weiter und muss dieses Stück zusätzlich drehen, bis die Sonne wieder im Süden steht.

Zeitmaße aus der Astronomie (Mittelwerte für die heutige Zeit)

Zeitmaß	Dauer	ausgeschrieben	Bezug
mittlerer Sonnentag	$86\,400\,\mathrm{s}$	24 h	Sonne im Süden bis Sonne im Süden, übers Jahr gemittelt
Sterntag	$86\,164{,}09\,\mathrm{s}$	23 h 56 min 4,09 s	eine Erddrehung gegenüber den Sternen
tropisches Jahr	$365{,}242\,19\,\mathrm{d}$	365 d 5 h 48 min 45 s	Frühlingsanfang bis Frühlingsanfang; Jahr der Jahreszeiten
siderisches Jahr	$365{,}256\,36\,\mathrm{d}$	365 d 6 h 9 min 10 s	ein Umlauf der Erde gegenüber den Sternen
synodischer Monat	$29{,}530\,59\,\mathrm{d}$	29 d 12 h 44 min 3 s	Neumond bis Neumond; Monat der Mondphasen
siderischer Monat	$27{,}321\,66\,\mathrm{d}$	27 d 7 h 43 min 11 s	ein Umlauf des Mondes gegenüber den Sternen

Tage sind hier immer mittlere Sonnentage. Der Kalender richtet sich nach dem tropischen Jahr, die Mondphase nach dem synodischen Monat. Ein einzelner synodischer Monat weicht um bis zu etwa 7 h vom Mittel ab.

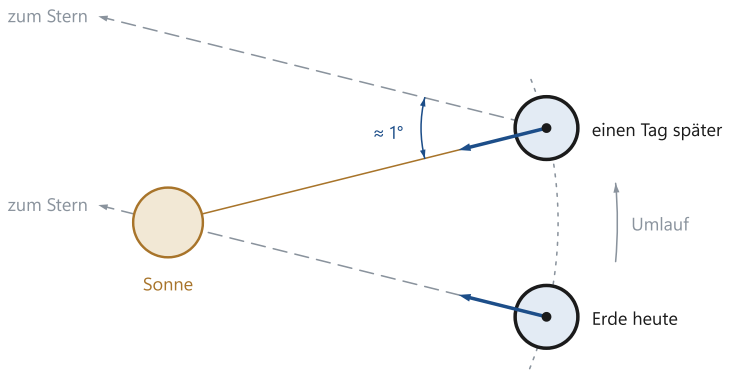


Abb. 11.1 Sterntag und Sonnentag: Nach einer vollen Drehung gegenüber den Sternen (gestrichelte Richtung) muss die Erde noch knapp 1° weiterdrehen, bis die Sonne wieder im Süden steht (Winkel stark übertrieben)

Sterntag aus Sonnentag und Jahr

(11.1) MEISTER

$$T_{\mathrm{St}} = \frac{T_{\mathrm{So}} \cdot T_{\mathrm{J}}}{T_{\mathrm{J}} + T_{\mathrm{So}}}$$

T_{St}	Sterntag	s
T_{So}	mittlerer Sonnentag	s
T_{J}	tropisches Jahr	d

In einem Jahr dreht sich die Erde gegenüber den Sternen genau einmal öfter als gegenüber der Sonne: 366,2422 Sterntage kommen auf 365,2422 Sonnentage. Daraus folgt die Länge des Sterntags.

Gilt: Mittelwerte für die heutige Zeit.

BEISPIEL Wie lang ist der Sterntag, wenn das tropische Jahr 365,2422 mittlere Sonnentage hat?

Gegeben: $T_{\mathrm{So}} = 1\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{J}} = 365{,}2422\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{St}} &= \frac{T_{\mathrm{So}} \cdot T_{\mathrm{J}}}{T_{\mathrm{J}} + T_{\mathrm{So}}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 365{,}2422\,\mathrm{d}}{365{,}2422\,\mathrm{d} + 1\,\mathrm{d}} \\ &= 0{,}997\,269\,6\,\mathrm{d} \\ &\approx 86\,164{,}1\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Der Sterntag dauert 23 h 56 min 4,1 s. Er ist 3 min 55,9 s kürzer als der mittlere Sonnentag.

Gang einer Sternzeituhr gegen mittlere Zeit

(11.2) MEISTER

$$G = \frac{T_{\mathrm{So}} - T_{\mathrm{St}}}{T_{\mathrm{St}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

G	Gang (+ heißt: Uhr geht vor)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
T_{So}	mittlerer Sonnentag	s
T_{St}	Sterntag	s

Eine Sternzeituhr zählt Sterntage, ihr Tag ist also kürzer. An einer Uhr für mittlere Zeit gemessen geht sie jeden Tag knapp 4 min vor.

Gut zu wissen: Für die Pendeluhr heißt das: Das Sekundenpendel für Sternzeit ist rund 5,4 mm kürzer als das Sekundenpendel für mittlere Zeit (Kapitel 6).

BEISPIEL Eine Sternzeituhr wird an einer Funkuhr reguliert, die mittlere Zeit zeigt. Welchen Gang muss sie gegenüber der Funkuhr haben?

Gegeben: $T_{\mathrm{So}} = 86\,400\,\mathrm{s}$; $T_{\mathrm{St}} = 86\,164{,}09\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} G &= \frac{T_{\mathrm{So}} - T_{\mathrm{St}}}{T_{\mathrm{St}}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &= \frac{86\,400\,\mathrm{s} - 86\,164{,}09\,\mathrm{s}}{86\,164{,}09\,\mathrm{s}} \cdot 86\,400\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \\ &\approx 236{,}6\ \tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \end{aligned}$$

Die Sternzeituhr muss am Tag 236,6 s vorgehen, das sind 3 min 56,6 s. In einem Jahr gewinnt sie genau einen Tag.

Synodischer Monat aus dem Mondumlauf

(11.3) VERTIEFUNG

$$T_{\mathrm{syn}} = \frac{T_{\mathrm{sid}} \cdot T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{sid}}}$$

Während eines Mondumlaufs zieht die Erde auf ihrer Bahn weiter. Der Mond braucht deshalb gut zwei Tage länger, bis er wieder zwischen Erde und Sonne steht. Nach derselben Formel holt ein schneller Zeiger einen langsamen ein.

Gilt: Mittelwerte; beide Umläufe im selben Drehsinn.

T_{syn}	synodischer Monat (Neumond bis Neumond)	d
T_{sid}	siderischer Monat (ein Mondumlauf gegenüber den Sternen)	d
T_{E}	siderisches Jahr (ein Erdumlauf gegenüber den Sternen)	d

BEISPIEL Der Mond läuft in 27,321 66 Tagen einmal um die Erde, die Erde in 365,256 36 Tagen einmal um die Sonne. Wie lange dauert es von Neumond zu Neumond?

Gegeben: $T_{\mathrm{sid}} = 27{,}321\,66\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{E}} = 365{,}256\,36\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{syn}} &= \frac{T_{\mathrm{sid}} \cdot T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{sid}}} \\ &= \frac{27{,}321\,66\,\mathrm{d} \cdot 365{,}256\,36\,\mathrm{d}}{365{,}256\,36\,\mathrm{d} - 27{,}321\,66\,\mathrm{d}} \\ &\approx 29{,}5306\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

Rund 29,53 Tage. Diese Zahl muss ein Mondphasenwerk mit seinen Zähnezahlen nachbilden (Kapitel 4).

11.2 Kalender

Das Kalenderjahr hat ganze Tage, das tropische Jahr nicht. Schalttage gleichen den Unterschied aus. Wie gut eine Schaltregel ist, zeigt die mittlere Länge ihres Kalenderjahrs.

Schaltjahrregel

Kalender	Schaltjahr (366 Tage, mit 29. Februar)	mittlere Jahreslänge
julianisch	jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist	$365{,}25\,\mathrm{d}$
gregorianisch (seit 1582)	durch 4 teilbar; volle Jahrhunderte nur, wenn sie durch 400 teilbar sind	$365{,}2425\,\mathrm{d}$

Nach der gregorianischen Regel waren 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre, 2000 war eines, 2100 ist wieder keines.

Mittlere Länge des Kalenderjahrs

(11.4) GESELLE

$$T_{\mathrm{K}} = 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot n_{\mathrm{S}}}{n_{\mathrm{Z}}}$$

Jedes Schaltjahr bringt einen Tag mehr. Verteilt auf den ganzen Zyklus ergibt das die mittlere Jahreslänge.

T_{K}	mittlere Länge des Kalenderjahrs	d
n_{S}	Zahl der Schaltjahre im Zyklus	1
n_{Z}	Zahl der Jahre im Zyklus	1

BEISPIEL Der gregorianische Kalender hat in 400 Jahren 97 Schaltjahre. Wie lang ist sein Jahr im Mittel?

Gegeben: $n_{\mathrm{S}} = 97$; $n_{\mathrm{Z}} = 400$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{K}} &= 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot n_{\mathrm{S}}}{n_{\mathrm{Z}}} \\ &= 365\,\mathrm{d} + \frac{1\,\mathrm{d} \cdot 97}{400} \\ &= 365{,}2425\,\mathrm{d} \end{aligned}$$

365,2425 Tage. Die julianische Regel mit einem Schaltjahr in vier Jahren ergibt 365,25 Tage.

Jahre bis zu einem Tag Abweichung

(11.5) MEISTER

$$n_{\mathrm{F}} = \frac{1\,\mathrm{d}}{T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{J}}}$$

n_{F}	Zahl der Jahre, bis der Kalender einen Tag vom Sonnenjahr abweicht	1
T_{K}	mittlere Länge des Kalenderjahrs	d
T_{J}	tropisches Jahr	d

Ist das Kalenderjahr länger als das tropische Jahr, bleibt der Kalender hinter den Jahreszeiten zurück: Der Frühlingsanfang fällt auf ein immer früheres Datum.

Gilt: heutige Länge des tropischen Jahrs; sie ändert sich in Jahrtausenden um einige Sekunden.

BEISPIEL Nach wie vielen Jahren weicht der julianische Kalender um einen Tag vom Lauf der Jahreszeiten ab?

Gegeben: $T_{\mathrm{K}} = 365{,}25\,\mathrm{d}$; $T_{\mathrm{J}} = 365{,}242\,19\,\mathrm{d}$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{F}} &= \frac{1\,\mathrm{d}}{T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{J}}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{d}}{365{,}25\,\mathrm{d} - 365{,}242\,19\,\mathrm{d}} \\ &\approx 128 \end{aligned}$$

Nach 128 Jahren. Seit dem Konzil von Nicäa im Jahr 325 hatten sich bis 1582 zehn Tage angesammelt, die bei der Kalenderreform gestrichen wurden. Der gregorianische Kalender mit 365,2425 Tagen braucht für einen Tag rund 3200 Jahre.



Abb. 11.2 Vierjahreszyklus des ewigen Kalenders: $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ Tage

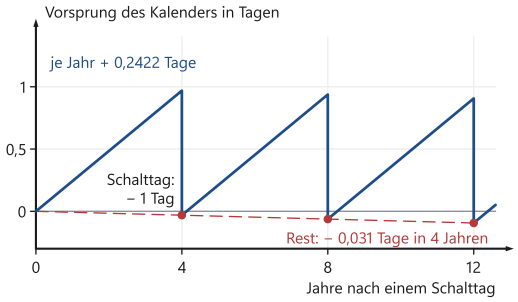


Abb. 11.3 Das Kalenderjahr ist ohne Schalttag 0,2422 Tage zu kurz; der Schalttag nimmt alle vier Jahre einen ganzen Tag zurück

Tage im Schaltzyklus

(11.6) GESELLE

$$N_\mathrm{d} = 365 \cdot n_\mathrm{Z} + n_\mathrm{S}$$

Der ewige Kalender kennt die Monatslängen und das Schaltjahr. Sein Programmrad läuft in vier Jahren einmal um.

N_d	Zahl der Tage im Zyklus	1
n_Z	Zahl der Jahre im Zyklus	1
n_S	Zahl der Schaltjahre im Zyklus	1

Aber Vorsicht: Ein ewiger Kalender mit Vierjahreszyklus kennt die Jahrhundertregel nicht. Er zeigt im Jahr 2100 einen 29. Februar und muss am 1. März 2100 um einen Tag vorgestellt werden, ebenso 2200 und 2300. Erst ein säkularer Kalender bildet den Zyklus von 400 Jahren nach.

BEISPIEL Ein ewiger Kalender bildet vier Jahre mit einem Schaltjahr nach. Wie viele Tage hat dieser Zyklus?

Gegeben: $n_\mathrm{Z} = 4$; $n_\mathrm{S} = 1$

$$\begin{aligned} N_\mathrm{d} &= 365 \cdot n_\mathrm{Z} + n_\mathrm{S} \\ &= 365 \cdot 4 + 1 \\ &= 1461 \end{aligned}$$

1461 Tage oder 48 Monate; so lange braucht das Schaltjahrrad für eine Umdrehung. Der gregorianische Zyklus von 400 Jahren hat 146 097 Tage. Das sind genau 20 871 Wochen, deshalb wiederholen sich nach 400 Jahren auch die Wochentage.

Merksatz: 365 Tage sind 52 Wochen und ein Tag. Ein Datum rückt deshalb jedes Jahr um einen Wochentag weiter, über einen Schalttag hinweg um zwei.

11.3 Zeitgleichung

Die wahre Sonne läuft übers Jahr ungleichmäßig: Die Erdbahn ist eine Ellipse, und die Erdachse steht schräg zur Bahn. Eine Sonnenuhr zeigt deshalb bis zu gut einer Viertelstunde anders als eine gleichmäßig gehende Uhr. Diesen Unterschied nennt man Zeitgleichung.

Zeitgleichung

(11.7) MEISTER

$$E = t_\mathrm{W} - t_\mathrm{M}$$

UMGESTELLT $t_\mathrm{M} = t_\mathrm{W} - E$

Die Zeitgleichung ist die wahre Sonnenzeit minus die mittlere Sonnenzeit. Sie hängt nur vom Datum ab, nicht vom Ort.

E	Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor)	min
t_W	wahre Ortszeit (Anzeige der Sonnenuhr)	min
t_M	mittlere Ortszeit	min

Aber Vorsicht: Ältere Tafeln und manche Uhren mit Äquationsanzeige rechnen mit umgekehrtem Vorzeichen (mittlere minus wahre Zeit). Vor dem Einstellen prüfen, welche Richtung gemeint ist.

BEISPIEL Am 11. Februar beträgt die Zeitgleichung −14,2 min. Eine Sonnenuhr zeigt 12:00 Uhr, das sind 720 min nach Mitternacht. Wie spät ist es nach mittlerer Ortszeit?

Gegeben: $t_\mathrm{W} = 720\,\mathrm{min}$; $E = -14{,}2\,\mathrm{min}$

$$\begin{aligned} t_\mathrm{M} &= t_\mathrm{W} - E \\ &= 720\,\mathrm{min} - (-14{,}2\,\mathrm{min}) \\ &= 734{,}2\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

734,2 min nach Mitternacht: Es ist 12:14 Uhr mittlerer Ortszeit. Die Sonnenuhr geht gut 14 min nach.

Jahreswinkel für die Zeitgleichung

(11.8) VERTIEFUNG

$$B = \frac{360° \cdot (N - 81)}{364}$$

Der Jahreswinkel teilt das Jahr in 360° und beginnt am 22. März, dem 81. Tag. Er ist nur eine Hilfsgröße für die Näherungsformel.

B	Jahreswinkel (Hilfsgröße; 0° am 22. März)	°
N	Tagesnummer im Jahr (1. Januar = 1)	1

BEISPIEL Der 3. November ist in einem Gemeinjahr der 307. Tag. Wie groß ist der Jahreswinkel?

Gegeben: $N = 307$

$$\begin{aligned} B &= \frac{360° \cdot (N - 81)}{364} \\ &= \frac{360° \cdot (307 - 81)}{364} \\ &\approx 223{,}5° \end{aligned}$$

Rund 223,5°. Mit diesem Winkel rechnet die folgende Formel.

Zeitgleichung aus dem Datum

(11.9) NÄHERUNG VERTIEFUNG

$$E \approx 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot B) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos B - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin B$$

Die Formel bildet die beiden Ursachen nach: Das Glied mit $2B$ kommt von der schrägen Erdachse und hat zwei Wellen im Jahr, die Glieder mit B kommen von der Ellipsenbahn und haben eine Welle im Jahr.

Gilt: Näherung, auf rund eine Minute genau (größte Abweichung je nach Jahr bis etwa 1,4 min, Anfang Dezember). Für Sonnenuhren und zum Prüfen einer Äquationsanzeige reicht das; genaue Tageswerte stehen in astronomischen Jahrbüchern.

E	Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor)	min
B	Jahreswinkel (Hilfsgröße; 0° am 22. März)	°

Hinweis: Für den 11. Februar (Tag 42, $B = -38{,}6°$) liefert die Näherung −14,6 min, die Tabelle der Eckwerte −14,2 min. Solche Unterschiede von einigen Zehnteln Minuten liegen in der Genauigkeit der Näherung; zum Einstellen gelten die Tabellenwerte.

BEISPIEL Wie groß ist die Zeitgleichung am 3. November mit dem Jahreswinkel 223,5° aus dem Beispiel davor?

Gegeben: $B = 223{,}5°$

$$\begin{aligned} E &\approx 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot B) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos B - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin B \\ &= 9{,}87\,\text{min} \cdot \sin(2 \cdot 223{,}5°) - 7{,}53\,\text{min} \cdot \cos(223{,}5°) - 1{,}5\,\text{min} \cdot \sin(223{,}5°) \\ &\approx 16{,}4\,\text{min} \end{aligned}$$

Rund +16,4 min: Anfang November geht die Sonnenuhr am weitesten vor.

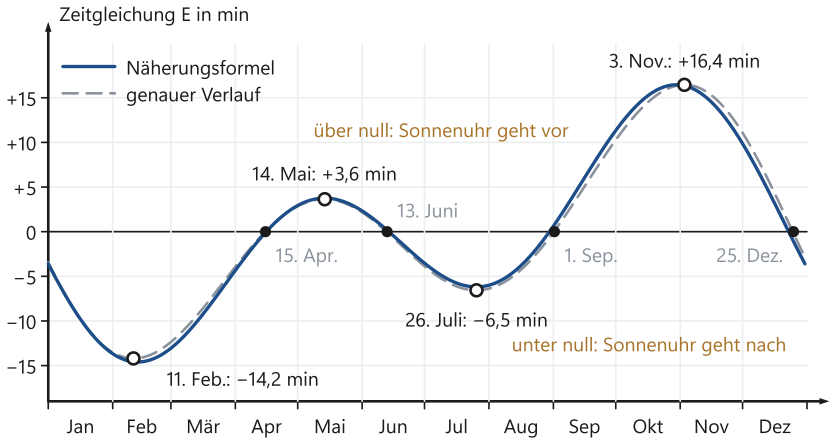


Abb. 11.4 Zeitgleichung im Lauf des Jahres: Näherungsformel und genauer Verlauf

Eckwerte der Zeitgleichung (gerundet, für die heutige Zeit)

Datum	E	Sonnenuhr gegenüber mittlerer Ortszeit
11. Februar	−14,2 min	geht am weitesten nach
15. April	0	stimmt
14. Mai	+3,6 min	geht vor (kleiner Höchstwert)
13. Juni	0	stimmt
26. Juli	−6,5 min	geht nach (kleiner Tiefstwert)
1. September	0	stimmt
3. November	+16,4 min	geht am weitesten vor
25. Dezember	0	stimmt

Je nach Stellung im Schaltzyklus verschieben sich die Tage um bis zu einen Tag.

11.4 Ortszeit und Zonenzeit

Die mittlere Ortszeit hängt vom Längengrad ab: Die Sonne wandert in einer Stunde über 15 Längengrade, für ein Grad braucht sie 4 min. Damit nicht jeder Ort seine eigene Zeit hat, gilt in einer Zeitzone überall die Ortszeit des Zonenmeridians. Für die mitteleuropäische Zeit (MEZ) ist das der Meridian 15° Ost.

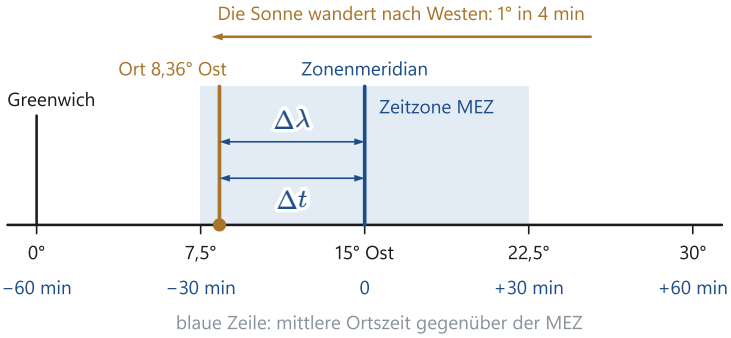


Abb. 11.5 Ortszeit und Zonenzeit: Ein Ort westlich des Zonenmeridians hat die Sonne später im Süden

Ortszeit aus dem Längengrad

(11.10) GESELLE

$$\Delta t = \frac{(\lambda - \lambda_Z) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ}$$

Östlich des Zonenmeridians ist die Ortszeit der Zonenzeit voraus, westlich davon liegt sie zurück.

Gilt: Längen östlich von Greenwich positiv, westlich negativ.

Δt	Ortszeitunterschied (mittlere Ortszeit minus Zonenzeit; + heißt: Ortszeit ist voraus)	min
λ	geographische Länge des Orts (östliche Länge positiv)	$^\circ$
λ_Z	geographische Länge des Zonenmeridians (MEZ: 15° Ost)	$^\circ$

BEISPIEL Eine Werkstatt liegt auf 8,36° östlicher Länge. Wie weit weicht ihre mittlere Ortszeit von der MEZ ab?

Gegeben: $\lambda = 8{,}36^\circ$; $\lambda_Z = 15^\circ$

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{(\lambda - \lambda_Z) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ} \\ &= \frac{(8{,}36^\circ - 15^\circ) \cdot 4\,\text{min}}{1^\circ} \\ &\approx -26{,}6\,\text{min}\end{aligned}$$

Die mittlere Ortszeit liegt 26,6 min hinter der MEZ zurück. Die mittlere Sonne steht hier erst um 12:26:34 Uhr MEZ im Süden.

Zonenzeit aus der Sonnenuhr

(11.11) MEISTER

$$t_Z = t_W - E - \Delta t$$

Zwei Korrekturen führen von der Sonnenuhr zur Armbanduhr: die Zeitgleichung für das Datum und der Ortszeitunterschied für den Längengrad.

Gilt: Sonnenuhr, die wahre Ortszeit zeigt. Manche Sonnenuhren sind schon für den Längengrad des Standorts gezeichnet; dann entfällt Δt.

t_Z	Zonenzeit (MEZ)	min
t_W	wahre Ortszeit (Anzeige der Sonnenuhr)	min
E	Zeitgleichung (+ heißt: Sonnenuhr geht vor)	min
Δt	Ortszeitunterschied (mittlere Ortszeit minus Zonenzeit; + heißt: Ortszeit ist voraus)	min

BEISPIEL Am 3. November zeigt die Sonnenuhr an der Werkstatt aus dem Beispiel davor 12:00 Uhr, also 720 min. Die Zeitgleichung beträgt +16,4 min. Wie spät ist es nach MEZ?

Gegeben: $t_W = 720\,\text{min}$; $E = 16{,}4\,\text{min}$; $\Delta t = -26{,}6\,\text{min}$

$$\begin{aligned}t_Z &= t_W - E - \Delta t \\ &= 720\,\text{min} - 16{,}4\,\text{min} - (-26{,}6\,\text{min}) \\ &= 730{,}2\,\text{min}\end{aligned}$$

730,2 min nach Mitternacht, also 12:10 Uhr MEZ. Während der Sommerzeit kommt eine Stunde dazu.

11.5 Mondphase

Die Mondphase wiederholt sich im Mittel alle 29,530 59 Tage. Das Mondalter zählt die Tage seit dem letzten Neumond; nach ihm wird eine Mondphasenanzeige gestellt. Wie man die 29,53 Tage mit Zähnezahlen annähert und wie groß der Fehler der Anzeige wird, steht in Kapitel 4.

Mondalter aus dem Datum

(11.12) MEISTER

$$a = t - k \cdot T_{\text{syn}}$$

Vom Abstand zu einem bekannten Neumond werden alle vollen Mondumläufe abgezogen. Was übrig bleibt, ist das Mondalter.

Gilt: mittlerer Mondumlauf; die wahre Phase kann davon um bis zu etwa einen Tag abweichen. Zum Stellen einer Mondphasenanzeige reicht das.

a	Mondalter (Tage seit dem letzten Neumond)	d
t	Zeit (seit einem bekannten Neumond)	d
k	Anzahl (der seither vollendeten Mondumläufe; die größte ganze Zahl, bei der a nicht negativ wird)	1
T_{syn}	synodischer Monat (Neumond bis Neumond)	d

BEISPIEL Am 12. August 2026 war Neumond. Wie alt ist der Mond am 24. Dezember 2026, also 134 Tage später? In 134 Tagen sind 4 Umläufe vollendet.

Gegeben: $t = 134\,\text{d}$; $k = 4$; $T_{\text{syn}} = 29{,}530\,59\,\text{d}$

$$\begin{aligned} a &= t - k \cdot T_{\text{syn}} \\ &= 134\,\text{d} - 4 \cdot 29{,}530\,59\,\text{d} \\ &\approx 15{,}9\,\text{d} \end{aligned}$$

Das Mondalter beträgt rund 15,9 Tage. Vollmond ist bei 14,8 Tagen, der Mond ist also gerade voll gewesen.

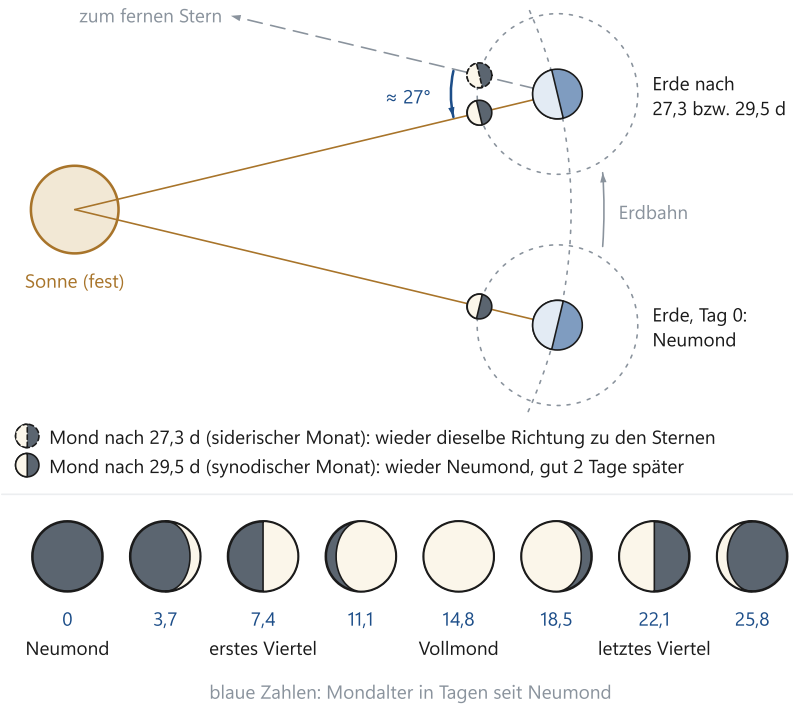


Abb. 11.6 Oben: Sonne fest, Erde auf ihrer Bahn, Mond um die Erde. Nach einem siderischen Monat (27,3 d) steht der Mond wieder in derselben Richtung zu den Sternen, bis zum Neumond braucht er gut zwei Tage länger (synodischer Monat, 29,5 d; Größen nicht maßstäblich). Unten: Mondphasen, von der Nordhalbkugel gesehen, mit dem mittleren Mondalter

11.6 Skalen am Chronographen

Viele Chronographen tragen auf Lünette oder Zifferblatt eine Skala, die aus der gestoppten Zeit sofort eine andere Größe macht. Hinter jeder Skala steht eine einfache Formel. Mit ihr lässt sich eine Skala prüfen oder für ein neues Zifferblatt berechnen.

Geschwindigkeit aus Messstrecke und Stoppzeit

(11.13) GESELLE

$$v = \frac{s}{t}$$

v	Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
s	Weg (Messstrecke)	km
t	Zeit (gestoppt)	s

Der Chronograph wird am Anfang einer bekannten Strecke gestartet und am Ende gestoppt.

Gilt: gleichbleibende Geschwindigkeit auf der Messstrecke.

BEISPIEL Ein Zug braucht für die Strecke zwischen zwei Kilometertafeln 45 s. Wie schnell fährt er?

Gegeben: $s = 1\,\mathrm{km}; \quad t = 45\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{1\,\mathrm{km}}{45\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{km}}{45\,\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\ &= 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Der Zug fährt 80 km in der Stunde.

Tachymeterskala

(11.14) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$v = \frac{3600}{t}$$

v	Geschwindigkeit (Skalenwert in km je Stunde)	$\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
t	Zeit (gestoppt, in s)	s

Die Tachymeterskala ist die Formel davor für eine Messstrecke von 1 km: Beim Stopp nach t Sekunden steht der Zeiger auf der Geschwindigkeit. Genauso zählt die Skala Stück je Stunde, wenn man die Zeit für ein Stück stoppt.

Gilt: Zahlenwerte: t in s; Messstrecke 1 km (oder 1 Meile, dann Meilen je Stunde). Die Skala reicht nur bis 60 s. Bei langsameren Vorgängen die halbe Strecke stoppen und den Skalenwert halbieren.

BEISPIEL Welche Zahl steht auf einer Tachymeterskala bei 24 s?

Gegeben: $t = 24\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} v &= \frac{3600}{t} \\ &= \frac{3600}{24} \\ &= 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Bei 24 s steht die 150.

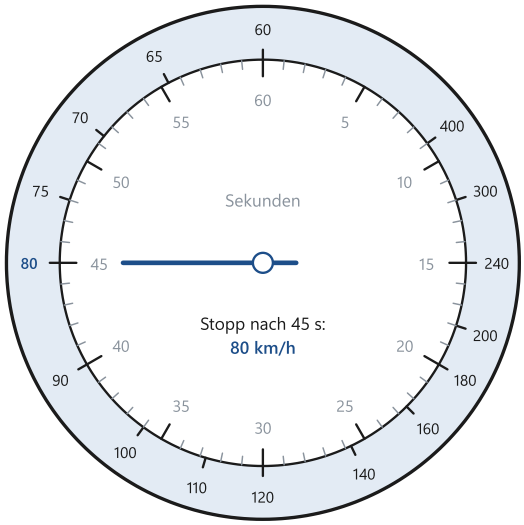


Abb. 11.7 Tachymeterskala: Skalenwert gleich 3600 geteilt durch die Sekunden

Telemeter: Entfernung aus der Laufzeit des Schalls

(11.15) GESELLE

$$s = c \cdot t$$

Den Blitz sieht man praktisch sofort, der Donner braucht für jeden Kilometer knapp 3 s. Die Telemeterskala zeigt zur gestoppten Laufzeit die Entfernung in Kilometern.

Gilt: Schallgeschwindigkeit in Luft bei 20 °C: $343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; die Laufzeit des Lichts ist vernachlässigt.

s	Weg (Entfernung)	m
c	Schallgeschwindigkeit (in Luft)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
t	Zeit (gestoppt, zwischen Lichtsignal und Schall)	s

BEISPIEL Zwischen Blitz und Donner werden 6 s gestoppt. Wie weit ist das Gewitter entfernt?

Gegeben: $c = 343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $\quad t = 6\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} s &= c \cdot t \\ &= 343\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\,\mathrm{s} \\ &\approx 2{,}06\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Das Gewitter ist rund 2 km entfernt.

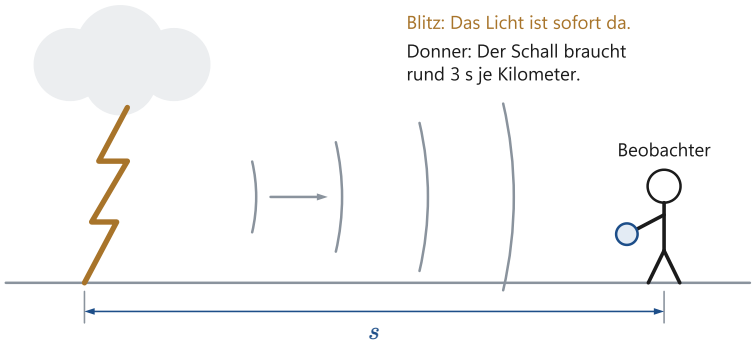


Abb. 11.8 Telemeter: Aus der Zeit zwischen Blitz und Donner folgt die Entfernung s

Schallgeschwindigkeit und Temperatur

(11.16) ZAHLENWERTGLEICHUNG VERTIEFUNG

$$c \approx 331{,}3 + 0{,}606 \cdot \vartheta$$

Der Schall läuft in warmer Luft schneller. Telemeterskalen sind für eine feste Temperatur gerechnet, meist für 20 °C.

Gilt: Zahlenwerte: ϑ in °C, c in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; trockene Luft, etwa −20 °C bis 40 °C.

c	Schallgeschwindigkeit (in Luft, Zahlenwert in m je Sekunde)	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
ϑ	Temperatur (der Luft, in °C)	$^\circ\mathrm{C}$

BEISPIEL Wie schnell ist der Schall an einem Wintertag mit −10 °C?

Gegeben: $\vartheta = -10^\circ\mathrm{C}$

$$\begin{aligned} c &\approx 331{,}3 + 0{,}606 \cdot \vartheta \\ &= 331{,}3 + 0{,}606 \cdot (-10) \\ &\approx 325{,}2\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Rund $325\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das sind 5 % weniger als bei 20 °C. Eine Telemeterskala zeigt dann 5 % zu viel.

Pulsometer

(11.17) GESELLE

$$f_\mathrm{P} = \frac{N_\mathrm{P}}{t}$$

Chronograph starten, die auf der Skala angegebene Zahl von Pulsschlägen zählen, stoppen: Der Zeiger steht auf den Schlägen je Minute. Die Asthmometerskala zählt auf dieselbe Weise Atemzüge.

f_P	Pulsfrequenz	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
N_P	Zahl der gezählten Pulsschläge (Eichung der Skala, meist 15 oder 30)	1
t	Zeit (gestoppt)	s

BEISPIEL Eine Pulsometerskala ist auf 30 Pulsschläge geeicht. Für 30 Schläge werden 20 s gestoppt. Welche Zahl steht dort auf der Skala?

Gegeben: $N_\mathrm{P} = 30; \quad t = 20\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} f_\mathrm{P} &= \frac{N_\mathrm{P}}{t} \\ &= \frac{30}{20\,\mathrm{s}} \\ &= 1{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} \\ &= 90\ \tfrac{1}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Der Zeiger steht auf 90 Schlägen je Minute.

Dezimalminuten

(11.18) ZAHLENWERTGLEICHUNG GESELLE

$$t_{\text{dez}} = \frac{t}{60}$$

t_{dez}	Zeit in Minuten als Dezimalzahl	min
t	Zeit (gestoppt, in s)	s

Für Zeitaufnahmen teilt die Dezimalskala die Minute in 100 Teile. Eine Hundertstelminute dauert 0,6 s. Mit Dezimalminuten lassen sich Zeiten ohne Umrechnen addieren und mit Stückzahlen malnehmen.

Gilt: Zahlenwerte: t in s, Ergebnis in min.

BEISPIEL Ein Arbeitsgang dauert 39 s. Was zeigt die Dezimalskala?

Gegeben: $t = 39\,\text{s}$

$$\begin{aligned} t_{\text{dez}} &= \frac{t}{60} \\ &= \frac{39}{60} \\ &= 0{,}65\,\text{min} \end{aligned}$$

0,65 min, also 65 Hundertstelminuten.

Merksatz: Drei Sekunden zwischen Blitz und Donner sind rund ein Kilometer.

12 Qualität und Statistik

Ein einzelner Messwert sagt wenig. Erst eine Messreihe zeigt, wo ein Gang, ein Maß oder ein Prozess im Mittel liegt und wie stark er streut. Mit Mittelwert und Standardabweichung lässt sich beurteilen, ob eine Fertigung ihre Toleranz sicher hält und welche Fehler zuerst abgestellt werden müssen.

Das Kapitel richtet sich vor allem an die Meisterprüfung und an die Serienfertigung. Hier ist s die Standardabweichung, nicht die Klingenstärke; B, A und E sind in der Fehleranalyse Bewertungszahlen.

12.1 Messreihen

Aus einer Messreihe ziehen wir zwei Aussagen: die Lage (Mittelwert) und die Streuung (Spannweite, Standardabweichung). Als Beispiel dient in diesem Abschnitt eine Reihe von zehn Gangwerten in $\frac{\text{s}}{\text{d}}$: +4, +6, +3, +7, +5, +2, +6, +5, +8, +4.

Arithmetischer Mittelwert

(12.1) GESELLE

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Alle Messwerte werden addiert und durch ihre Anzahl geteilt. Der Mittelwert hat dieselbe Einheit wie die Messwerte. Als Grundwerkzeug steht die Formel auch in Abschnitt 1.5.

$\bar{x}$	Mittelwert (arithmetisch)	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
$\sum x_i$	Summe aller Messwerte (mit Vorzeichen)	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
n	Anzahl (der Messwerte)	1

BEISPIEL Die zehn Gangwerte der Messreihe ergeben zusammen 50 $\frac{\text{s}}{\text{d}}$. Wie groß ist der mittlere Gang?

Gegeben: $\sum x_i = 50\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$; $\quad n = 10$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} \\ &= \frac{50\ \frac{\text{s}}{\text{d}}}{10} \\ &= 5{,}0\ \frac{\text{s}}{\text{d}}\end{aligned}$$

Im Mittel geht die Uhr 5 s am Tag vor.

Spannweite

(12.2) GESELLE

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Die Spannweite ist das schnellste Maß für die Streuung. Sie hängt aber nur von den beiden äußersten Werten ab; ein einziger Ausreißer verfälscht sie.

R	Spannweite	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
$x_{\max}$	größter Messwert	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$
$x_{\min}$	kleinster Messwert	$\frac{\text{s}}{\text{d}}$

BEISPIEL Der größte Gangwert der Messreihe ist +8 $\frac{\text{s}}{\text{d}}$, der kleinste +2 $\frac{\text{s}}{\text{d}}$.

Gegeben: $x_{\max} = 8\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$; $\quad x_{\min} = 2\ \frac{\text{s}}{\text{d}}$

$$\begin{aligned}R &= x_{\max} - x_{\min} \\ &= 8\ \frac{\text{s}}{\text{d}} - 2\ \frac{\text{s}}{\text{d}} \\ &= 6\ \frac{\text{s}}{\text{d}}\end{aligned}$$

Die Gangwerte liegen in einem Band von 6 s am Tag.

Standardabweichung der Stichprobe

(12.3) MEISTER

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

s	Standardabweichung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
$\sum (x_i - \bar{x})^2$	Summe der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert	$\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{d}^2}$
n	Anzahl (der Messwerte)	1

Die Standardabweichung ist die mittlere Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert, quadratisch gemittelt. Geteilt wird durch $n - 1$, weil der Mittelwert aus derselben Stichprobe stammt.

Gilt: Stichprobe aus einer größeren Menge; für eine brauchbare Aussage mindestens etwa 10 Werte, besser 30 und mehr.

Gut zu wissen: Taschenrechner zeigen diese Größe als s oder σ_{n-1}. Die Taste σ_n teilt durch n und gilt nur, wenn alle Teile gemessen wurden.

BEISPIEL Die Abweichungen der zehn Gangwerte vom Mittelwert 5 sind −1, +1, −2, +2, 0, −3, +1, 0, +3, −1. Ihre Quadrate 1, 1, 4, 4, 0, 9, 1, 0, 9, 1 ergeben zusammen 30.

Gegeben: $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 30\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{d}^2}$; $n = 10$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{30\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{d}^2}}{10 - 1}}$$

$$\approx 1{,}83\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Die Gangwerte streuen mit einer Standardabweichung von rund 1,8 s am Tag um den Mittelwert.

Standardabweichung des Mittelwerts

(12.4) VERTIEFUNG

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$s_{\bar{x}}$	Standardabweichung des Mittelwerts	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
s	Standardabweichung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$
n	Anzahl (der Messwerte)	1

Der Mittelwert einer Messreihe streut weniger als der einzelne Messwert. Viermal so viele Messungen halbieren seine Unsicherheit.

Gilt: voneinander unabhängige Messwerte.

BEISPIEL Wie sicher ist der Mittelwert der zehn Gangwerte, wenn die Einzelwerte mit 1,83 $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$ streuen?

Gegeben: $s = 1{,}83\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$; $n = 10$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1{,}83\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}{\sqrt{10}}$$

$$\approx 0{,}58\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$$

Der Mittelwert ist auf rund 0,6 s am Tag sicher. Mit 40 Messungen wären es 0,3 s am Tag.

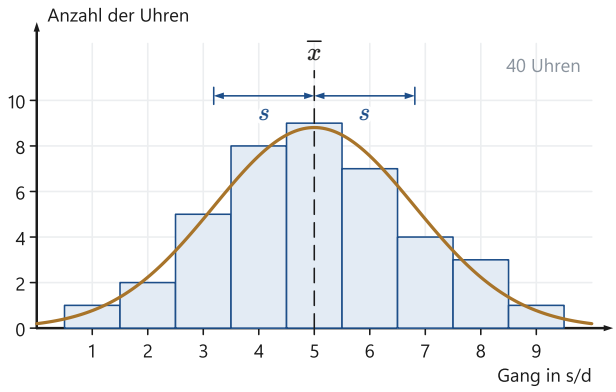


Abb. 12.1 Histogramm einer Gangmessreihe von 40 Uhren mit Glockenkurve: $\bar{x} = 5{,}0\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$, $s = 1{,}8\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$

Viele Messgrößen streuen nach der Normalverteilung, der Glockenkurve: Werte nahe am Mittelwert sind häufig, weit entfernte selten. Dann sagt die Standardabweichung, welcher Anteil der Werte in welchem Bereich liegt.

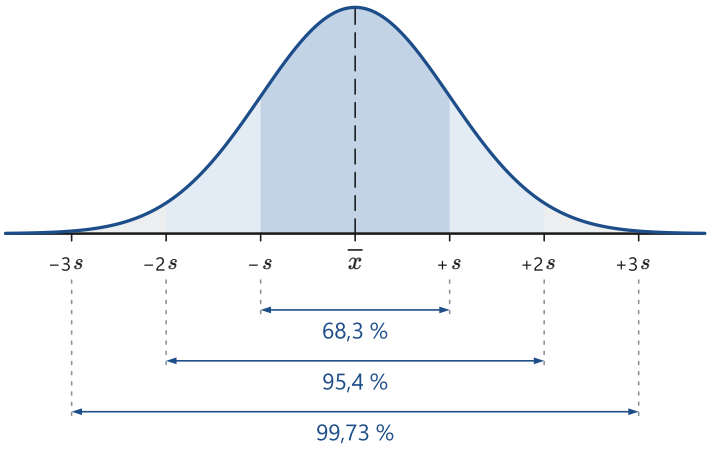


Abb. 12.2 Normalverteilung: Anteil der Werte innerhalb von einer, zwei und drei Standardabweichungen um den Mittelwert

Normalverteilung: Anteil der Werte um den Mittelwert

Bereich	innerhalb	außerhalb
$\bar{x} \pm 1\,s$	68,3 %	31,7 %
$\bar{x} \pm 2\,s$	95,4 %	4,6 %
$\bar{x} \pm 3\,s$	99,73 %	0,27 %
$\bar{x} \pm 4\,s$	99,994 %	63 ppm

Gilt für normalverteilte Werte. 1 ppm ist ein Teil je Million.

Merksatz: Zwei Drittel aller Werte liegen innerhalb einer Standardabweichung um den Mittelwert, fast alle innerhalb von drei.

12.2 Fähigkeit von Maschine und Prozess

Die Fähigkeit vergleicht die Toleranz mit der Streuung: Passt die Glockenkurve sicher zwischen den unteren und den oberen Grenzwert? Für die Maschinenfähigkeit (C_m, C_mk) misst man eine kurze Serie unter gleichen Bedingungen, meist 50 Teile in Folge. Für die Prozessfähigkeit (C_p, C_pk) misst man Stichproben über längere Zeit. Die Formeln sind dieselben.

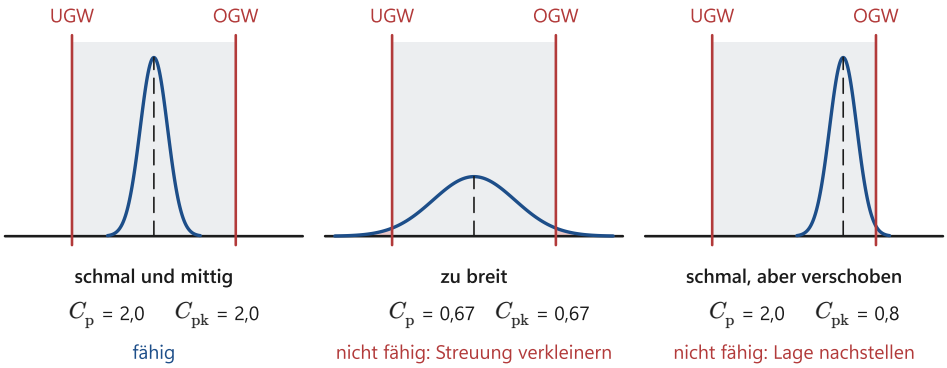


Abb. 12.3 Toleranzfeld und Verteilung: Fähig ist ein Prozess nur, wenn er schmal genug streut und mittig liegt

Fähigkeit aus Toleranz und Streuung

(12.5) MEISTER

$$C_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{OGW} - \mathrm{UGW}}{6 \cdot s}$$

C_p sagt, wie oft die Streubreite von sechs Standardabweichungen in die Toleranz passt. Wo der Mittelwert liegt, spielt dabei keine Rolle.

Gilt: normalverteilte Messwerte, stabiler Prozess.

C_p	Prozessfähigkeit (Maschine: C_m)	1
OGW	oberer Grenzwert	µm
UGW	unterer Grenzwert	µm
s	Standardabweichung	µm

BEISPIEL Ein Zapfen soll 0,100 mm ± 0,004 mm messen, die Grenzwerte sind also 96 µm und 104 µm. Eine Messreihe ergibt die Standardabweichung 0,8 µm.

Gegeben: $\mathrm{OGW} = 104\,\mu\mathrm{m}$; $\mathrm{UGW} = 96\,\mu\mathrm{m}$; $s = 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} C_\mathrm{p} &= \frac{\mathrm{OGW} - \mathrm{UGW}}{6 \cdot s} \\ &= \frac{104\,\mu\mathrm{m} - 96\,\mu\mathrm{m}}{6 \cdot 0{,}8\,\mu\mathrm{m}} \\ &\approx 1{,}67 \end{aligned}$$

Die Toleranz ist 1,67-mal so breit wie die Streubreite: Die Streuung ist klein genug.

Kritische Fähigkeit zur oberen Grenze

(12.6) MEISTER

$$C_\mathrm{po} = \frac{\mathrm{OGW} - \bar{x}}{3 \cdot s}$$

Die kritische Fähigkeit C_pk berücksichtigt auch die Lage. Sie ist der kleinere der beiden Werte C_po und C_pu: der Abstand des Mittelwerts zur näheren Grenze, gemessen in drei Standardabweichungen.

Gilt: wie davor. Für die Maschine heißt der kleinere Wert C_mk.

C_po	Fähigkeit zur oberen Grenze	1
OGW	oberer Grenzwert	µm
$\bar{x}$	Mittelwert (arithmetisch)	µm
s	Standardabweichung	µm

BEISPIEL Die Zapfen aus dem Beispiel davor messen im Mittel 101 µm.

Gegeben: $\mathrm{OGW} = 104\,\mu\mathrm{m}$; $\bar{x} = 101\,\mu\mathrm{m}$; $s = 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} C_\mathrm{po} &= \frac{\mathrm{OGW} - \bar{x}}{3 \cdot s} \\ &= \frac{104\,\mu\mathrm{m} - 101\,\mu\mathrm{m}}{3 \cdot 0{,}8\,\mu\mathrm{m}} \\ &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Zur oberen Grenze bleibt nur das 1,25-Fache der halben Streubreite.

Kritische Fähigkeit zur unteren Grenze

(12.7) MEISTER

$$C_{\mathrm{pu}} = \frac{\bar{x} - \mathrm{UGW}}{3 \cdot s}$$

Liegt der Mittelwert genau in der Mitte der Toleranz, sind beide Werte gleich und so groß wie C_{p}.

C_{pu}	Fähigkeit zur unteren Grenze	1
$\bar{x}$	Mittelwert (arithmetisch)	µm
UGW	unterer Grenzwert	µm
s	Standardabweichung	µm

BEISPIEL Dieselben Zapfen, jetzt zur unteren Grenze gerechnet.

Gegeben: $\bar{x} = 101\,\mu\mathrm{m}$; $\mathrm{UGW} = 96\,\mu\mathrm{m}$; $s = 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$

$$C_{\mathrm{pu}} = \frac{\bar{x} - \mathrm{UGW}}{3 \cdot s} = \frac{101\,\mu\mathrm{m} - 96\,\mu\mathrm{m}}{3 \cdot 0{,}8\,\mu\mathrm{m}} \approx 2{,}08$$

Der kleinere Wert gilt: $C_{\mathrm{pk}} = 1{,}25$. Die Streuung wäre klein genug ($C_{\mathrm{p}} = 1{,}67$), aber der Prozess liegt 1 µm zu hoch und erfüllt die Forderung 1,33 nicht. Wird die Maschine um 1 µm nachgestellt, ist $C_{\mathrm{pk}} = C_{\mathrm{p}} = 1{,}67$.

Fähigkeitskennwerte: übliche Forderungen (Richtwerte)

C_{pk}	Abstand zur näheren Grenze	Fehleranteil	Bewertung
1,00	$3\,s$	0,27 %	bedingt fähig; reicht meist nicht aus
1,33	$4\,s$	63 ppm	fähig; übliche Mindestforderung an den Prozess
1,67	$5\,s$	0,6 ppm	übliche Mindestforderung an die Maschine (C_{mk})
2,00	$6\,s$	0,002 ppm	sehr sicher

Fehleranteil für einen mittig liegenden, normalverteilten Prozess, beide Seiten zusammen. Maßgeblich ist, was mit dem Kunden vereinbart wurde.

Merksatz: C_{p} misst die Streuung, C_{pk} Streuung und Lage. C_{pk} ist nie größer als C_{p}.

Die Regelkarte hält einen fähigen Prozess im Auge: In festen Abständen wird eine kleine Stichprobe gemessen und ihr Mittelwert eingetragen. Solange die Punkte regellos um die Mittellinie streuen und innerhalb der Eingriffsgrenzen bleiben, läuft der Prozess ungestört. Die obere und die untere Eingriffsgrenze (OEG, UEG) liegen meist drei Standardabweichungen des Mittelwerts nach Formel (12.4) über und unter der Mittellinie.

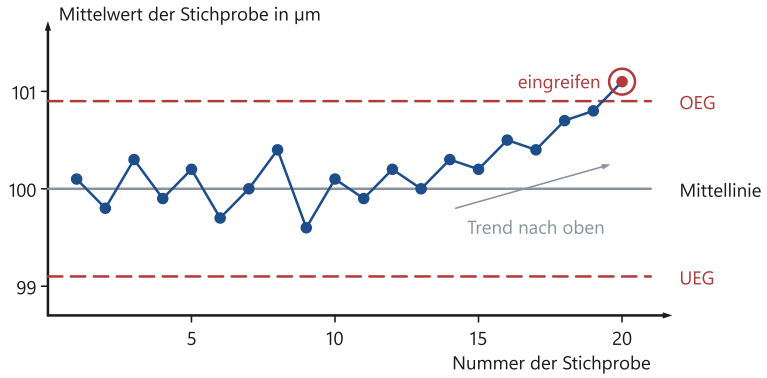


Abb. 12.4 Regelkarte (Prinzip): Mittelwerte der Stichproben mit Mittellinie und Eingriffsgrenzen; ein Trend kündigt die Störung an

12.3 Fehler und Risiko

Fehleranteile stehen in Prozent oder, wenn sie klein sind, in ppm: Teile je Million. Die Risikoprioritätszahl der FMEA (Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse) ordnet mögliche Fehler danach, welche zuerst abgestellt werden

müssen.

Fehlerquote

(12.8) GESELLE

$$q = \frac{n_\mathrm{F}}{n}$$

Zählt man nur die unbrauchbaren Teile, heißt der Anteil Ausschussquote. Zählt man die Teile, die nachgearbeitet werden müssen, heißt er Nacharbeitsquote.

q	Fehlerquote (Anteil der fehlerhaften Teile)	ppm
n_F	Anzahl der fehlerhaften Teile	1
n	Anzahl (der geprüften Teile)	1

BEISPIEL Von 1200 gelieferten Federstegen sind 3 zu kurz. Wie groß ist die Fehlerquote?

Gegeben: $n_\mathrm{F} = 3; \quad n = 1200$

$$\begin{aligned} q &= \frac{n_\mathrm{F}}{n} \\ &= \frac{3}{1200} \\ &= 0{,}0025 \\ &= 2500\,\mathrm{ppm} \end{aligned}$$

2500 ppm, das sind 0,25 %.

Erstausbeute eines Arbeitsgangs

(12.9) MEISTER

$$\mathrm{FPY} = 1 - q_\mathrm{A} - q_\mathrm{N}$$

Die Erstausbeute zählt nur Teile, die ohne Nacharbeit gut sind. Nachgearbeitete Teile sind am Ende zwar brauchbar, haben aber Zeit und Geld gekostet.

FPY	Erstausbeute (First Pass Yield: Anteil der Teile, die beim ersten Durchlauf gut sind)	$\%$
q_A	Ausschussquote	$\%$
q_N	Nacharbeitsquote	$\%$

BEISPIEL Beim Drehen von Wellen sind 1,5 % Ausschuss, weitere 2,5 % müssen nachgearbeitet werden.

Gegeben: $q_\mathrm{A} = 1{,}5\,\%; \quad q_\mathrm{N} = 2{,}5\,\%$

$$\begin{aligned} \mathrm{FPY} &= 1 - q_\mathrm{A} - q_\mathrm{N} \\ &= 1 - 1{,}5\,\% - 2{,}5\,\% \\ &= 96\,\% \end{aligned}$$

96 % der Wellen sind auf Anhieb gut.

Erstausbeute über mehrere Arbeitsgänge

(12.10) MEISTER

$$\mathrm{FPY}_{\text{ges}} = \mathrm{FPY}_1 \cdot \mathrm{FPY}_2 \cdot \mathrm{FPY}_3$$

Ein Teil ist nur dann auf Anhieb gut, wenn es jeden Arbeitsgang fehlerfrei durchläuft. Die Erstausbeuten werden deshalb malgenommen; bei mehr Arbeitsgängen kommen weitere Faktoren dazu.

Gilt: Fehler der Arbeitsgänge unabhängig voneinander.

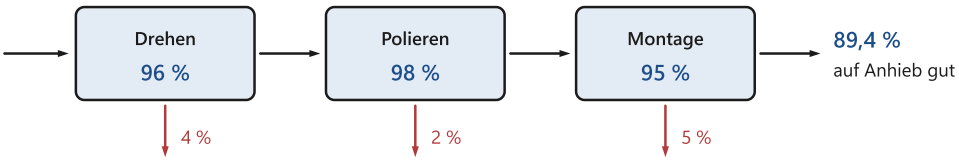
$\mathrm{FPY}_{\text{ges}}$	Erstausbeute über alle Arbeitsgänge	%
FPY_1	Erstausbeute des ersten Arbeitsgangs	%
FPY_2	Erstausbeute des zweiten Arbeitsgangs	%
FPY_3	Erstausbeute des dritten Arbeitsgangs	%

BEISPIEL Eine Welle wird gedreht (Erstausbeute 96 %), poliert (98 %) und montiert (95 %).

Gegeben: $\mathrm{FPY}_1 = 96\,\%; \quad \mathrm{FPY}_2 = 98\,\%; \quad \mathrm{FPY}_3 = 95\,\%$

$$\begin{aligned}\mathrm{FPY}_{\text{ges}} &= \mathrm{FPY}_1 \cdot \mathrm{FPY}_2 \cdot \mathrm{FPY}_3 \\ &= 96\,\% \cdot 98\,\% \cdot 95\,\% \\ &\approx 89{,}4\,\%\end{aligned}$$

Nur 89,4 % der Teile laufen ohne Fehler durch, obwohl jeder einzelne Arbeitsgang gut aussieht. Jedes zehnte Teil kostet Nacharbeit oder ist Ausschuss.



rot: Ausschuss und Nacharbeit je Arbeitsgang

Abb. 12.5 Erstausbeute über drei Arbeitsgänge: $0{,}96 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}95 = 0{,}894$

Risikoprioritätszahl (FMEA)

(12.11) MEISTER

$$\mathrm{RPZ} = B \cdot A \cdot E$$

Jeder mögliche Fehler bekommt drei Bewertungszahlen von 1 (harmlos, selten, sicher entdeckt) bis 10 (sehr schwer, sehr häufig, nicht zu entdecken). Je größer das Produkt, desto dringender die Abhilfe.

Gilt: Bewertung nach einem festen Katalog, immer im Team und immer nach denselben Maßstäben; nur dann sind die Zahlen vergleichbar.

RPZ	Risikoprioritätszahl (1 … 1000)	1
B	Bedeutung der Fehlerfolge (1 … 10)	1
A	Auftreten der Fehlerursache (1 … 10)	1
E	Entdeckung vor der Auslieferung (1 … 10)	1

Aber Vorsicht: Die RPZ ist eine Rangfolge, kein Messwert. Fehler mit sehr schwerer Folge (B = 9 oder 10) werden immer behandelt, auch wenn die RPZ klein ist. Neuere FMEA-Regelwerke lesen die Dringlichkeit deshalb aus einer Tabelle ab (Aufgabenpriorität), statt die drei Zahlen malzunehmen.

BEISPIEL Möglicher Fehler: Beim Batteriewechsel wird die Bodendichtung gequetscht, später dringt Wasser ein. Bewertung: Bedeutung 8 (Werk zerstört), Auftreten 3 (selten), Entdeckung 4 (nur Sichtkontrolle).

Gegeben: $B = 8; \quad A = 3; \quad E = 4$

$$\begin{aligned}\mathrm{RPZ} &= B \cdot A \cdot E \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 96\end{aligned}$$

RPZ = 96. Wird jede Uhr nach dem Schließen auf Dichtheit geprüft, sinkt E auf 1 und die RPZ auf 24.

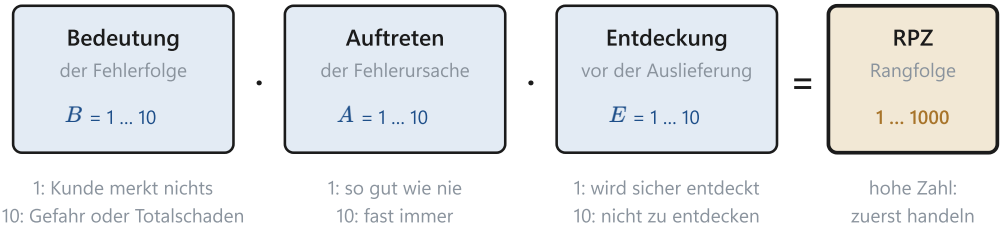


Abb. 12.6 Risikoprioritätszahl der FMEA: Drei Bewertungen von 1 bis 10 werden malgenommen

12.4 Messmittel und Messbedingungen

Ein Messwert ist nur so gut wie das Messmittel und die Bedingungen beim Messen. Zwei Fragen stehen vor jeder Messung: Ist das Messmittel fein genug für die Toleranz? Und haben Werkstück und Messmittel die Bezugstemperatur von 20 °C?

Goldene Regel der Messtechnik

(12.12) GESELLE

$$U_{\max} = \frac{\mathrm{OGW} - \mathrm{UGW}}{10}$$

$U_{\max}$	zulässige Messunsicherheit des Messmittels	µm
OGW	oberer Grenzwert	µm
UGW	unterer Grenzwert	µm

Die Messunsicherheit soll höchstens ein Zehntel der Toleranz betragen. Dann bleibt die Toleranz fast ganz für die Fertigung.

Gilt: Faustregel; bei sehr engen Toleranzen wird notfalls ein Fünftel zugelassen. Die Skalenteilung oder der Ziffernschritt muss mindestens ebenso fein sein, denn die Messunsicherheit ist meist größer als die Auflösung.

BEISPIEL Ein Zapfen soll 0,100 mm ± 0,004 mm messen, die Grenzwerte sind also 96 µm und 104 µm. Wie genau muss das Messmittel sein?

Gegeben: $\mathrm{OGW} = 104\,\mu\mathrm{m}$; $\mathrm{UGW} = 96\,\mu\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{\mathrm{OGW} - \mathrm{UGW}}{10} \\ &= \frac{104\,\mu\mathrm{m} - 96\,\mu\mathrm{m}}{10} \\ &= 0{,}8\,\mu\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Messunsicherheit darf höchstens 0,8 µm betragen. Eine Bügelmessschraube mit 0,01 mm Skalenteilung reicht dafür nicht; nötig ist ein Messmittel, das sicher auf weniger als 1 µm misst.

Temperatureinfluss beim Messen

(12.13) GESELLE

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\vartheta$$

Maße gelten bei 20 °C. Ein wärmeres Werkstück misst sich zu groß, ein kälteres zu klein. Es ist die Längenausdehnung nach Formel (2.55); die Werkstoffwerte stehen in Abschnitt 2.8.

Gilt: Werkstück gleichmäßig durchwärmt, Messmittel auf 20 °C. Haben Werkstück und Messmittel dieselbe Temperatur und denselben Ausdehnungskoeffizienten, hebt sich der Fehler auf.

Δl	Längenänderung	$\mu\mathrm{m}$
α	Längenausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{\mathrm{K}}$
l	Länge (gemessenes Maß)	mm
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung (hier: Abweichung von 20 °C)	K

BEISPIEL Eine Messingplatine mit 30 mm Durchmesser ($\alpha = 19 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$) kommt handwarm mit 30 °C unter das Messmittel, also 10 K zu warm.

Gegeben: $\alpha = 19 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$; $\quad l = 30\,\mathrm{mm}$; $\quad \Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\Delta l &= \alpha \cdot l \cdot \Delta\vartheta \\ &= 19 \cdot 10^{-6}\,\tfrac{1}{\mathrm{K}} \cdot 30\,\mathrm{mm} \cdot 10\,\mathrm{K} \\ &\approx 5{,}7\,\mu\mathrm{m}\end{aligned}$$

Die Platine misst sich 5,7 µm zu groß. Das ist mehr, als manche Passung an Toleranz hat. Teile vor dem Messen auf Raumtemperatur kommen lassen und nicht länger als nötig in der Hand halten.

Formelzeichen

Alle Formelzeichen dieser Sammlung mit Bedeutung, üblicher Einheit und Kapitel. Dasselbe Zeichen kann in verschiedenen Kapiteln Verschiedenes bedeuten; maßgeblich ist immer die Größentabelle bei der Formel.

A	Fläche	$\mathrm{mm^2}$, $\mathrm{cm^2}$, $\mathrm{m^2}$	Kap. 1, 2, 9, 10
A	Amplitude	$^\circ$, rad	Kap. 5, 6, 7, 8
A	Auftreten der Fehlerursache	1	Kap. 12
ΔA	Amplitudenabfall	$^\circ$	Kap. 8
a	Seite	mm	Kap. 1
a	Halbachse	mm	Kap. 1
a	Kathete	mm	Kap. 1
a	Achsabstand	mm	Kap. 1, 4, 7
a	Beschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$	Kap. 2
a	Abstand	mm, m	Kap. 2, 6, 9
a	Zeitanteil der flachen Lagen	1	Kap. 8
a	Mondalter	d	Kap. 11
A_0	Amplitude am Anfang	$^\circ$	Kap. 5
A_0	Amplitude voll aufgezogen	$^\circ$	Kap. 8
A_1	Ausschlag vorher	rad	Kap. 6
A_2	Ausschlag nachher	rad	Kap. 6
A_{24}	Amplitude nach 24 Stunden Lauf	$^\circ$	Kap. 8
α	Winkel	$^\circ$	Kap. 1
α	Mittelpunktswinkel	$^\circ$	Kap. 1
α	Neigungswinkel	$^\circ$	Kap. 2
α	Längenausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 2, 6, 12
α	Eingriffswinkel	$^\circ$	Kap. 4
α	Kegelwinkel	$^\circ$	Kap. 9
α	Biegewinkel	$^\circ$	Kap. 9
α_1	Längenausdehnungskoeffizient der nach unten wirkenden Teile	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 6
α_2	Längenausdehnungskoeffizient der nach oben wirkenden Teile	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 6
α_{20}	Temperaturkoeffizient des Widerstands	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 10
α_S	Längenausdehnungskoeffizient der Spirale	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 5
α_U	Längenausdehnungskoeffizient der Unruh	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 5
a_max	Abstand der Lagerflächen	mm	Kap. 9
a_min	Abstand der Lagerflächen	mm	Kap. 9
A_N	Amplitude nach N_S Schwingungen	$^\circ$	Kap. 5
a_p	Schnitttiefe	mm	Kap. 9
a_U	Achsabstand von Anker und Unruh	mm	Kap. 7
A_Z	von der Zeitwaage angezeigte Amplitude	$^\circ$	Kap. 8
B	magnetische Flussdichte	$\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}}$	Kap. 8
B	Jahreswinkel	$^\circ$	Kap. 11
B	Bedeutung der Fehlerfolge	1	Kap. 12
b	Halbachse	mm	Kap. 1
b	Kathete	mm	Kap. 1

b	Seite	mm	Kap. 1
b	Klingenhöhe	mm	Kap. 2, 3, 5
b	Schläge zu jeder halben Stunde	1	Kap. 4
b_1	Klingenhöhe der Originalfeder	mm	Kap. 3
b_2	Klingenhöhe der Ersatzfeder	mm	Kap. 3
β	Winkel	$^\circ$	Kap. 1, 5
β	Keilwinkel	$^\circ$	Kap. 2
β	Temperaturkoeffizient des Quarzes	$\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K^2}}$	Kap. 10
β_B	Weg des Ankers von Begrenzung zu Begrenzung	$^\circ$	Kap. 7
β_E	Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls der Spirale	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 5
β_G	Winkel des Ankers, während der Hebelstein in der Gabel ist	$^\circ$	Kap. 7
β_H	Hebung am Anker	$^\circ$	Kap. 7
β_R	Ruhe	$^\circ$	Kap. 7
β_V	verlorener Weg	$^\circ$	Kap. 7
b_K	Breite der Klaue, gemessen am Umfang des Rades	mm	Kap. 7
C	Temperaturkoeffizient des Gangs	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d\cdot K}}$	Kap. 5, 8
C	Kegelverhältnis	1	Kap. 9
C	Kapazität	F	Kap. 10
c	Seite	mm	Kap. 1
c	Hypotenuse	mm	Kap. 1
c	Federrate	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$	Kap. 2
c	Kopfspiel zwischen Radkopf und Triebgrund	mm	Kap. 4
c	Schallgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Kap. 11
C_1	erste Teilkapazität	F	Kap. 10
C_2	zweite Teilkapazität	F	Kap. 10
C_3	dritte Teilkapazität	F	Kap. 10
C_N	Nennkapazität der Batterie	mAh	Kap. 10
C_p	Prozessfähigkeit	1	Kap. 12
C_po	Fähigkeit zur oberen Grenze	1	Kap. 12
C_pu	Fähigkeit zur unteren Grenze	1	Kap. 12
D	Durchmesser	mm	Kap. 1, 9
D	Richtmoment	$\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$, $\frac{\mathrm{\mu N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$	Kap. 2, 5, 7
D	Differenz hängend–flach	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
ΔD	Änderung des Richtmoments	$\frac{\mathrm{\mu N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$	Kap. 5
d	Durchmesser	mm	Kap. 1, 2, 3, 8, 9
d	Teilkreisdurchmesser	mm	Kap. 4
d	Abstand	m	Kap. 10
d'_a	Kopfkreisdurchmesser des Triebes	mm	Kap. 4
d'_f	Fußkreisdurchmesser des Triebes	mm	Kap. 4
d_2	Flankendurchmesser	mm	Kap. 9
d_3	Kerndurchmesser	mm	Kap. 9
d_a	Kopfkreisdurchmesser	mm	Kap. 4
d_a	Durchmesser der äußersten Windung	mm	Kap. 5
d_a	Außendurchmesser des Zylinders	mm	Kap. 7
d_b	Grundkreisdurchmesser	mm	Kap. 4
d_f	Fußkreisdurchmesser	mm	Kap. 4

d_i	Durchmesser der innersten Windung	mm	Kap. 5
d_i	Durchmesser	mm	Kap. 9
d_K	Kernlochdurchmesser	mm	Kap. 9
d_m	Messmaß zwischen den Messflächen	mm	Kap. 4
d_S	Dicke des Seils oder der Saite	mm	Kap. 3
d_w	wirksamer Walzendurchmesser	mm	Kap. 3
E	Elastizitätsmodul	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$	Kap. 2, 3, 5
E	Zeitgleichung	min	Kap. 11
E	Entdeckung vor der Auslieferung	1	Kap. 12
e	Eckmaß	mm	Kap. 1
e	Endhalbmesser	mm	Kap. 5
e	Reitstockverstellung	mm	Kap. 9
E_F	Energie der gespannten Feder	mJ, J	Kap. 2
E_kin	Bewegungsenergie	J	Kap. 2
E_pot	Lageenergie	J	Kap. 2
E_rot	Rotationsenergie	J	Kap. 2
η	Wirkungsgrad	1	Kap. 2, 3, 4, 7
η	Stromausbeute	1	Kap. 9
η_1	Wirkungsgrad der ersten Stufe	1	Kap. 2
η_2	Wirkungsgrad der zweiten Stufe	1	Kap. 2
η_3	Wirkungsgrad der dritten Stufe	1	Kap. 2
η_F	Wirkungsgrad der Feder im Federhaus	1	Kap. 3
η_ges	Gesamtwirkungsgrad	1	Kap. 2
η_ges	Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks	1	Kap. 4
F	Kraft	N	Kap. 2, 8
F	Faraday-Konstante	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$	Kap. 9
Δf	Frequenzabweichung	Hz	Kap. 10
f	Frequenz	Hz	Kap. 1, 5, 8, 10
f	Vorschub je Umdrehung	mm	Kap. 9
F_1	erste Kraft	N	Kap. 2
F_2	zweite Kraft	N	Kap. 2
f_aus	Frequenz am Ausgang des Teilers	Hz	Kap. 10
F_G	Gewichtskraft	N	Kap. 2
F_H	Hangabtriebskraft	N	Kap. 2
f_ist	gemessene Frequenz	Hz	Kap. 5
f_M	Frequenz der Motorimpulse	Hz	Kap. 10
F_N	Normalkraft	N	Kap. 2
f_P	Pulsfrequenz	$\frac{1}{\mathrm{min}}$	Kap. 11
FPY	Erstausbeute	$\%$	Kap. 12
FPY_1	Erstausbeute des ersten Arbeitsgangs	$\%$	Kap. 12
FPY_2	Erstausbeute des zweiten Arbeitsgangs	$\%$	Kap. 12
FPY_3	Erstausbeute des dritten Arbeitsgangs	$\%$	Kap. 12
$\mathrm{FPY}_\mathrm{ges}$	Erstausbeute über alle Arbeitsgänge	$\%$	Kap. 12
F_Q	Last senkrecht zur Grundfläche	N	Kap. 2
F_R	Resultierende	N	Kap. 2

F_{R}	Reibungskraft	N	Kap. 2
F_{R0}	größte Haftreibungskraft	N	Kap. 2
f_{soll}	Sollfrequenz	Hz	Kap. 5
f_{z}	Vorschub je Zahn	mm	Kap. 9
G	Gang	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 1, 5, 8, 10, 11
G	Schubmodul	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
G	Gang der Uhr in Sekunden je Tag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 6
ΔG	Gangänderung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 5, 6, 10
ΔG	Isochronismusfehler	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
Δg	Änderung der Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Kap. 6
$\bar{G}$	mittlerer Gang	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
g	Fallbeschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Kap. 2, 3, 5, 6, 8
G_0	Gang voll aufgezogen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_1	Gang bei der tieferen Temperatur	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 5
G_1	Gang am ersten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{15}	Gang am letzten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_2	Gang bei der höheren Temperatur	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 5
G_2	Gang am zweiten Prüftag	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{24}	Gang nach 24 Stunden Lauf	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{38}	Gang bei 38 °C	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_8	Gang bei 8 °C	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
γ	Winkel	$^\circ$	Kap. 1, 2
γ	Volumenausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{\mathrm{K}}$	Kap. 2
γ	halber Umspannungswinkel	$^\circ$	Kap. 7
γ_{F}	Fall	$^\circ, \mathrm{rad}$	Kap. 7
γ_{H}	Hebung am Rad	$^\circ$	Kap. 7
G_{f}	mittlerer Gang der flachen Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{h}	mittlerer Gang der hängenden Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
ΔG_{L}	größte Lagendifferenz	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{m}	Gang bei der mittleren Temperatur	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 5
G_{max}	größter Gang aller Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{min}	kleinster Gang aller Lagen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{o}	Höchstmaß	mm	Kap. 9
G_{oB}	Höchstmaß	mm	Kap. 9
G_{oW}	Höchstmaß	mm	Kap. 9
G_{T}	erwarteter Gang im Tragen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
G_{uB}	Mindestmaß	mm	Kap. 9
G_{uW}	Mindestmaß	mm	Kap. 9
ΔG_{W}	Gangwiederaufnahme	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
H	magnetische Feldstärke	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Kap. 8
h	Bogenhöhe	mm	Kap. 1
h	Höhe	mm, m	Kap. 1, 2, 3, 6, 8
h_a	Höhe	mm	Kap. 1
I	Flächenträgheitsmoment	mm^4	Kap. 2

I	Stromstärke	A, mA	Kap. 9, 10
i	Übersetzung	1	Kap. 4, 9
i	Anzahl	1	Kap. 9
i_{G}	Übersetzung in der Mittellage	1	Kap. 7
i_{ges}	Gesamtübersetzung	1	Kap. 4
I_{IC}	Stromaufnahme des Schaltkreises mit Oszillator	$\mu\mathrm{A}$	Kap. 10
I_{Imp}	Strom durch die Spule während des Impulses	mA	Kap. 10
I_{m}	mittlere Stromaufnahme des Werks	$\mu\mathrm{A}$	Kap. 10
i_{R}	Untersetzung des Automatikaufzugs	1	Kap. 3
i_{U}	Untersetzung	1	Kap. 10
i_{W}	Übersetzung vom Hebnägelrad zum Windfang	1	Kap. 4
J	Trägheitsmoment	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, $\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$	Kap. 2, 5
ΔJ	Änderung des Trägheitsmoments	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$	Kap. 5
j	Flankenspiel auf dem Teilkreis	mm	Kap. 4
j	Stromdichte	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dm^2}}$	Kap. 9
J_{A}	Trägheitsmoment um die Drehachse	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$, $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$	Kap. 2, 6
J_{S}	Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$, $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$	Kap. 2, 6
J_{Z}	bekanntes Trägheitsmoment der aufgesteckten Scheibe	$\mathrm{mg{\cdot}cm^2}$	Kap. 5
K	CGS-Wert der Spirale	$\frac{\mathrm{N{\cdot}mm^3}}{\mathrm{rad}}$	Kap. 5
K	Karatzahl	1	Kap. 9
k	Anzahl	1	Kap. 3, 4, 11
k	Kopfzuschlag	1	Kap. 4
k	letzte geschlagene Stunde	1	Kap. 4
k	Umspannung	1	Kap. 7
k	Korrekturfaktor	1	Kap. 9
k'	Kopfzuschlag des Triebes	1	Kap. 4
k_{A}	Amplitudenfaktor der Unwucht	1	Kap. 5
k_{F}	Füllgrad: Anteil der freien Fläche, den die Feder bedeckt	1	Kap. 3
L	Länge	mm	Kap. 9
Δl	Längenänderung	mm, $\mu\mathrm{m}$	Kap. 2, 5, 6, 12
Δl	Verstellweg der Linse	mm	Kap. 6
l	Länge	mm, m	Kap. 2, 3, 5, 9, 10, 12
l	Pendellänge	m, mm	Kap. 6
l_0	Ausgangslänge	mm	Kap. 2
l_1	erster Hebelarm	mm	Kap. 2
l_1	wirksame Länge beim Versuch	mm	Kap. 5
l_1	Gesamtlänge der nach unten wirkenden Teile	m	Kap. 6
l_2	zweiter Hebelarm	mm	Kap. 2
l_2	nötige wirksame Länge	mm	Kap. 5
l_2	Gesamtlänge der nach oben wirkenden Teile	m	Kap. 6
λ	Hebungswinkel	$^\circ$	Kap. 7, 8
λ	geographische Länge des Orts	$^\circ$	Kap. 11

λ_{Z}	an der Zeitwaage eingestellter Hebungswinkel	$^{\circ}$	Kap. 8
λ_{Z}	geographische Länge des Zonenmeridians	$^{\circ}$	Kap. 11
l_{B}	Bogenlänge	mm	Kap. 1
l_{B}	Länge	mm	Kap. 9
l_{G}	Gabellänge	mm	Kap. 7
$l_{\max}$	Länge	mm	Kap. 9
$l_{\min}$	Länge	mm	Kap. 9
l_{P}	Abstand der beiden Berührpunkte	mm	Kap. 7
l_{r}	reduzierte Pendellänge	m	Kap. 6
L_{W}	Länge	mm	Kap. 9
l_{Z}	Länge eines Zahns	mm	Kap. 7
M	Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$, $\mathrm{N{\cdot}m}$, $\mathrm{\mu N{\cdot}m}$	Kap. 2, 3, 4, 5
M	molare Masse des abgeschiedenen Metalls	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$	Kap. 9
Δm	Masse des Zulagegewichts	g	Kap. 6
m	Masse	g, kg, mg	Kap. 1, 2, 3, 5, 6, 9
m	Modul	mm	Kap. 4
M'	Drehmoment an der Welle des getriebenen Triebes	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 4
M_1	Drehmoment der Originalfeder	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
m_1	Modul des Eingriffs Viertelrohr und Wechselrad	mm	Kap. 4
m_1	Masse	g	Kap. 9
M_2	Drehmoment der Ersatzfeder	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
m_2	Modul des Eingriffs Wechseltrieb und Stundenrad	mm	Kap. 4
m_2	Masse	g	Kap. 9
ei	unteres Abmaß	mm	Kap. 9
es	oberes Abmaß	mm	Kap. 9
M_{b}	Biegemoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 2
M_{F}	Drehmoment des Federhauses im selben Augenblick	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
M_{F}	Drehmoment am Federhaus	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 4
m_{f}	Feingewicht	g	Kap. 9
M_{H}	Drehmoment am Hemmungsrad	$\mathrm{\mu N{\cdot}m}$	Kap. 4, 7
m_{L}	Masse	g	Kap. 1
M_{m}	mittleres Drehmoment über diese Umgänge	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
$M_{\max}$	größtes elastisch übertragbares Drehmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
M_{R}	Reibmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 2
M_{S}	Drehmoment an der Schnecke	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 3
m_{S}	Masse einer Schraube	mg	Kap. 5
M_{t}	Torsionsmoment	$\mathrm{N{\cdot}mm}$	Kap. 2
μ	Reibungszahl	1	Kap. 2, 7
m_{u}	Übergewicht	$\mathrm{\mu g}$	Kap. 5
μ_0	Haftreibungszahl	1	Kap. 2
μ_0	magnetische Feldkonstante	$\frac{\mathrm{V{\cdot}s}}{\mathrm{A{\cdot}m}}$	Kap. 8
m_{W}	Anzeige der Waage, wenn das Teil ganz im Wasser hängt	g	Kap. 1
m_{zu}	Masse	g	Kap. 9
N	Umgänge	1	Kap. 3
N	Anzahl	1	Kap. 4, 5, 10

N	Umdrehungen	1	Kap. 6
N	Nennmaß	mm	Kap. 9
N	Tagesnummer im Jahr	1	Kap. 11
n	Anzahl	1	Kap. 1, 8, 10, 12
n	Drehzahl	$\frac{1}{\mathrm{min}}$, $\frac{1}{\mathrm{h}}$	Kap. 2, 4, 9
n'	Drehzahl des getriebenen Triebes	$\frac{1}{\mathrm{h}}$	Kap. 4
n_1	Schlagzahl beim Versuch	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Kap. 5
N_{12}	Stundenschläge in 12 Stunden	1	Kap. 4
n_2	Schlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Kap. 5
N_A	Schläge je Umdrehung des Antriebsrads	1	Kap. 4
N_ab	Windungen der abgelaufenen Feder	1	Kap. 3
N_auf	Windungen der aufgezogenen Feder	1	Kap. 3
N_d	Schläge in 24 Stunden	1	Kap. 4
N_d	Zahl der Tage im Zyklus	1	Kap. 11
n_d	Schläge je Tag	$\frac{1}{\mathrm{d}}$	Kap. 4
N_E	Endkurvennummer	1	Kap. 5
n_F	Zahl der Jahre, bis der Kalender einen Tag vom Sonnenjahr abweicht	1	Kap. 11
n_F	Anzahl der fehlerhaften Teile	1	Kap. 12
n_G	Gangzahl	$\frac{1}{\mathrm{in}}$	Kap. 9
n_H	Drehzahl des Hemmungsrads	$\frac{1}{\mathrm{min}}$	Kap. 4, 7
n_h	Schlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Kap. 1, 4, 5, 6, 7
n_h	Schlagzahl in Schlägen je Minute	$\frac{1}{\mathrm{min}}$	Kap. 6
n_ist	gemessene Schlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Kap. 8
N_K	Umdrehungen der Krone	1	Kap. 3
n_K	Kurbelumdrehungen je Teilschritt	1	Kap. 9
N_L	Linienzahl	1	Kap. 1
N_L	Lochzahl des Lochkreises	1	Kap. 9
n_L	Lochabstände je Teilschritt	1	Kap. 9
N_M	Umdrehungen des Minutenzeigers	1	Kap. 3
n_M	Drehzahl des Minutenrads	$\frac{1}{\mathrm{h}}$	Kap. 4
N_max	größtmögliche Umgänge des Federhauses	1	Kap. 3
N_P	Zahl der gezählten Pulsschläge	1	Kap. 11
N_R	Umdrehungen des Rotors	1	Kap. 3
n_R	Drehzahl	$\frac{1}{\mathrm{min}}$	Kap. 10
N_S	Zahl der vollen Schwingungen	1	Kap. 5
n_S	Drehzahl des Sekundenrads	$\frac{1}{\mathrm{min}}$	Kap. 4, 10
n_S	Zahl der Schaltjahre im Zyklus	1	Kap. 11
N_Sch	Schläge je Umdrehung der Schlossscheibe	1	Kap. 4
n_soll	Sollschlagzahl	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{h}}$	Kap. 8
ν	Sicherheitszahl	1	Kap. 2
N_W	Umdrehungen der Walze	1	Kap. 3
n_Z	Zahl der Jahre im Zyklus	1	Kap. 11
OGW	oberer Grenzwert	$\mu\mathrm{m}$	Kap. 12
ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	Kap. 2
ω	Kreisfrequenz	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	Kap. 5

$\omega_{\max}$	Winkelgeschwindigkeit der Unruh beim Durchgang durch die Ruhelage	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	Kap. 5
$\overline{\Delta G}$	mittlere Gangabweichung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
P	Leistung	W, $\mu\mathrm{W}$	Kap. 2, 3, 5, 10
P	Gewindesteigung	mm	Kap. 6, 9
p	relative Abweichung	$\%$	Kap. 1
p	Druck	bar	Kap. 2, 8
p	Flächenpressung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
p	Teilung	mm	Kap. 4
p	Windungsabstand	mm	Kap. 5
P_{ab}	abgegebene Leistung	W	Kap. 2
p_{dyn}	Staudruck	bar	Kap. 8
P_{SH}	Höchstspiel	mm	Kap. 9
P_{SM}	Mindestspiel	mm	Kap. 9
P_{U}	Leistung, die Unruh oder Pendel erreicht	$\mu\mathrm{W}$	Kap. 3
P_{zu}	zugeführte Leistung	W	Kap. 2
$P_{\mathrm{ÜH}}$	Höchstübermaß	mm	Kap. 9
$P_{\mathrm{ÜM}}$	Mindestübermaß	mm	Kap. 9
Q	Gütefaktor	1	Kap. 5, 7
Q	Zeitspanvolumen	$\frac{\mathrm{mm}^3}{\mathrm{min}}$	Kap. 9
Q	Ladung	C	Kap. 10
q	Fehlerquote	ppm	Kap. 12
q_{A}	Ausschussquote	$\%$	Kap. 12
q_{N}	Nacharbeitsquote	$\%$	Kap. 12
R	Innenradius	mm	Kap. 3
R	Radius	mm	Kap. 7
R	Widerstand	Ω	Kap. 10
R	Spannweite	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 12
Δr	Verschiebung des Schwerpunkts	mm	Kap. 5
r	Radius	mm, m	Kap. 1, 2, 3, 5
r	Hebelarm	mm	Kap. 2
r	Abstand	mm	Kap. 2
r	Biegeradius	mm	Kap. 9
R_1	erster Teilwiderstand	Ω	Kap. 10
R_2	zweiter Teilwiderstand	Ω	Kap. 10
R_{20}	Widerstand bei 20 °C	Ω	Kap. 10
R_3	dritter Teilwiderstand	Ω	Kap. 10
r_{A}	Ankerarm	mm	Kap. 7
r_{a}	Außenradius	mm	Kap. 2
r_{a}	Radius der äußersten Windung	mm	Kap. 5
R_{e}	Streckgrenze	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
r_{E}	Radius des Hebelsteins um die Unruhachse	mm	Kap. 7
r_{F}	Radius des Federhauses	mm	Kap. 3
ρ	Reibungswinkel	$^\circ$	Kap. 2, 7
ρ	Radius	mm	Kap. 3
ρ	spezifischer Widerstand des Werkstoffs	$\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$	Kap. 10

R_i	Innenwiderstand der Batterie	Ω	Kap. 10
r_i	Innenradius	mm	Kap. 2
r_i	Innenradius des abgelaufenen Federpakets	mm	Kap. 3
r_i	Radius der innersten Windung	mm	Kap. 5
R_L	Lastwiderstand	Ω	Kap. 10
RPZ	Risikoprioritätszahl	1	Kap. 12
r_S	Wirkradius der Schnecke an der Stelle, an der die Kette abläuft	mm	Kap. 3
r_S	Abstand ihres Schwerpunkts von der Unruhachse	mm	Kap. 5
r_u	Abstand des Übergewichts von der Unruhachse	mm	Kap. 5
R_ϑ	Widerstand bei der Temperatur ϑ	Ω	Kap. 10
S	sekundärer Fehler	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 5
S	Stand	s	Kap. 8
ΔS	Standänderung	s	Kap. 8
Δs	Änderung der Klingenstärke	$\mu\mathrm{m}$	Kap. 5
s	Sehne	mm	Kap. 1
s	Schlüsselweite	mm	Kap. 1
s	Weg	m, km	Kap. 2, 11
s	Federweg	mm	Kap. 2
s	Klingenstärke	mm, $\mu\mathrm{m}$	Kap. 2, 3, 5
s	Zahndicke	mm	Kap. 4
s	Dicke	mm, $\mu\mathrm{m}$	Kap. 9
s	Standardabweichung	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$, $\mu\mathrm{m}$	Kap. 12
s'	Zahndicke des Triebes auf dem Teilkreis	mm	Kap. 4
S_1	Stand bei der ersten Ablesung	s	Kap. 8
s_1	Klingenstärke der Originalfeder	mm	Kap. 3
S_2	Stand bei der zweiten Ablesung	s	Kap. 8
s_2	Klingenstärke der Ersatzfeder	mm	Kap. 3
s_E	Selbstentladung	$\frac{\%}{\mathrm{a}}$	Kap. 10
s_F	Fall als Weg	mm	Kap. 7
S_h	Höhenluft	mm	Kap. 9
$S_\mathrm{h,max}$	Höhenluft	mm	Kap. 9
$S_\mathrm{h,min}$	Höhenluft	mm	Kap. 9
σ	Spannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
σ_b	größte Biegespannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
σ_zul	zulässige Spannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
σ_zul	zulässige Biegespannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 3
$\sum (x_i - \bar{x})^2$	Summe der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert	$\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{d}^2}$	Kap. 12
$\sum G_i$	Summe der Einzelgänge, mit Vorzeichen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
$\sum \lvert G_{2k} - G_{2k-1} \rvert$	Summe der fünf Beträge: Unterschied der beiden Tagesgänge je Lage	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
$\sum x_i$	Summe aller Messwerte	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 1, 12
$s_{\bar{x}}$	Standardabweichung des Mittelwerts	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 12
T	Schwingungsdauer	s	Kap. 5, 6
T	Toleranz	mm	Kap. 9
Δt	Zeitspanne	s	Kap. 2
Δt	Abweichung der Anzeige vom wahren Mondalter	d	Kap. 4
Δt	Zeitverschiebung der Schläge gegen die Normalfrequenz während der Messzeit	ms	Kap. 8

Δt	Ortszeitunterschied	min	Kap. 11
t	Zeit	h, s, d	Kap. 1, 2, 5, 8, 9, 10, 11
t'_{U}	Umlaufzeit des Triebes	s	Kap. 4
T_0	Schwingungsdauer bei sehr kleinem Ausschlag	s	Kap. 6
T_1	Schwingungsdauer ohne Scheibe	s	Kap. 5
t_1	Zeitpunkt der ersten Ablesung	d	Kap. 8
t_1	Dauer der einen Halbschwingung	ms	Kap. 8
T_2	Schwingungsdauer mit Scheibe	s	Kap. 5
t_2	Zeitpunkt der zweiten Ablesung	d	Kap. 8
t_2	Dauer der folgenden Halbschwingung	ms	Kap. 8
T_a	Toleranz	mm	Kap. 9
t_{A}	Umlaufzeit der treibenden Welle	d	Kap. 4
t_{A}	Abfallfehler	ms	Kap. 8
τ	Scherspannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
τ	Teilung	$^\circ$	Kap. 7
τ	Teilwinkel	$^\circ$	Kap. 9
τ	Zeitkonstante	s	Kap. 10
τ_{t}	größte Torsionsspannung	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$	Kap. 2
t_{dez}	Zeit in Minuten als Dezimalzahl	min	Kap. 11
T_{E}	siderisches Jahr	d	Kap. 11
t_{F}	Umlaufzeit des Federhauses	h	Kap. 3
t_{F}	Laufzeit, bis die Anzeige um Δt abweicht	d	Kap. 4
t_{G}	Gangdauer	h, d	Kap. 3, 4
t_{H}	Hebungszeit	ms	Kap. 8
t_{h}	volle Stunden	h	Kap. 1
t_{h}	Hauptzeit	min	Kap. 9
t_{I}	Inhibitionsperiode	s	Kap. 10
t_{Imp}	Impulsdauer	ms	Kap. 10
T_{J}	tropisches Jahr	d	Kap. 11
T_{K}	mittlere Länge des Kalenderjahrs	d	Kap. 11
T_l	Toleranz	mm	Kap. 9
t_{L}	angezeigte Dauer eines Mondumlaufs	d	Kap. 4
T_{Luft}	Toleranz	mm	Kap. 9
T_{M}	Periodendauer der Motorimpulse	s	Kap. 10
t_{M}	Umlaufzeit des Minutenrads	h	Kap. 3
t_{M}	Messzeit	s	Kap. 8
t_{M}	mittlere Ortszeit	min	Kap. 11
t_{min}	Minuten	min	Kap. 1
t_{N}	Normalzeit	s	Kap. 8
t_{R}	Gangreserve	h	Kap. 3
T_{S}	Schlagdauer	s	Kap. 1, 6
t_{s}	Sekunden	s	Kap. 1
t_{s}	Zeit zwischen zwei Schaltungen	d	Kap. 4
T_{sid}	siderischer Monat	d	Kap. 11
T_{So}	mittlerer Sonnentag	s	Kap. 11
T_{St}	Sterntag	s	Kap. 11

T_{syn}	synodischer Monat	d	Kap. 4, 11
t_{U}	Umlaufzeit der Antriebswelle	h	Kap. 3
t_{U}	Umlaufzeit des treibenden Rades	s	Kap. 4
t_{U}	Anzeige der Uhr	s	Kap. 8
t_{W}	Umlaufzeit der Walze	h	Kap. 3
t_{W}	wahre Ortszeit	min	Kap. 11
t_{Z}	Zonenzeit	min	Kap. 11
U	Umfang	mm	Kap. 1
U	nötige Umdrehungen des Antriebsrads	1	Kap. 4
U	Spannung	V	Kap. 10
U_0	Quellenspannung	V	Kap. 10
U_2	Teilspannung am Widerstand R_2	V	Kap. 10
u_{C}	Spannung am Kondensator zur Zeit t	V	Kap. 10
u_G	größter Fehler des Gangs durch das Ablesen	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 8
UGW	unterer Grenzwert	$\mu\mathrm{m}$	Kap. 12
$U_{\max}$	zulässige Messunsicherheit des Messmittels	$\mu\mathrm{m}$	Kap. 12
U_{N}	Nennspannung der Batterie	V	Kap. 10
u_S	größter Ablesefehler eines Standes	s	Kap. 8
U_{W}	Umdrehungen des Windfangs je Schlag	1	Kap. 4
V	Volumen	$\mathrm{mm^3}$, $\mathrm{cm^3}$	Kap. 1
ΔV	Volumenänderung	$\mathrm{cm^3}$	Kap. 2
Δv	Änderung der Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Kap. 2
v	Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	Kap. 2, 8, 11
v	Umfangsgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Kap. 2
V_0	Ausgangsvolumen	$\mathrm{cm^3}$	Kap. 2
v_0	Anfangsgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Kap. 2
ε	Dehnung	1	Kap. 2
ε	Winkel	$^\circ$	Kap. 8
ε_0	elektrische Feldkonstante, $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$	Kap. 10
ε_{r}	Permittivitätszahl des Isolierstoffs	1	Kap. 10
φ	Winkel	$^\circ$, rad	Kap. 1, 5
φ	Drehwinkel	rad	Kap. 2
φ	Verdrehwinkel	rad	Kap. 2, 3
φ	geographische Breite	$^\circ$	Kap. 6
φ	Steigungswinkel	$^\circ$	Kap. 9
φ_{E}	Ergänzungsbogen	$^\circ$	Kap. 7
φ_{S}	Schrittwinkel des Rotors	$^\circ$	Kap. 10
ϱ	Dichte	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$, $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$	Kap. 1, 8, 9
ϱ_{W}	Dichte des Wassers	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$	Kap. 1
$\Delta\vartheta$	Temperaturänderung	K	Kap. 2, 6, 10, 12
ϑ	Temperatur	$^\circ\mathrm{C}$	Kap. 10, 11
ϑ_0	Temperatur des Umkehrpunkts	$^\circ\mathrm{C}$	Kap. 10
ϑ_1	tiefere Prüftemperatur	$^\circ\mathrm{C}$	Kap. 5
ϑ_2	höhere Prüftemperatur	$^\circ\mathrm{C}$	Kap. 5
v_{c}	Schnittgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$	Kap. 9

v_F	Anteil der Radarbeit, der im Fall verloren geht	$\%$	Kap. 7
v_f	Vorschubgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}$	Kap. 9
W	Arbeit	J, mJ	Kap. 2, 3, 10
W	Energie	$\mu\mathrm{J}$, J	Kap. 5, 10
ΔW	Energieverlust je voller Schwingung	$\mu\mathrm{J}$	Kap. 5
w	Durchbiegung am freien Ende	mm	Kap. 2
w	Feingehalt	$‰$	Kap. 9
w_1	Feingehalt	$‰$	Kap. 9
w_2	Feingehalt	$‰$	Kap. 9
W_ab	beim Ablauf abgegebene Arbeit	mJ	Kap. 3
W_auf	beim Aufziehen aufgewendete Arbeit	mJ	Kap. 3
W_b	Widerstandsmoment gegen Biegung	mm^3	Kap. 2
$\widehat{\alpha}$	Winkel	rad	Kap. 1
W_max	größte elastisch speicherbare Energie	mJ	Kap. 3
W_S	Arbeit des Hemmungsrads je Schlag	$\mu\mathrm{J}$	Kap. 7
W_U	Arbeit, die der Unruh je Schlag zugeführt wird	$\mu\mathrm{J}$	Kap. 7
$\bar{x}$	Mittelwert	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$, $\mu\mathrm{m}$	Kap. 1, 12
x	relative Abweichung	ppm	Kap. 1
x	Koordinate	mm	Kap. 1
x	Abstand	mm	Kap. 6
x_1	Koordinate	mm	Kap. 1
x_2	Koordinate	mm	Kap. 1
x_ist	Istwert	mm	Kap. 1
x_max	größter Messwert	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 12
x_min	kleinster Messwert	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}$	Kap. 12
x_soll	Sollwert	mm	Kap. 1
y	Koordinate	mm	Kap. 1
y_1	Koordinate	mm	Kap. 1
y_2	Koordinate	mm	Kap. 1
z	Zähnezahl	1	Kap. 4, 7, 9
z	Teilzahl	1	Kap. 9
z	Wertigkeit	1	Kap. 9
z'	Zähnezahl des Triebes	1	Kap. 4
z'_1	Zähnezahl des Triebs am ersten Reduktionsrad	1	Kap. 3
z'_1	Zähnezahl des ersten getriebenen Triebes	1	Kap. 4
z'_2	Zähnezahl des Triebs am zweiten Reduktionsrad	1	Kap. 3
z'_2	Zähnezahl des zweiten getriebenen Triebes	1	Kap. 4
z'_3	Zähnezahl des dritten getriebenen Triebes	1	Kap. 4
z'_A	Zähnezahl des Aufzugtriebs	1	Kap. 3
z'_B	Zähnezahl des Beisatzradtriebs	1	Kap. 3
z'_H	Zähnezahl des Hemmungstriebs	1	Kap. 4
z'_K	Zähnezahl des Kupplungstriebs	1	Kap. 3
z'_K	Zähnezahl des Kleinbodentriebs	1	Kap. 4
z'_M	Zähnezahl des Minutenradtriebs	1	Kap. 3
z'_N	Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads	1	Kap. 4
z'_R	Zähnezahl des Rotortriebs	1	Kap. 3

z'_{S}	Zähnezahl des Sekundentriebs	1	Kap. 4
z'_{Sch}	Zähnezahl des Triebes auf der Welle des Hebnägelrads, der die Schlossscheibe treibt	1	Kap. 4
z'_{W}	Zähnezahl des Wechseltriebs	1	Kap. 4
z_1	Zähnezahl des ersten Reduktionsrads	1	Kap. 3
z_1	Zähnezahl des ersten treibenden Rades	1	Kap. 4
z_2	Zähnezahl des zweiten Reduktionsrads	1	Kap. 3
z_2	Zähnezahl des zweiten treibenden Rades	1	Kap. 4
z_{24}	Zähnezahl des 24-Stunden-Rads	1	Kap. 4
z_3	Zähnezahl des dritten treibenden Rades	1	Kap. 4
z_{A}	Zähnezahl des treibenden Rades auf dem Stundenrohr	1	Kap. 4
z_{A}	Zähnezahl des Antriebsrads	1	Kap. 4
z_{B}	Zähnezahl des Beisatzrads	1	Kap. 3
z_{F}	Zähnezahl des Federhauses	1	Kap. 3
z_{H}	Zähnezahl des Hemmungsrads	1	Kap. 4
z_{K}	Zähnezahl des Kleinbodenrads	1	Kap. 4
z_{M}	Zähnezahl des Minutenrads	1	Kap. 4
z_{N}	Zahl der Hebnägel	1	Kap. 4
z_{S}	Zähnezahl des Sekundenrads	1	Kap. 4
z_{Sch}	Zähnezahl des Schlossscheibenrads	1	Kap. 4
z_{Sp}	Zähnezahl des Sperrrads	1	Kap. 3
z_{St}	Zähnezahl des Stundenrads	1	Kap. 4
z_{V}	Zähnezahl des Viertelrohrs	1	Kap. 3, 4
z_{W}	Zähnezahl des Wechselrads	1	Kap. 4

Stichwortverzeichnis

2

24-Stunden-Anzeige 96

A

A/h 8
Abfall 174
Abfallfehler 174
Abfallfehler als Winkel 174
Abfallfehler, Winkel 174
Abgegebene Arbeit beim Ablauf 75
Abgeschiedene Masse (Faradaysches Gesetz) 212
Abgleich, digitaler 231
Ablegieren 210
Ablesefehler 186
Abmaß 198
Abscherung 56
Abstand der Berührpunkte 157
Abweichung in Prozent 29
Abweichung, prozentuale 29
Abzählen der Spirale 123
Abzählen: Schwingungen in der Zählzeit 123
Achsabstand 27, 99
Achsabstand aus Koordinaten 27
Achsabstand von Rad und Anker 156
Achsabstand, Rad und Anker 156
Achsenluft 201
Achttagewerk 77
Alternanz 117
Alterung, Quarz 231
Amperestunde 217
Amplitude aus der Energiebilanz 164
Amplitude aus Hebungswinkel und Hebungszeit 175
Amplitude bei falsch eingestelltem Hebungswinkel 176
Amplitude, Energiebilanz 164
Amplitude, falscher Hebungswinkel 176
Amplitude, Pendel 147
Amplitude, Unruh 118
Amplitude, Zeitwaage 175
Amplitudenabfall 180
Amplitudenabfall in 24 Stunden 180
Anflachung 13
Anhalteweg 32
Ankathete 24
Anker, Achsabstand 156
Anker, Umspannung 155
Ankerarm 156
Ankerweg 159
Antimagnetisch 185
Antriebsgewicht 35
Äquation 240
Arbeit 41
Arbeit bei Drehung 42
Arbeit des Hemmungsrads je Schlag 162
Arbeit, Drehung 42
Arbeit, elektrische 217
Arbeit, Federhaus 75
Arbeit, Hemmungsrad 162
Archimedes 22
Archimedische Spirale 121
Arithmetischer Mittelwert 249
Asthmometer 247
Auflegieren 209
Aufprallgeschwindigkeit 32
Aufprallgeschwindigkeit beim Fall 186
Aufschrumpfen 62
Auftrieb 22
Aufzugszustand 180
Aufzugtrieb 84
Aufzugwelle 61
Ausdehnungskoeffizient 62
Ausschussquote 254
Ausschwingen ohne Antrieb 135
Ausschwingversuch 135
Auswuchten 128
Automatikaufzug 85

B

Bar 36
Batteriekapazität 226
Batterielaufzeit 226
Batterietest 221
Bedingung für das Sekundenrad 94
Begrenzung 159
Beharrungszustand 164
Beisatzrad 77
Berührpunkte, Abstand 157
Beschleunigung 31
Bewegungsenergie 43
Bewegungsenergie (kinetische Energie) 43
Bezugstemperatur 257
Biegebalken 59
Biegemoment 57
Biegen 205
Biegespannung 57
Biegespannung, Zugfeder 72
Blattfeder 57, 59
Bogenhöhe 13
Bogenlänge 12
Bogenmaß 8, 34
Breguetspirale 123
Bremsweg 32

C

CGS-Nummer 122
CGS-Nummer der Spirale 122
CGS-Wert 122
Chronometerprüfung 182
Chronometerprüfung, Temperatur 132
Coulomb 217
Cpk 252, 253

D

Dämpfung, Unruh 135
Dehngrenze 55
Dehnung 54
Delta, Lagen 178
Dezimalminuten 248

Dezimalstunden 6
Diagonale 23
Dichte 21
Dichte durch Wägen in Luft und in Wasser 22
Dichtebestimmung 22
Differenz hängend–flach 179
Direktes Teilen 203
Direktionsmoment 119
Drehfeder 45
Drehmoment 40
Drehmoment am Hemmungsrad 114
Drehmoment am Trieb 91
Drehmoment an der Schnecke 81
Drehmoment an der Walze 79
Drehmoment der Zugfeder 71
Drehmoment, Gewichtsantrieb 79
Drehmoment, größtes 72
Drehmoment, Hemmungsrad 114
Drehmoment, Räderwerk 91
Drehmoment, Zugfeder 71
Drehzahl 33, 34, 89
Drehzahl aus der Schnittgeschwindigkeit (Werkstattformel) 189
Drehzahl des Hemmungsrads 93
Drehzahl des Rotors 232
Drehzahl des Triebes 89
Drehzahl, Drehen und Fräsen 189
Drehzahl, Hemmungsrad 152
Dreieck 15
Dreieck, allgemeines 25
Dreieck, Fläche 15
Druck 36
Druck einer Wassersäule 184
Druckkraft 184
Druckkraft auf Glas oder Boden 184
Druckspannung 54
Dünner Stab um seine Mitte 53
Durchbiegung 59
Durchbiegung des einseitig eingespannten Stabs 59
Durchschnitt 29, 249

E

E-Modul 55
Eckmaß 17
Einfluss der Klingenstärke 72
Eingriffsentfernung 27
Eingriffslinie 107
Eingriffswinkel 107
Einstellwinkel 24, 193
Elastizitätsmodul 55
Elastizitätsmodul, Spirale 119
Elektrische Arbeit 217
Elektrische Leistung 216
Ellipse 16
Ellipse (Hebelstein) 160
Ellipse, Umfang 16
Ellipse: Fläche 16
Ellipse: Umfang 16
Endhalbmesser 123
Endkurve 123
Endkurvennummer 123
Energie der schwingenden Unruh 133
Energie der Spiralfeder 45
Energie der Unruh 43
Energie des Gewichts 80
Energie einer Drehfeder 45
Energie einer gespannten Feder 44
Energie eines Motorimpulses 234
Energie im Kondensator 225
Energie, elektrische 217
Energie, Federhaus 75
Energie, Gewichtsantrieb 80
Energie, größte 74
Energie, Unruh 133
Energie, Zugfeder 74
Energiebilanz, Unruh 164
Energiefluss 47
Energieinhalt der Batterie 227
Energievorrat, Zugfeder 42
Ergänzungsbogen 154
Ergänzungsbogen der Unruh 154
Ergänzungsbogen des Pendels 167
Ergänzungsbogen, Pendel 167
Ersatzfeder 73
Ersatzfeder mit gleicher Wirkung 73
Ersatzwiderstand 220
Erstausbeute 254
Erstausbeute eines Arbeitsgangs 254
Erstausbeute über mehrere Arbeitsgänge 255
Erstausbeute, gesamt 255
Evolventenverzahnung 107
Ewiger Kalender 240

F

Fähigkeit aus Toleranz und Streuung 252
Fall 153
Fall als Weg der Zahnspitze 154
Fall, als Weg 154
Fall, Verlust 163
Fallbeschleunigung nach Breite und Höhe 150
Fallbeschleunigung, Ort 150
Fallgeschwindigkeit 32
Fallhöhe 32, 79
Fallhöhe des Gewichts 79
Fallverlust 163
Fallwinkel 153
Farad 222
Faradaysches Gesetz 212
Feder schwächen 60
Federenergie 44
Federhaus 65
Federhaus, Übersetzung 76
Federhausumgänge 66
Federkern 65
Federkonstante 44
Federkraft 44
Federlänge 67
Federlänge aus den Windungen der abgelaufenen Feder 70
Federlänge aus Windungen 70
Federmoment 71
Federpaket 65
Federpaket, Breite 68
Federrate 44
Federrate der Blattfeder 60
Federrate, Blattfeder 60
Federvolumen 74

Fehlendes Rad bestimmen 93, 102
Fehler des Gangs durch das Ablesen 186
Fehlerquote 254
Feingehalt 207
Feingehalt einer Mischung 208
Feingehalt erhöhen 209
Feingehalt erhöhen mit Feinmetall 209
Feingehalt in Karat 207
Feingehalt senken 210
Feingehalt senken mit Zusatzmetall 210
Feingewicht 207
Feinregulierung 127
Feinregulierung mit Regulierschrauben 127
Feinregulierung, Pendel 143
First Pass Yield 254
Fläche, Kreis 10
Flächenmoment 58
Flächenpressung 37
Flächenpressung im Zapfenlager 37
Flächenträgheitsmoment 58, 59
Flächenträgheitsmoment: Kreis 59
Flächenträgheitsmoment: Rechteck 58
Flankendurchmesser 195
Flankenspiel 105
Flussdichte und Feldstärke in Luft 185
FMEA 255
Fräsen, Vorschub 191
freie Hemmung 154
freier Fall 31
Freier Fall 43
Frequenz 8
Frequenz der Unruh 116
Frequenz, Unruh 116
Frequenzabweichung 129, 230
Frequenzteiler 229
Fußhöhe 103
Fußkreis 103
Fußkreis der Evolventenverzahnung 107
Fußkreis des Rades 103
Fußkreis des Triebes 104
Fußkreis des Triebes (Richtwert) 103
Fußkreis, Evolvente 107
Fußkreis, Trieb 103, 104
Füllfaktor 68
Füllgrad 68
Füllgrad des Federhauses 68
Füllung des Federhauses 67

G

Gabel 160
Gabel und Hebelstein: Längen und Winkel 160
Gabel, Übersetzung 162
Gabellänge 161
Gabellänge aus dem Achsabstand 161
Galvanik, Schichtdicke 213
Galvanisieren 212
Gang 170
Gang als relative Abweichung 7
Gang aus der Abweichung der Schlagzahl 171
Gang aus der Frequenzabweichung 129
Gang aus der Zeitverschiebung der Schläge 172
Gang aus zwei Ständen 170
Gang der Quarzuhr aus der Frequenzabweichung 230
Gang einer Sternzeituhr gegen mittlere Zeit 237
Gang im Tragen aus zwei Lagengruppen 179
Gang, aus der Schlagzahl 171
Gang, Frequenz 129
Gang, im Tragen 179
Gang, je Monat 170
Gang, mittlerer 171
Gang, Pendellänge 140
Gang, Quarzuhr 230
Gang, Sternzeit 237
Gang, täglicher 170
Gang, Trägheitsmoment 126
Gangabweichung, mittlere 182
Gangänderung aus Richtmoment und Trägheitsmoment 129
Gangänderung durch das Trägheitsmoment 126
Gangänderung durch die Klingenstärke 120
Gangänderung durch eine Unwucht (Schwerpunktfehler) 128
Gangänderung durch einen anderen Aufstellort 150
Gangänderung durch Längenänderung 140
Gangänderung durch Temperatur 148
Gangänderung mit dem Rücker 124
Gangänderung mit der Reguliermutter 141
Gangänderung, wenn sich der Ausschlag ändert 147
Gangdauer 77
Gangdauer aus den Umgängen des Federhauses 77
Gangdauer aus der Fallhöhe 80
Gangdauer, Gewichtsantrieb 80
Gangreserve 77
Gangreserve, Automatik 86
Gangwiederaufnahme 183
Gangzahl 195
Gauss 185
Gegenkathete 23
Gehwerk 92
Genaue Mondphase mit Übersetzung 112
Gesamtkapazität 223
Gesamtübersetzung 90
Gesamtwiderstand 219
Gesamtwirkungsgrad 47
Gesamtwirkungsgrad des Räderwerks 113
Geschwindigkeit 30
Geschwindigkeit aus Messstrecke und Stoppzeit 245
Geschwindigkeit bei gleichmäßiger Beschleunigung 31
Geschwindigkeit und Weg ohne die Zeit 32
Geschwindigkeit, Chronograph 245
Gespeicherte Energie der idealen Feder 74
Gestreckte Länge 205
Gestreckte Länge eines Bogens 205
Gewicht eines Teils 21
Gewichtsantrieb 42, 79
Gewichtsantrieb, Fallhöhe 79
Gewichtskraft 35
Gewinde, metrisch 195
Gewinde, Reibung 49
Gewindebohren 196
Gewindesteigung 195
Gewindetiefe 196
Glasreif 206
Gleicher Achsabstand im Zeigerwerk 97
gleichmäßig beschleunigte Bewegung 31
Gleitreibung 48
Goldene Regel der Messtechnik 256
Goldlegierung 207

Grad 8
Grad in Bogenmaß 8
Grad, Minuten, Sekunden 6
Grahamhemmung 166
Grahamhemmung, Klauenbreite 166
Gregorianischer Kalender 238
Grenzmaß 198
Größte Höhenluft 201
Größte Lagendifferenz 178
Größte speicherbare Energie 74
Größte Winkelgeschwindigkeit 118
Größte Zahl der Umgänge 69
Größtes Drehmoment aus der zulässigen Biegespannung 72
Grundkreis 107
Günstigste Federlänge 67
Güte, Unruh 134
Gütefaktor 134, 164

H

Haftreibung 48
Halbschwingung 8, 117, 138
Halbschwingungen je Stunde 92
Halbstundenschlag 108
Handaufzug 84
Hangabtriebskraft 38
Hauptzeit 191
Hauptzeit beim Drehen und Bohren 191
Hebel 41
Hebelarm 40
Hebelgesetz 41
Hebelscheibe 160
Hebelstein 160
Hebelstein, Radius 161
Hebelsteinradius aus dem Achsabstand 161
Hebnägelrad 109
Hebnägelrad, Übersetzung 109
Hebung und Fall am Rad 153
Hebung, am Anker 159
Hebung, am Rad 153
Hebungswinkel, Gabel 160
Hebungswinkel, Zeitwaage 176
Hebungszeit 175
Hemmung, Wirkungsgrad 163
Hemmungsrad, Arbeit je Schlag 162
Hemmungsrad, Drehzahl 93, 152
Hemmungsrad, Teilung 152
Höchstmaß 198
Höchstmaß und Mindestmaß 198
Höchstspiel 199
Höchstübermaß 200
Höhenluft 201
Höhenluft einer Welle 201
Höhenluft einstellen 202
Höhenluft, Grenzwerte 201
Hohlzylinder 19
Hohlzylinder, Trägheitsmoment 52
Hookesches Gesetz 55
Hundertstelminute 248
Hypotenuse 23

I

Impulsdauer 233
Impulsenergie 234
Indirektes Teilen mit dem Teilkopf 204
Inhibition 231
Inhibition: Gangkorrektur durch ausgeblendete Impulse 231
Innenwiderstand 221
Innenwiderstand aus Leerlauf- und Lastmessung 222
Innenwiderstand messen 222
ISO 1413 186
ISO 3159 182
ISO 764 185
Isochronismus, 0 h und 24 h 180
Isochronismus, Pendel 147
Isochronismusfehler aus 0 h und 24 h 180

J

Jahre bis zu einem Tag Abweichung 239
Jahreswinkel für die Zeitgleichung 241
Joule 41
Julianischer Kalender 238

K

Kalenderfehler 239
Kalenderjahr 238
Kalkulation, Drehteil 191
Kapazität (Kondensator) 222
Kapazität des Plattenkondensators 223
Karat 207
Kathete 23
Kegel 20
Kegeldrehen 194
Kegelstift 193
Kegelstumpf 20
Kegelverhältnis 193
Kegelverhältnis (Verjüngung) 193
Kegelwinkel 193
Kegelwinkel und Einstellwinkel 193
Keil 39
Keil, Reibung 49
Keilwinkel 39
Kerndurchmesser 196
Kerndurchmesser des Bolzens 196
Kerndurchmesser, Trieb 103
Kernloch 196
Kernlochdurchmesser 196
Kette und Schnecke 81
Kinetische Energie 43
Klauenbreite 166
Klauenbreite der Grahamhemmung 166
Kleinbodenrad 94
Kleinste Höhenluft 201
Klemmenspannung 221
Klemmenspannung der belasteten Batterie 221
Klingenhöhe 119
Klingenstärke 58, 72, 119
Klingenstärke aus Umgängen 69
Kompensationspendel 149
Kompensationsunruh 133
Kondensator laden 225
Kondensator, Energie 225
Kondensator, Ladung 222
Koordinaten 27
Koordinaten auf dem Teilkreis: x 28
Koordinaten auf dem Teilkreis: y 28
Kopfhöhe 100

Kopfkreis 100
Kopfkreis bei ungerader Zähnezahl messen 106
Kopfkreis der Evolventenverzahnung 107
Kopfkreis des Rades 100
Kopfkreis des Triebes 102
Kopfkreis messen 106
Kopfkreis, Evolvente 107
Kopfkreis, Trieb 102
Kopfspiel 104
Korrekturfaktor für enge Biegeradien 206
Korrekturfaktor, Biegen 206
Kosinus 24
Kosinussatz 26
Kraft 35
Kraft und Beschleunigung 35
Kräfte zerlegen 38
Kräfte zusammensetzen 37
Kräfteparallelogramm 37
Kreisabschnitt (Segment) 14
Kreisausschnitt (Sektor) 12
Kreisbogen 12
Kreisfehler 147
Kreisfläche 10
Kreisfrequenz 34, 117
Kreisquerschnitt 58, 59
Kreisring 11
Kreisumfang 10
Kritische Fähigkeit zur oberen Grenze 252
Kritische Fähigkeit zur unteren Grenze 253
Kritische Prozessfähigkeit 252
Kronenaufzug 84
Kronenumdrehungen für den Aufzug 84
Kronrad 84
Kugel 19
Kupplungstrieb 86
Kurvenvorlage 123

L

Ladekurve 225
Ladung 217
Ladung des Kondensators 222
Lageenergie 42, 80
Lageenergie (potentielle Energie) 42
Lagen, flach und hängend 179
Lagendifferenz 178
Lagenfehler 128, 178
Lagerdruck 37
Lagerluft 201
Lagerstein einpressen 200
Länge der Flachspirale 121
Länge des Ankerarms 156
Längenausdehnung 62
Längengrad 243
Lastkapazität 224
Lastwiderstand 222
Laufzeit aus Kapazität und Stromaufnahme 226
Laufzeit bis zur Abweichung der Mondphase 112
Laufzeit mit Selbstentladung 227
Lavet-Motor 232
Leerlaufspannung 221
Legieren 208
Legierung 207
Leistung 45
Leistung am Gangregler 83
Leistung am Widerstand 216
Leistung am Widerstand aus dem Strom 217
Leistung am Widerstand aus der Spannung 216
Leistung aus Drehmoment 82
Leistung aus Drehmoment und Umlaufzeit 82
Leistung bei Drehung 46
Leistung des Federhauses 46
Leistung, Antrieb 82
Leistung, Drehung 46
Leistung, elektrische 216
Leistung, Hemmungsrad 162
Leistung, mittlere 82
Leistung, Unruh 83, 135
Leistungsbedarf 135
Leistungsbedarf der Unruh 135
Leiterwiderstand 218
Linie 6
Linien in Millimeter 6
Linse verstellen 141
Linse verstellen aus Gang und Schlagzahl (Werkstattformel) 141
Lochkreis 27, 203
Lochkreis, Koordinaten 28
Lochkreis: Abstand benachbarter Bohrungen 27
Losbrechkraft 48

M

Magnetfeld 185
Maßkette 201
Maschinenfähigkeit 252
Masse 21
Masse aus Volumen und Dichte 21
Masselots 126
Massenpunkt und dünner Reif 51
Massenträgheitsmoment 51
Messfehler, Gang 186
Messfehler, Temperatur 257
Messmittel, Auswahl 256
Messunsicherheit 256
Messzeit 172
MEZ 243
Milliamperestunde 226
Mindestausschlag 167
Mindestmaß 198
Mindestspiel 199
Mindestübermaß 200
Minuten und Sekunden als Dezimalwert 6
Mischungskreuz 209
Mischungsrechnung 208
Mittelwert 29, 249
Mittelwert, Unsicherheit 250
Mittlere Gangabweichung 182
Mittlere Länge des Kalenderjahrs 238
Mittlere Leistung 82
Mittlere Sonnenzeit 240
Mittlere Stromaufnahme des Werks 233
Mittlerer Durchmesser 206
mittlerer Gang 29
Mittlerer Gang 171
Mittlerer täglicher Gang 171
Modul 98
Modul aus Achsabstand 99

Modul aus dem gemessenen Kopfkreis 102
Modul aus Kopfkreis 102
Momentengleichgewicht 41
Mondalter 244
Mondalter aus dem Datum 244
Mondphase 111, 244
Mondphase, genaue 112
Mondphase, Genauigkeit 112
Mondphasenscheibe 111
Mondscheibe 111
Mondumlauf 238
Motorimpuls 233

N
Nacharbeitsquote 254
Neigung 193
Nennmaß 198
Neumond 244
Neutrale Faser 57, 205
Newton 35
Normalkraft 38
Normalschwere 150
Normalzeit 169

O
Oberschlitten schwenken 193
Ohmsches Gesetz 215
Ortszeit 243
Ortszeit aus dem Längengrad 243
Oval 16

P
Paarung Unruh und Spirale 130
Paarung: Richtmoment für Unruh und Schlagzahl 130
Paletten, Abstand 157
Parallelschaltung von Kondensatoren 223
Parallelschaltung von Widerständen 220
Pariser Linie 6
Passung 199
Pendel, Ergänzungsbogen 167
Pendel, Schwingungsdauer 138
Pendellänge 139
Pendellänge aus der Schlagzahl 139
Pendellänge aus Schlägen je Minute (Werkstattformel) 140
Permittivität 223
Pfeilhöhe 13
Physikalisches Pendel 145
Plattenkondensator 223
Pond 40
Potentielle Energie 42
ppm 7, 254
ppm und Gang 230
Presspassung 200
Presssitz 200
Prisma: Körper mit gleichbleibendem Querschnitt 18
Produktionszähler 245
Prozent 29
Prozent und Gang 7
Prozessfähigkeit 252
Prüfdruck 184
Pulsometer 247
Pyramide 20
Pythagoras 23

Q
Quader 18
Quarz, Temperaturgang 231
Quarzfrequenz 32 768 Hz 229
Quecksilberpendel 63
Querschnitt, rund 10

R
Räderwerk 90
Radiant 8
Radius aus Sehne und Bogenhöhe 14
Radius des Federkerns (Richtwert) 65
RC-Glied 224
Rechteck 15
Rechteckquerschnitt 57
Reduktionsräderwerk 85
Reduzierte Pendellänge 145
Reglage 129
Regulieren, Grundformel 129
Regulieren, Pendeluhr 140, 141
Regulieren, Rücker 124
Regulieren, Unruh 126
Reguliergewicht 144
Reguliermutter 141
Regulierschraube 51
Regulierschrauben 126, 127
Reguliertischchen 143
Reibmoment 50
Reibmoment im Zapfenlager 50
Reibungskraft 48
Reibungswinkel 49, 158
Reibungszahl 48
Reif und Hohlzylinder 52
Reihenschaltung von Kondensatoren 224
Reihenschaltung von Widerständen 219
Reitstockverstellung 194
relative Abweichung 7
Repère 174
Resultierende 37
Richtmoment 45, 119
Richtmoment aus den Maßen der Spirale 119
Ring, Zuschnitt 206
Ringfläche 11
Risikoprioritätszahl 255
Risikoprioritätszahl (FMEA) 255
Rohr 19
Rolle, lose 79
Rostpendel 149
Rotationsenergie 43
Rotor 85, 232
Rotorumdrehungen für eine Gangreserve 86
RPZ 255
Rücker 124
Rückstellmoment 119
Rückstellmoment der Spirale 119
Ruhe 159

S
Säkularer Kalender 240
Satz des Pythagoras 23
Satz von Steiner 53
Schallgeschwindigkeit 246
Schallgeschwindigkeit und Temperatur 247

Schallgeschwindigkeit, Temperatur 247
Schaltjahr 238
Schaltzyklus 240
Scheibe, Trägheitsmoment 52
Scherspannung 56
Schichtdicke 213
Schichtdicke aus der Masse 213
Schichtdicke aus Stromdichte und Zeit 213
Schiefe Ebene 38
Schiefe Ebene, Keil und Gewinde mit Reibung 49
Schiefe Ebene: Hangabtriebskraft 38
Schiefe Ebene: Normalkraft 38
Schlagdauer 9
Schlagdauer (Halbschwingung) 138
Schläge in 12 Stunden 108
Schläge je Tag 108
Schläge je Umdrehung des Antriebsrads 109
Schlagwerk 108
Schlagwerk, Gangdauer 110
Schlagzahl 8
Schlagzahl aus dem letzten Eingriff 94
Schlagzahl aus dem Räderwerk 92
Schlagzahl aus der Frequenz 117
Schlagzahl aus der Schwingungsdauer 139
Schlagzahl aus Zähnezahlen 92
Schlagzahl der Kleinuhr aus den Zähnezahlen 93
Schlagzahl und Drehzahl des Hemmungsrads 152
Schlagzahl und Frequenz 8
Schlagzahl, Abweichung 171
Schlagzahl, Hemmungsrad 152
Schlagzahl, Kleinuhr 93
Schlagzahl, Pendel 139
Schlagzahl, Unruh 117
Schlossscheibe 109
Schlossscheibenschlagwerk 109
Schlüsselweite 17
Schnecke 81
Schnittgeschwindigkeit 189
Schnitttiefe 192
Schritt je Schlag 152
Schrittmotor 232
Schrittwinkel 232
Schubmodul 61
Schwereformel 150
Schwerpunktfehler 128
Schwingungsdauer 138
Schwingungsdauer bei größerem Ausschlag 147
Schwingungsdauer der Unruh 116
Schwingungsdauer des physikalischen Pendels 145
Schwingungsdauer und Schlagdauer 9
Schwingungsdauer, Unruh 116
Schwingungsenergie 133
Schwingungsmittelpunkt 145
Sechskant 17
Sechskant: Eckmaß 17
Segment 14
Sehne 13
Sehnenlänge 13
Sektor 12
Sekundärer Fehler 133
Sekundenpendel 138
Sekundenrad 94
Sekundenrad, fehlendes 94
Sekundenrad, Quarzwerk 233
Selbstentladung 227
Selbsthemmung 49
Selbsthemmung, Gewinde 197
Sicherheit 55
Siderischer Monat 238
Sinus 23
Sinuslineal 23
Sinussatz 25
Sinusschwingung 118
Sollwert und Istwert 29
Sonnentag, mittlerer 237
Sonnenuhr 243
Spannarbeit 74
Spannenergie 44
Spannung 54, 215
Spannung am Kondensator beim Laden 225
Spannungsteiler 221
Spannungsteiler (unbelastet) 221
Spannweite 249
Speicherkondensator 225
Sperrrad 84
spezifischer Widerstand 218
Spielpassung 199
Spirale auswählen 130
Spirale bestellen 122
Spirale kürzen 124
Spirale, Abzählen 123
Spirale, Länge 121
Spirale, Richtmoment 119
Spirale, Stärke und Gang 120
Spiralnummer 122
Spulendraht 218
Stab, Trägheitsmoment 53
Stand 169
Standänderung 170
Standänderung in einer Laufzeit 170
Standardabweichung 250
Standardabweichung der Stichprobe 250
Standardabweichung des Mittelwerts 250
Staudruck 185
Staudruck bei Bewegung im Wasser 185
Steigung 24
Steigung aus der Gangzahl (Zollgewinde) 195
Steigungswinkel 49, 197
Steiner, Satz von 53, 146
Sterntag 237
Sterntag aus Sonnentag und Jahr 237
Sternzeit 237
Sternzeituhr 237
Stift 56
Stimmgabelquarz 231
Stoß 31
Stoßprüfung 43, 186
Stoßsicherung 35
Stoßsicherung, Prüfung 186
Streckgrenze 55
Streuung 249, 250
Stromaufnahme 226
Stromaufnahme, mittlere 233
Stromausbeute 212
Stromdichte 213
Stromstärke 215

Stromwärme 217
Stundenrad 96
Summe der Stundenschläge 108
Synodischer Monat 111, 238
Synodischer Monat aus dem Mondumlauf 238

T

Tachymeter 245
Tachymeterskala 245
Tage im Schaltzyklus 240
Tagesbedarf, Automatik 86
Tagesnummer 241
Tangens 24
Tangente, Ankerhemmung 156
Teilen 202
Teilen, direktes 203
Teilen, indirektes 204
Teilerkette 229
Teilkopf 204
Teilkreis 27, 98
Teilkreis aus dem Achsabstand 99
Teilkreisdurchmesser 98
Teilkurbel 204
Teilscheibe 203
Teilung 27, 98
Teilung des Hemmungsrads 152
Teilung und Modul 98
Teilung, Hemmungsrad 152
Teilwinkel 202
Telemeter 246
Telemeter: Entfernung aus der Laufzeit des Schalls 246
Temperaturausgleich mit zwei Werkstoffen 149
Temperatureinfluss beim Messen 257
Temperaturfehler, Pendel 148
Temperaturfehler, Unruh 131
Temperaturgang des Stimmgabelquarzes 231
Temperaturkoeffizient 131
Temperaturkoeffizient aus den Werkstoffdaten 131
Temperaturkoeffizient aus der Messung 132
Temperaturkoeffizient des Widerstands 218
Temperaturkoeffizient in der Chronometerprüfung 182
Temperaturkoeffizient, Chronometerprüfung 182
Temperaturkoeffizient, Messung 132
Thermoelastischer Koeffizient 131
Toleranz 198, 252
Toleranz der Höhenluft (Toleranzkette) 202
Toleranzfeld 198
Toleranzkette 201, 202
Torsion 61
Torsion: Spannung in einer runden Welle 61
Torsion: Verdrehwinkel 61
Torsionsfeder 61
Torsionsspannung 61
Tragegang 179
Trägheitsmoment 51
Trägheitsmoment des Reifs (dünner Ring) 125
Trägheitsmoment messen 130
Trägheitsmoment messen mit einer Zusatzscheibe 130
Trägheitsmoment um die Aufhängung (Satz von Steiner) 146
Trägheitsmoment von Schrauben und Masselots 126
Trägheitsmoment, Unruh 125
Trapez 15
Trennkreis 68
Trennkreis bei günstigster Länge 68
Trieb 88
Trieb, fehlender 102
Triebzahn 102
Trimmer 223, 231
Tropisches Jahr 239

U

Übergriff 155
Übermaß 200
Übersetzung 88
Übersetzung eines Eingriffs 88
Übersetzung zwischen Gabel und Unruh 162
Übersetzung, Gabel und Unruh 162
Übersetzungsverhältnis 88
Uhrenbeweger 86
Uhrenverzahnung 100
Umdrehungen des Windfangs je Schlag 110
Umdrehungen je Aufzug 110
Umfang, Kreis 10
Umfangsgeschwindigkeit 33
Umgänge des Federhauses 66
Umgänge, Federhaus 66
Umgänge, größte Zahl 69
Umkehrpunkt 231
Umlaufzeit 90
Umlaufzeit des Federhauses 76
Umlaufzeit des Federhauses mit Beisatzrad 77
Umlaufzeit, Federhaus 76
Umlegieren 208
Umspannung 155
Umspannung des Ankers 155
Ungerade Zähnezahl 106
Unruh ohne Rücker 127
Unruh, Schwingungsdauer 116
Unruhreif 52, 125
Unruhreif, Volumen 19
Unruhschrauben 126
Untersetzung des Automatikaufzugs 85
Untersetzung des Zeigerwerks 96
Untersetzung vom Rotor zum Sekundenrad 233
Untersetzung, Quarzwerk 233
Unwucht 128

V

Verdrehwinkel 61
Vergolden 212
Verjüngung 193
verlorener Weg 159
Verlust durch den Fall 163
Verlustleistung 217
Verzögerung 31
Vierkant 17
Vierkant: Eckmaß 17
Viertelrohr 96
Vollaufzug 84
Vollscheibe und Zylinder 52
Volumen, Kegel 20
Volumen, Kugel 19
Volumen, Stange 18
Volumen, Zylinder 18
Volumenausdehnung 63
Vorschub 190

Vorschubgeschwindigkeit 190
Vorschubgeschwindigkeit beim Drehen und Bohren 190
Vorschubgeschwindigkeit beim Fräsen 191

W

Wägung in Wasser 22
Wahre Ortszeit 243
Wahre Sonnenzeit 240
Walze 78
Walzendurchmesser, wirksamer 78
Wälzpunkt 99
Wärmeausdehnung 62
Wasserdichtheit 36, 184
Wasserdruck 184
Wassersäule 184
Watt 45
Wattsekunde 217
Wattstunde 227
Wechselrad 96
Wechsler 85
Weg bei gleichmäßiger Beschleunigung 32
Weg des Ankers zwischen den Begrenzungen 159
Weg-Zeit-Gesetz 32
Werkgröße 6
Werkstattformel Drehzahl 189
Werkstattformel Linsenverstellung 141
Werkstattformel Pendellänge 140
Widerstand eines Drahts 218
Widerstand und Temperatur 218
Widerstand, elektrischer 215
Widerstandsmoment 57, 58
Widerstandsmoment: Kreis 58
Widerstandsmoment: Rechteck 57
Wiederaufnahme des Gangs 183
Windfang 110
Windungen der abgelaufenen Feder 66
Windungen der aufgezogenen Feder 65
Windungsabstand 121
Windungszahl 121
Winkel aus drei Seiten 26
Winkel der Unruh über der Zeit 118
Winkelgeschwindigkeit 34
Winkelgeschwindigkeit aus der Drehzahl 34
Winkelgeschwindigkeit, Unruh 118
Winkelhebel 41
Winkelminute 6
Winkelsekunde 6
Winkelteilen 204
Winkelteilen mit dem Teilkopf 204
Wirksame Länge 124
Wirksame Länge für die Sollschlagzahl 124
Wirksamer Walzendurchmesser 78
Wirkungsgrad 46
Wirkungsgrad aus gemessenen Drehmomenten 114
Wirkungsgrad der Hemmung 163
Wirkungsgrad der Zugfeder 75
Wirkungsgrad messen 114
Wirkungsgrad, Hemmung 163
Wirkungsgrad, Räderwerk 113
Wirkungsgrad, Uhrwerk 83
Wirkungsgrad, Zugfeder 75
Wölbungsradius 14

Z

Zahndicke 104
Zahndicke des Rades 104
Zähnezahlen zählen 93
Zahnhöhe 103
Zahnlücke 104
Zahnspiel 105
Zahnvorschub 191
Zapfenbruch 58
Zapfendurchmesser 50
Zapfenlager 37
Zapfenreibung 50
Zeiger, Trägheitsmoment 53
Zeigerstellrad 86
Zeigerstellung 86
Zeigerstellung: Weg des Minutenzeigers 86
Zeigerwerk 96
Zeigerwerk, Achsabstand 97
Zeitgleichung 240
Zeitgleichung aus dem Datum 241
Zeitgleichung, Näherungsformel 241
Zeitkonstante 224
Zeitkonstante beim Laden und Entladen 224
Zeitspanvolumen 192
Zeitspanvolumen beim Drehen 192
Zeitwaage, Amplitude 175
Zeitwaage, Gang 172
Zollgewinde 195
Zonenzeit 243
Zonenzeit aus der Sonnenuhr 243
Zug 158
Zug- und Druckspannung 54
Zug: Reibungswinkel als Grenze 158
Zugfeder, Drehmoment 71
Zugfeder, Ersatz 73
Zugfeder, Klingenstärke 72
Zugfeder, Länge 67
Zugfeder, Windungen 65, 66
Zugfestigkeit 55
Zugspannung 54
Zugwinkel 158
Zulagegewicht 143
Zulagegewicht in beliebiger Höhe 144
Zulagegewicht in halber Pendellänge 143
Zulagegewicht, Höhe 144
Zulässige Spannung 55
Zulässige Spannung und Sicherheit 55
Zusatzgewicht 143
Zuschnitt 205
Zuschnitt für einen Ring 206
Zwei Kräfte zusammensetzen 37
Zwischenrad 90
Zykloidenverzahnung 100
Zylinder 18
Zylinder, Durchmesser 168
Zylinder, Trägheitsmoment 52
Zylinderhemmung 168
Zylinderhemmung: Teilung, Zahnlänge und Zylinder 168
Zylinderrad 168